MATEMATISK LINJE
1-ÅRIGT FORLØB TIL A-NIVEAU

MATEMATIK

DELPRØVEN UDEN HJÆLPEMIDLER

Tirsdag den 14. august 2007 kl. 9.00-10.00

BESVARELSEN AFLEVERES KL. 10.00

Der tildeles i alt ca. 25 point

Eksamenssæt fra Færøerne

Opgave 1
(ca. 25 point)

a) I et koordinatsystem i planen er to vektorer bestemt ved

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2t-1 \\ t+3 \end{pmatrix},$$

hvor t er et tal.

Bestem t, så $\vec{a}$ står vinkelret på $\vec{b}$.

b) Beregn integralet $\int_1^2 (3x^2 - x)\,dx$.

c) I et koordinatsystem i planen bevæger et punkt $P(x,y)$ sig, således at der til tidspunktet t gælder, at

$$\begin{aligned} x &= t^4 + 3t \\ y &= 2t^2 + 2t \end{aligned} \quad , \quad t \in \mathbb{R}.$$

Hastighedsvektoren til tidspunktet $t = 1$ betegnes med $\vec{v}$.

Beregn koordinatsættet til $\vec{v}$.

Bestem en parameterfremstilling for tangenten til banekurven i punktet svarende til tidspunktet $t = 1$.

VEND!

d) I et koordinatsystem i rummet er en kugle givet ved ligningen

$$x^2 + y^2 - 8y + z^2 + 4z = 16.$$

Bestem kuglens radius og koordinatsættet til dens centrum.

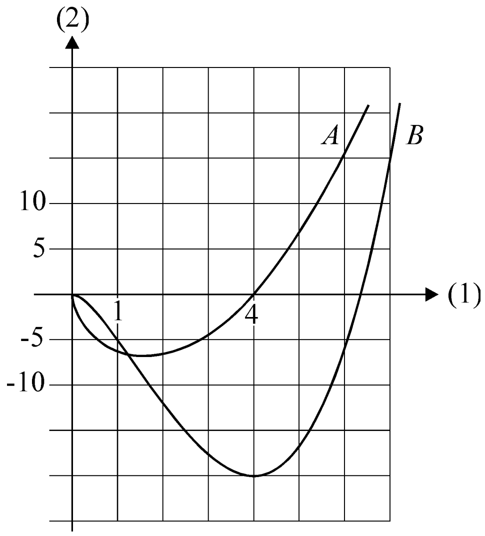
e) En funktion f er løsning til differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + y^2}{1 + y^2} \; ,$$

og grafen for f går igennem punktet $P(2,1)$.

Bestem en ligning for tangenten til grafen for f i P.

f)



Figuren viser graferne for to funktioner f og F. Det oplyses, at F er en stamfunktion til f.

Gør rede for, hvilken graf der hører til F.

Bestem $\int_0^4 f(x)\,dx$.

Besvarelsen afleveres kl. 10.00

MATEMATISK LINJE
1-ÅRIGT FORLØB TIL A-NIVEAU

MATEMATIK

DELPRØVEN MED HJÆLPEMIDLER

Tirsdag den 14. august 2007 kl. 9.00-13.10

Kun én af opgaverne 6a og 6b må afleveres til bedømmelse

Der tildeles i alt ca. 75 point

Opgave 2
(ca. 15 point)

I et koordinatsystem i planen er der givet to vektorer

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{b} = 2\vec{a} - \hat{\vec{a}}.$$

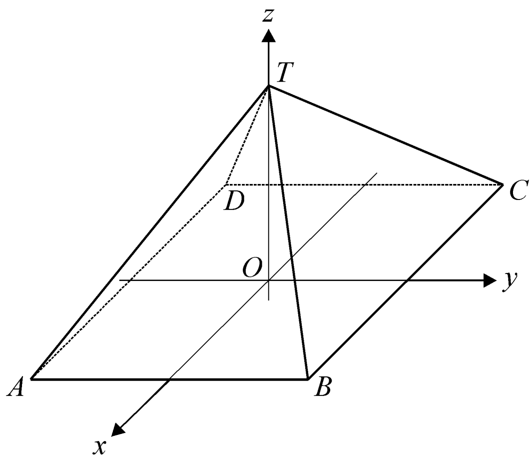
Beregn vinklen mellem $\vec{a}$ og $\vec{b}$.

