STUDENTEREKSAMEN MAJ-JUNI 2009 **2009-8-1**

MATEMATISK LINJE
1-ÅRIGT FORLØB TIL A-NIVEAU

MATEMATIK

DELPRØVEN UDEN HJÆLPEMIDLER

Mandag den 11. maj 2009 kl. 9.00-10.00

BESVARELSEN AFLEVERES KL. 10.00

Der tildeles i alt ca. 25 point

Eksamenssæt fra Færøerne

Opgave 1
(ca. 25 point)

a) I et koordinatsystem er givet punkterne $A(1,2)$ og $B(5,6)$ samt vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \end{pmatrix}$.
Gør rede for, at $\overrightarrow{AB}$ og $\vec{a}$ er ortogonale.

b) Beregn integralet $\int_{-1}^{2} (9x^2 - 4x)\,dx$.

c) I et koordinatsystem i rummet er en kugle givet ved ligningen

$$x^2 - 6x + y^2 + 4y + z^2 - 10z + 29 = 0.$$

Bestem kuglens radius og koordinatsættet til dens centrum.

d) En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = x^{1,5} + 3\ ,\ x > 0.$$

Bestem til f den stamfunktion F, hvis graf går gennem punktet $P(1,2)$.

VEND!

e) I et koordinatsystem i rummet er en plan α bestemt ved ligningen

$$4x + 2y - 4z - 16 = 0.$$

Bestem en ligning for den kugle, der har centrum i $C(4,5,-2)$, og som har α som tangentplan.

f) Gør rede for, at funktionen

$$f(x) = x^2 \cdot e^{3x} + x$$

er en løsning til differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = 3y + 2x \cdot e^{3x} - 3x + 1.$$

Besvarelsen afleveres kl. 10.00

MATEMATISK LINJE
1-ÅRIGT FORLØB TIL A-NIVEAU

MATEMATIK

DELPRØVEN MED HJÆLPEMIDLER

Mandag den 11. maj 2009 kl. 9.00-13.10

Kun én af opgaverne 6a og 6b må afleveres til bedømmelse

Der tildeles i alt ca. 75 point

Opgave 2 (ca. 15 point)

I et koordinatsystem er to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ bestemt ved

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ og } \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5-t \end{pmatrix},$$

hvor t er et tal.

Beregn $|\vec{b}|$ for $t = -3$.

Beregn for $t = -3$ arealet af det parallelogram, der udspændes af vektorerne $\vec{a}$ og $\vec{b}$.

Beregn for $t = -3$ vinklen mellem vektorerne $\vec{a}$ og $\vec{b}$.

Bestem tallet t, så projektionen af $\vec{b}$ på $\vec{a}$ er $2\vec{a}$.

VEND!

Opgave 3 (ca. 15 point)

I et koordinatsystem i rummet er en plan α givet ved ligningen

$$2x + y - 3z + 9 = 0\,,$$

og en linje l er givet ved parameterfremstillingen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathrm{R}.$$

Beregn koordinatsættet til skæringspunktet mellem linjen l og planen α.

Beregn den spidse vinkel mellem linjen l og planen α.

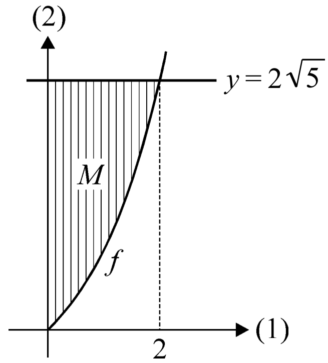
Beregn afstanden fra punktet $P(9,3,10)$ til linjen l.

Bestem en ligning for den plan β, der indeholder linjen l og punktet P.

Opgave 4 (ca. 15 point)

En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = x \cdot \sqrt{1 + x^2}\,, \quad x \geq 0.$$



Grafen for f, koordinatsystemets andenakse og linjen med ligningen $y = 2\sqrt{5}$ afgrænser en punktmængde M, der har et areal.

Beregn ved hjælp af stamfunktioner arealet af M.

Beregn ved hjælp af stamfunktioner rumfanget af det omdrejningslegeme, der fremkommer, når M drejes 360° om koordinatsystemets førsteakse.

Opgave 5 (ca. 15 point)

En funktion f er løsning til differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{x}\,,$$

og grafen for f går gennem punktet $P(1, \tfrac{1}{2})$.

Bestem en ligning for tangenten til grafen for f i punktet P.

Bestem forskrift og definitionsmængde for f.

Opgave 6a (ca. 15 point)

I et koordinatsystem i planen er en kurve givet ved parameterfremstillingen

$$\begin{aligned} x &= t^2 - 4t \\ y &= t^2 - 5t + 6 \end{aligned} \quad , \quad t \in \mathbb{R}.$$

Kurven skærer koordinatsystemets andenakse i to punkter A og B, hvor A er punktet med den mindste andenkoordinat.

Beregn koordinatsættet til hvert af punkterne A og B.

Beregn koordinatsættet til det punkt, hvori kurvens tangent er parallel med koordinatsystemets førsteakse.

Beregn koordinatsættet til skæringspunktet mellem kurvens tangent i A og kurvens tangent i B.

Opgave 6b (ca. 15 point)

I en sø udledes pesticid. I en model er koncentrationen af pesticid (målt i ppm) en funktion f af tiden t (målt i døgn), og f er den løsning til differential-ligningen

$$\frac{dy}{dt} = 0{,}05 - 0{,}01y \quad , \quad y < 5,$$

der opfylder, at $f(0) = 0$.

Bestem en forskrift for f, og løs ligningen $f(t) = 2$.

I en prognose forudsættes det, at udledningen af pesticid i søen kan bringes til ophør, når $t = 60$. I tidsrummet indtil $t = 60$ kan koncentrationen af pesticid beskrives ved den fundne løsning ovenfor. I tidsrummet efter $t = 60$ kan koncentrationen af pesticid bestemmes ved den løsning g til differentialligningen

$$\frac{dy}{dt} = -0{,}01y,$$

som opfylder, at $f(60) = g(60)$.

Til hvilket tidspunkt er koncentrationen af pesticid ifølge prognosen nået ned på 1 ppm?

Kun én af opgaverne 6a og 6b må afleveres til bedømmelse