MATEMATISK LINJE
1-ÅRIGT FORLØB TIL A-NIVEAU

MATEMATIK

DELPRØVEN MED HJÆLPEMIDLER

Torsdag den 22. maj 2014 kl. 9.00-13.10

Kun én af opgaverne 6a og 6b må afleveres til bedømmelse

Der tildeles i alt ca. 75 point

Opgave 2
(ca. 15 point)

I et koordinatsystem i planen er givet to vektorer

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ og } \vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Beregn arealet af parallelogrammet, der udspændes af vektorerne $\vec{a}$ og $\vec{b}$.

Beregn koordinatsættet til projektionen af $\vec{a}$ på $\vec{b}$.

Beregn vinklen mellem vektorerne $\vec{a}+\vec{b}$ og $\vec{b}$.

Beregn tallet t, så vektoren $\vec{a}+t\vec{b}$ er ortogonal på $\vec{b}$.

VEND!

Opgave 3 (ca. 20 point)

I et koordinatsystem i rummet med begyndelsespunkt $O(0,0,0)$ er der givet punkterne $A(4,10,-2)$, $B(0,12,4)$ og $C(-6,10,12)$.

Beregn længden af vektoren $\overrightarrow{AB}$.

Bestem en ligning for den plan α, der indeholder punkterne A, B og C.

Beregn arealet af trekant ABC.

En plan β er bestemt ved ligningen

$$2x - y + 3z - 14 = 0\,.$$

Beregn afstanden fra punktet B til β.

Beregn koordinatsættet til projektionen af O på β.

Opgave 4 (ca. 10 point)

En funktion f er en løsning til differentialligningen

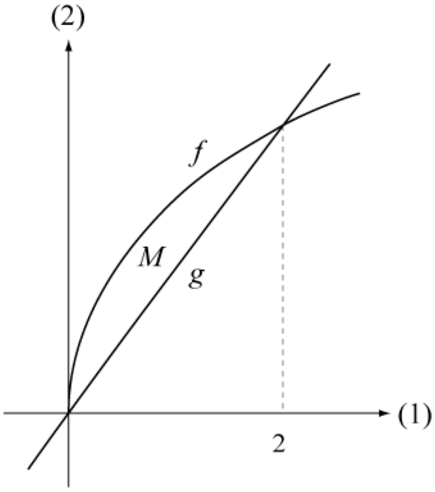
$$\frac{dy}{dx} = -x^2 \cdot y\,,$$

og grafen for f går gennem punktet $P(3,1)$.

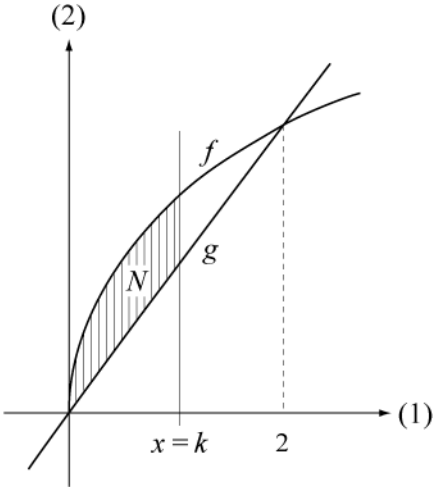
Bestem en ligning for tangenten til grafen for f i punktet P.

Bestem en forskrift for f.

Opgave 5
(ca. 15 point)



Figur 1



Figur 2

To funktioner f og g er bestemt ved

$$f(x)=\sqrt{2x} \quad , \quad x \geq 0$$

$$g(x)=x\ .$$

Graferne for f og g afgrænser en punktmængde *M*, der har et areal (figur 1).

Beregn ved hjælp af stamfunktioner arealet af *M*.

Bestem rumfanget af det omdrejningslegeme, der fremkommer, når *M* drejes $360°$ om koordinatsystemets førsteakse.

Linjen med ligningen $x=k$, hvor $0<k<2$, afgrænser sammen med graferne for f og g en punktmængde *N*, som er skraveret på figur 2.

Bestem ved hjælp af grafregneren k, så arealet af N er 0,4.

VEND!

Opgave 6a
(ca. 15 point)

Antallet af individer i en population kan beskrives ved en funktion *N*, således at $N(t)$ er antallet af individer til tiden *t*, hvor *t* angives i år. Det antages, at N er løsning til differentialligningen

$$\frac{dN}{dt} = 4 \cdot 10^{-6} \cdot N \cdot (30000 - N),$$

og at der til tidspunktet $t = 0$ er 6000 individer i populationen.

Bestem væksthastigheden $\frac{dN}{dt}$ til det tidspunkt, hvor antallet af individer er 10000.

Bestem en forskrift for *N*.

Bestem det tidspunkt, hvor væksthastigheden $\frac{dN}{dt}$ er størst mulig.

Opgave 6b
(ca. 15 point)

I et koordinatsystem i planen bevæger et punkt $P(x, y)$ sig, således at der til tidspunktet *t* gælder

$$\begin{aligned} x &= t^3 + 1 \\ y &= -t^2 + 2t \end{aligned} \quad , \quad t \in R.$$

Beregn koordinatsættet til hvert af de punkter, hvori banekurven skærer koordinatsystemets førsteakse, og til det punkt, hvori banekurven skærer koordinatsystemets andenakse.
Skitsér banekurven.

Bestem en ligning for tangenten til banekurven i det punkt, hvor banekurven skærer koordinatsystemets andenakse.

I første kvadrant afgrænser banekurven sammen med koordinatsystemets førsteakse en punktmængde *M*, der har et areal.

Bestem arealet af *M*.

Kun én af opgaverne 6a og 6b må afleveres til bedømmelse