Beregn koordinatsættet til projektionen af $\vec{b}$ på $\vec{a}$.

Beregn arealet af det parallelogram, der udspændes af $\vec{a}$ og $\vec{b}$.

VEND!

Opgave 3
(ca. 15 point)



$O(0,0,0)$
$A(10,-10,0)$
$B(10,10,0)$
$C(-10,10,0)$
$D(-10,-10,0)$
$T(0,0,15)$

Figuren viser en pyramide indtegnet i et koordinatsystem med begyndelsespunkt O. Pyramiden har hjørnerne A, B, C, D og T. Hjørnernes koordinatsæt er angivet på figuren.

Bestem en ligning for den plan, der indeholder sidefladen BCT.

Planen, der indeholder sidefladen ABT, har ligningen $3x + 2z - 30 = 0$.

Beregn den stumpe vinkel mellem de to planer, der indeholder sidefladerne ABT og BCT.

Beregn afstanden fra O til den plan, der indeholder sidefladen ABT.

Beregn afstanden fra O til linjen gennem A og T.

Opgave 4
(ca. 15 point)

I en model for en bestemt løber, der løber kortdistanceløb, er løberens hastighed v (meter pr. sekund) som funktion af tiden t (sekunder) løsning til differentialligningen

$$\frac{dv}{dt} = 12{,}2 - 1{,}121\,v\,.$$

Bestem en forskrift for v, når det oplyses, at $v(0) = 0$.

Med s (meter) betegnes den strækning, som løberen har tilbagelagt til tiden t. Det oplyses, at s er en stamfunktion til v, og at $s(0) = 0$.

Bestem en forskrift for s.

Benyt grafregneren til at bestemme, hvor lang tid løberen ifølge modellen vil være om at løbe et løb på 100 m.

Kilde: *Joseph B. Keller*, *American Mathematical Monthly*, *Vol*. 81, *No*. 5 (*May*, 1974), *pp*. 474-480.

Opgave 5 (ca. 15 point)

Beregn den eksakte værdi af hvert af integralerne

$$\int_0^1 x^2(1+2x^3)^5\,dx \quad \text{og} \quad \int_1^2 x^7 \ln x\,dx\,.$$

En funktion f er defineret ved

$$f(x) = \sqrt{x^7 \ln x} \quad , \quad x \geq 1.$$

Sammen med førsteaksen og linjen med ligningen $x = 2$ afgrænser grafen for f en punktmængde M, der har et areal.

Bestem rumfanget af det omdrejningslegeme, der fremkommer, når M drejes 360° om førsteaksen.

Opgave 6a (ca. 15 point)

Bestem den løsning f til differentialligningen

$$y'' = 4y \ ,$$

der opfylder $f(0) = 1$ og $f'(0) = 0$.

Beregn ved hjælp af stamfunktioner $\int_0^2 f(x)\,dx$.

Beregn konstanten k, således at funktionen $g(x) = f(x) - x^2 + k$ er løsning til differentialligningen

$$y'' = 4\,(y + x^2)\ .$$

Opgave 6b (ca. 15 point)

I et koordinatsystem i planen er en kurve givet ved parameterfremstillingen

$$\begin{aligned} x &= \ln t \\ y &= -t^2 + 4t - 1{,}75 \end{aligned} \quad , \quad t > 0\,.$$

Beregn koordinatsættet til hvert af kurvens skæringspunkter med førsteaksen, og skitsér kurven.

For to værdier af t er hastighedsvektoren parallel med vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1{,}5 \end{pmatrix}$.

Beregn de to værdier af t.

Kurven afgrænser sammen med førsteaksen en punktmængde M, der har et areal.

Beregn ved hjælp af stamfunktioner arealet af M.

Kun én af opgaverne 6a og 6b må afleveres til bedømmelse