STUDENTEREKSAMEN AUGUST-SEPTEMBER 2009 **2009-8-5**

MATEMATISK LINJE
1-ÅRIGT FORLØB TIL A-NIVEAU

MATEMATIK

DELPRØVEN UDEN HJÆLPEMIDLER

---

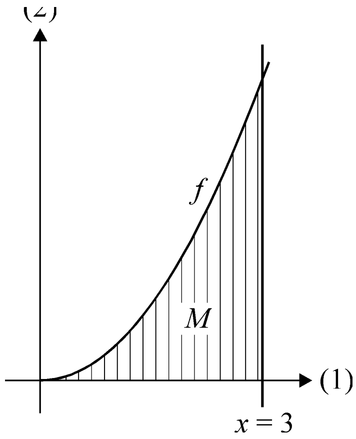
yyydag den nn. august 2009 kl. 9.00-10.00

BESVARELSEN AFLEVERES KL. 10.00

Der tildeles i alt ca. 25 point

Eksamenssæt fra Færøerne

Opgave 1
(ca. 25 point)



a) Figuren viser grafen for funktionen $f(x) = x^2$.

Beregn arealet af det skraverede område M.

b) Beregn afstanden fra punktet $C(1,-3,2)$ til planen α med ligningen

$$x - 2y + 2z + 7 = 0.$$

c) Undersøg, om funktionen

$$f(x) = \mathrm{e}^x - x^2$$

er en løsning til differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = y + x^2 - 2x.$$

VEND!

d) I et koordinatsystem i planen bevæger et punkt $P(x,y)$ sig, således at der til tidspunktet t gælder

$$\begin{aligned} x &= 2t^3 + 2t \\ y &= -3t^2 + 12t \end{aligned} \quad , \quad t \in \mathbb{R}.$$

Med $\vec{v}$ betegnes hastighedsvektoren i punktet svarende til tidspunktet $t = 1$.

Beregn $|\vec{v}|$.

e) En funktion f er givet ved

$$f(x) = \mathrm{e}^x + \frac{1}{x} \ , \ x > 0.$$

Bestem integralet $\int f(x)\,dx$.

f) I et koordinatsystem i rummet er to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ bestemt ved

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} t^2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ og } \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2t \end{pmatrix},$$

hvor t er et tal.

Beregn de værdier af t, for hvilke $\vec{a} \perp \vec{b}$.

To andre vektorer $\vec{c}$ og $\vec{d}$ er givet ved

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ s+3 \\ 12 \end{pmatrix} \text{ og } \vec{d} = \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \\ 72 \end{pmatrix},$$

hvor s er et tal.

Bestem s, så $\vec{c} \parallel \vec{d}$.

Besvarelsen afleveres kl. 10.00

MATEMATISK LINJE
1-ÅRIGT FORLØB TIL A-NIVEAU

MATEMATIK

DELPRØVEN MED HJÆLPEMIDLER

yyydag den nn. august 2009 kl. 9.00-13.10

Kun én af opgaverne 6a og 6b må afleveres til bedømmelse

Der tildeles i alt ca. 75 point

Opgave 2
(ca. 15 point)

I et koordinatsystem i planen er givet to vektorer

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ og } \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Beregn koordinatsættet til projektionen af $\vec{b}$ på $\vec{a}$.

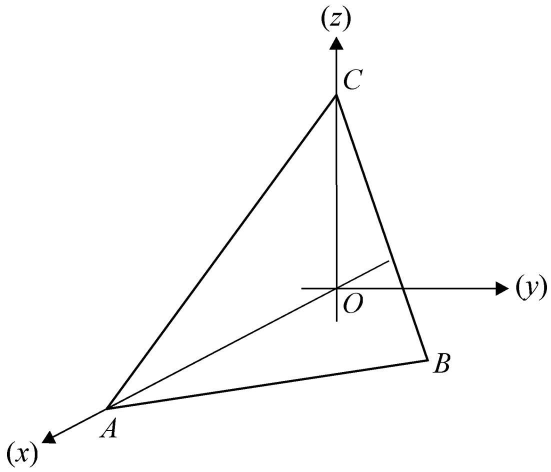
Beregn vinklen mellem $\vec{a}$ og $\vec{b}$.

Beregn tallet t, så $\vec{a}$ og $\vec{a} + t\vec{b}$ er ortogonale.

Beregn de tal t, for hvilke arealet af det parallelogram, der udspændes af vektorerne $\vec{a}$ og $t\vec{b}$, er 32.

