Færøerne

MATEMATISK LINJE
1-ÅRIGT FORLØB TIL A-NIVEAU

MATEMATIK

DELPRØVEN UDEN HJÆLPEMIDLER

Tirsdag den 29. maj 2007 kl. 9.00-10.00

BESVARELSEN AFLEVERES KL. 10.00

Der tildeles i alt ca. 25 point

Eksamenssæt fra Færøerne

Opgave 1
(ca. 25 point)

a) I et koordinatsystem i planen er to vektorer bestemt ved

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} t+3 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ og } \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix},$$

hvor t er et tal.

Bestem t, således at $\vec{a}$ er vinkelret på $\vec{b}$.

b) Beregn integralet $\int_{-2}^{0} (6x^2 - 5x)\,dx$.

c) I et koordinatsystem i rummet er givet to punkter

$$C(2,-4,8) \text{ og } P(5,0,20).$$

Bestem en ligning for den kugle, der har C som centrum, og som går gennem P.

Bestem en ligning for kuglens tangentplan i P.

VEND!

d) I et koordinatsystem i planen er linjerne l og m givet ved parameterfremstillingerne

$$l: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \ , \quad t \in \mathbb{R}$$

$$m: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \ , \quad s \in \mathbb{R}.$$

Beregn koordinatsættet til skæringspunktet mellem l og m.

e) En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = x^2 - 4x + 7.$$

Bestem en forskrift for den stamfunktion F til f, for hvilken $F(3) = 15$.

f) En funktion f er løsning til differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = 2xy^3,$$

og linjen l er bestemt ved ligningen $y = x - 3$.
I punktet $P(4, y_0)$ har grafen for f en tangent, der er parallel med l.

Bestem y_0.

Besvarelsen afleveres kl. 10.00

STUDENTEREKSAMEN MAJ-JUNI 2007 **2007-8-1**

MATEMATISK LINJE
1-ÅRIGT FORLØB TIL A-NIVEAU

MATEMATIK

DELPRØVEN MED HJÆLPEMIDLER

Tirsdag den 29. maj 2007 kl. 9.00-13.10

Kun én af opgaverne 6a og 6b må afleveres til bedømmelse

Der tildeles i alt ca. 75 point

Opgave 2
(ca. 15 point)

I rummet er givet et koordinatsystem med begyndelsespunkt $O(0,0,0)$. Planen α er bestemt ved, at den indeholder O samt punkterne $A(6,4,0)$ og $B(-3,2,12)$.

Bestem en ligning for α.

Beregn arealet af trekant OAB.

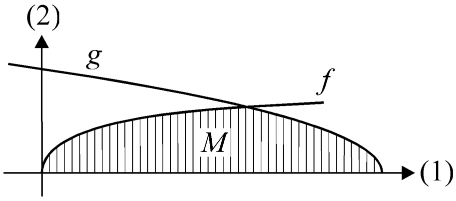
Planen β er bestemt ved ligningen $4x+12y+5z+298=0$.

Beregn den spidse vinkel mellem α og β.

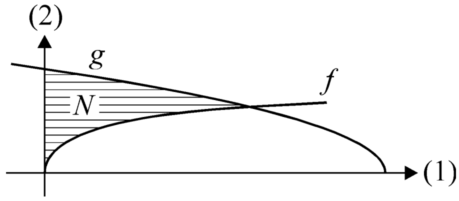
Beregn koordinatsættet til projektionen af A på β.

VEND!

Opgave 3
(ca. 15 point)



Figur 1



Figur 2

To funktioner f og g er bestemt ved

$$f(x) = \sqrt{2x} \quad \text{og} \quad g(x) = \sqrt{45 - 3x} \, .$$

Beregn ved hjælp af stamfunktioner rumfanget af det omdrejningslegeme, der fremkommer, når det skraverede område M på figur 1 drejes 360° om førsteaksen.

Beregn ved hjælp af stamfunktioner arealet af det skraverede område N på figur 2.

Opgave 4
(ca. 15 point)

I et koordinatsystem er givet vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$. For ethvert tal t er vektoren $\vec{b}$ bestemt ved

$$\vec{b} = \vec{a} + t\,\widehat{\vec{a}} \, .$$

Beregn for $t = 2$ arealet af det parallelogram, der udspændes af $\vec{a}$ og $\vec{b}$.

Beregn for $t = 2$ længden af projektionen af $\vec{a}$ på $\vec{b}$.

Bestem de værdier af t, for hvilke vinklen mellem $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er 60°.

Opgave 5
(ca. 15 point)

En funktion f er løsning til differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x - 1}{2y} \, ,$$

og grafen for f går gennem punktet $P(3\,,-1)$.

Bestem en ligning for tangenten til grafen for f i P.

Bestem forskrift og definitionsmængde for f.

Opgave 6a
(ca. 15 point)

I et koordinatsystem er en kurve givet ved parameterfremstillingen

$$\begin{aligned} x &= t^3 - 1 \\ y &= -t^2 + 3t - 2 \end{aligned} \quad , \; t \in \mathbb{R}.$$

Kurven skærer førsteaksen i to punkter A og B, hvor A er punktet med den mindste førstekoordinat.

Beregn koordinatsættet til hvert af punkterne A og B.

Bestem en ligning for tangenten til kurven i punktet A.

Koordinatsystemets førsteakse og kurven afgrænser i første kvadrant en punktmængde M, der har et areal.

Beregn ved hjælp af stamfunktioner arealet af M.

Opgave 6b
(ca. 15 point)

Når p angiver en bestemt vares pris, og t angiver tiden efter, at salget af varen er startet, så opfylder p differentialligningen

$$\frac{dp}{dt} = 42 - 0{,}042\,p\,,$$

hvor p angives i kr., og t måles i døgn.

Bestem en forskrift for p, når det oplyses, at $p(60) = 1040$.

Bestem $p(30)$ og $p'(30)$, og beskriv, hvad disse tal fortæller om prisen på varen.

Bestem, hvor lang tid der går, efter at salget af varen er startet, til prisen på varen er 1017 kr.

Kun én af opgaverne 6a og 6b må afleveres til bedømmelse