MATEMATISK LINJE
3-ÅRIGT FORLØB TIL A-NIVEAU

MATEMATIK

PRØVEN MED HJÆLPEMIDLER

Torsdag den 21. august 2008 kl. 9.00-13.00

Kun én af opgaverne 7a og 7b må afleveres til bedømmelse

Der tildeles i alt ca. 100 point

Eksamenssæt fra Færøerne

Opgave 1
(ca. 15 point)

I trekant ABC er $|AB| = 6{,}0$, $|AC| = 10{,}0$ og $\angle A = 38°$.

Beregn $|BC|$ og $\angle B$.

Vinkelhalveringslinjen for vinkel A skærer siden BC i punktet D.

Beregn $|BD|$.

På siden AC ligger punktet E, så DE står vinkelret på AC.

Beregn $|DE|$.

Opgave 2
(ca. 15 point)

I et koordinatsystem i rummet med begyndelsespunkt $O(0,0,0)$ er givet to punkter $A(1,-1,2)$ og $B(3,1,1)$.

Beregn skalarproduktet af vektorerne $\overrightarrow{OA}$ og $\overrightarrow{AB}$.

Bestem en ligning for den plan α, der indeholder punkterne O, A og B.

En plan β er bestemt ved ligningen

$$2x + y - 2z = 0.$$

Beregn afstanden fra punktet $C(11\,,2\,,-6)$ til planen β.

Bestem en ligning for den kugle, der har centrum i punktet C, og som har β som tangentplan.

Beregn koordinatsættet til kuglens røringspunkt med β.

VEND!

Opgave 3
(ca. 15 point)

Nedenstående tabel viser det årlige forbrug af vedvarende energi i Danmark i årene 1999 til 2004.

År efter 1999	0	1	2	3	4	5
Årligt forbrug af vedvarende energi (TJ)	78 339	85 717	92 591	98 979	112 678	123 125

Det oplyses, at det årlige forbrug af vedvarende energi (målt i TJ) som funktion af tiden (målt i år efter 1999) med tilnærmelse kan beskrives ved en eksponentielt voksende funktion f.

Benyt tabellens data til at bestemme en forskrift for f.

Bestem fordoblingstiden for f, og bestem den procentvise vækst pr. år.

Bestem ved hjælp af funktionen f, hvor lang tid der går efter 1999, inden det årlige forbrug af vedvarende energi når op på 160 000 TJ.

http://www.ens.dk

Opgave 4
(ca. 15 point)

En funktion f er bestemt ved forskriften

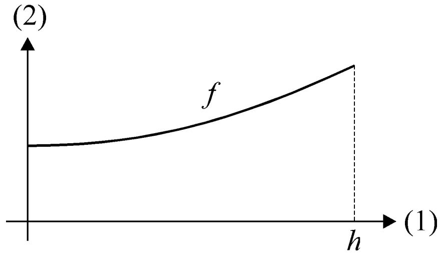
$$f(x) = 1 - \frac{2x}{1 + x^2} \ .$$

Bestem en ligning for tangenten til grafen for f i punktet $P(0, f(0))$, og bestem koordinatsættet til tangentens skæringspunkt med førsteaksen.

Bestem funktionens monotoniforhold, og angiv de lokale ekstremumssteder.

Gør rede for, at grafen for f har en asymptote, og bestem en ligning for denne.

Opgave 5
(ca. 10 point)



Formen af et bæger med højden h fremkommer ved en drejning på 360° om førsteaksen af grafen for funktionen

$$f(x) = 0{,}03x^2 + 2 \ , \ x \in [0\,;h].$$

Beregn ved hjælp af stamfunktioner rumfanget af et bæger, når $h = 8$.

Bestem ved hjælp af grafregneren højden h, så bægerets rumfang er 400.

Opgave 6 (ca. 15 point)

I en model for en bestemt type af bakterier i en sø, vil antallet N af bakterier pr. mL vand fra søen som funktion af tiden t (målt i døgn) være løsning til differentialligningen

$$\frac{dN}{dt} = 6\cdot 10^3 - 5\cdot 10^{-2}\cdot N.$$

Til tiden $t = 0$ er der ingen bakterier i søen.

Bestem en forskrift for N, og bestem antallet af bakterier pr. mL vand fra søen, når $t = 4$.

Tallet $\lim\limits_{t\to\infty} N(t)$ betegnes N_∞.

Bestem N_∞, og giv en fortolkning af dette tal.

Bestem det tidspunkt, hvor antallet af bakterier pr. mL vand fra søen er $\frac{1}{2}N_\infty$, og bestem væksthastigheden til dette tidspunkt.

Opgave 7a (ca. 15 point)

For et stort parti sække à 100 kg hvede antages, at vandindholdet (målt i kg) i sækkene med hvede er normalfordelt med middelværdi 13,2 og spredning 0,9.

Bestem sandsynligheden for, at en tilfældigt udvalgt sæk med hvede har et vandindhold på mere end 14,5.

I et andet stort parti sække à 100 kg hvede antages, at vandindholdet (målt i kg) i sækkene med hvede er normalfordelt med middelværdi μ og spredning 0,9. Det oplyses, at sandsynligheden for, at en tilfældigt udvalgt sæk med hvede har et vandindhold på mere end 14,5, er 0,025.

Bestem middelværdien μ.

Fra sidstnævnte parti hvede udtages en stikprøve på 20 sække à 100 kg.

Bestem sandsynligheden for, at der i stikprøven er højst én sæk med et vandindhold på mere end 14,5.

Opgave 7b (ca. 15 point)

En funktion f er den løsning til differentialligningen

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 9y\ ,$$

der opfylder, at $f(0) = 6$ og $f'(0) = 12$.

Bestem en ligning for tangenten til grafen for f i punktet $P(0, f(0))$.

Bestem en forskrift for f.

Gør rede for, at funktionen

$$g(x) = f(x) - 9x^2 - 5$$

er en løsning til differentialligningen

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 9y = 81x^2 + 27.$$

Kun én af opgaverne 7a og 7b må afleveres til bedømmelse