VEND!

Opgave 3
(ca. 15 point)



$O(0,0,0)$
$A(16,0,0)$
$B(9,9,0)$
$C(0,0,12)$

I et koordinatsystem med begyndelsespunkt O er indtegnet et trekantet sejl, som er udspændt mellem tre punkter A, B og C (se figur).
Den plan, sejlet ligger i, kaldes α.

Bestem en ligning for α, og bestem arealet af sejlet.

Beregn den spidse vinkel mellem α og planen med ligningen $z = 0$.

En snor er fastgjort i punktet O og et punkt S på sejlet, således at OS står vinkelret på α.

Beregn koordinatsættet til punktet S.

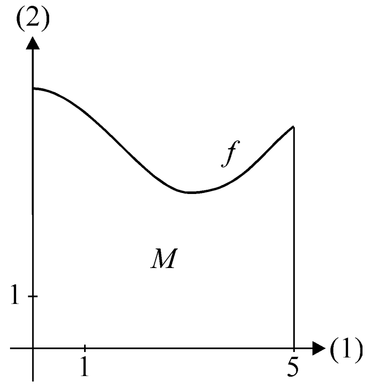
Opgave 4
(ca. 15 point)

En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = \cos x + 4 \ , \ x \in [0;5] .$$

Grafen for f, koordinatsystemets akser og linjen med ligningen $x = 5$ afgrænser en punktmængde M, der har et areal.

Beregn ved hjælp af stamfunktioner arealet af M.



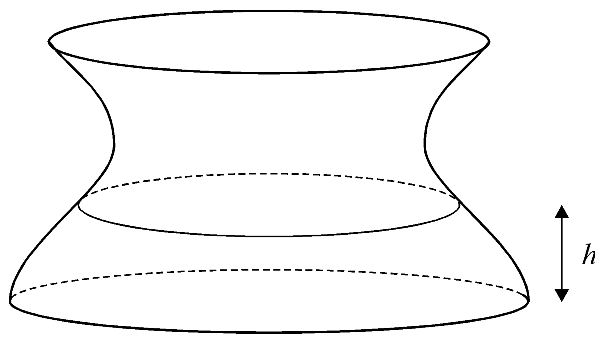
Figur 1

Det indre af en beholder har form som det omdrejningslegeme, der fremkommer, når M drejes 360° om førsteaksen.

Bestem rumfanget af det indre af beholderen.

Beholderen stilles lodret, som vist på figur 2, og den fyldes op med vand til den vandrette højde h, så beholderen er halvt fyldt med vand.

Bestem ved hjælp af grafregneren denne vandrette højde h.



Figur 2

Opgave 5 (ca. 15 point)

En funktion f er løsning til differentialligningen

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2x-4}{2y} \ , \ x>2 \ \text{ og } \ y>0,$$

og grafen for f går gennem punktet $P(6,1)$.

Bestem en ligning for tangenten til grafen for f i punktet P.

Bestem forskrift og definitionsmængde for f.

Opgave 6a (ca. 15 point)

I et koordinatsystem i planen er en kurve givet ved parameterfremstillingen

$$\begin{matrix} x=t^3-9t \\ y=t^2-7t+12 \end{matrix} \ , \ t\in \mathbb{R}.$$

Beregn koordinatsættet til hvert af kurvens skæringspunkter med førsteaksen.

Beregn t-værdien for hvert af de punkter, hvor kurven har en tangent, der er parallel med koordinatsystemets andenakse.

Beregn t-værdien for hvert af de punkter, hvor kurvens tangent er parallel med linjen med ligningen $y=-x+1$.

Opgave 6b (ca. 15 point)

I en model udbreder en bakteriesygdom sig således, at den funktion $N(t)$, der angiver antallet af smittede til tiden t (målt i uger), er løsning til en differentialligning af typen

$$\frac{dN}{dt}=k\cdot N\cdot(25000-N),$$

hvor k er en konstant.
I modellen antages, at til tidspunktet $t = 0$ er antallet af smittede 2500, og at smitten udbreder sig med en hastighed på 1500 pr. uge, når antallet af smittede er 5000.

Bestem k, og bestem N_∞, hvor $N_\infty=\lim\limits_{t\to\infty}N(t)$.

Bestem en forskrift for N, og bestem det tidspunkt t, hvor antallet af smittede er 95% af N_∞.

Kun én af opgaverne 6a og 6b må afleveres til bedømmelse