MATEMATISK LINJE
1-ÅRIGT FORLØB TIL A-NIVEAU

MATEMATIK

DELPRØVEN UDEN HJÆLPEMIDLER

Tirsdag den 31. maj 2011 kl. 9.00-10.00

BESVARELSEN AFLEVERES KL. 10.00

Der tildeles i alt ca. 25 point

Opgave 1
(ca. 25 point)

a) I et koordinatsystem i planen er tre punkter givet ved

$$A(2,1)\,,\ B(5,-1)\ \text{og}\ C(4,7)\,.$$

Bestem koordinatsættet til hver af vektorerne $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AC}$.

Bestem arealet af det parallelogram, der udspændes af $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AC}$.

b) I et koordinatsystem i rummet er et punkt givet ved $P(1,-3,6)$, og en plan α er givet ved ligningen

$$x+2y-2z+5=0\,.$$

En kugle K med centrum i P har α som tangentplan.

Bestem en ligning for K.

c) En linje l er givet ved ligningen

$$x-3y=15\,.$$

Bestem en parameterfremstilling for l.

VEND!

d) En funktion f er bestemt ved

$$f(x)=x^2+6e^{3x}.$$

Bestem den stamfunktion til f, hvis graf går gennem punktet $P(0,-4)$.

e) Der er givet følgende differentialligning

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2xy}{1+x^2}.$$

En funktion f er løsning til differentialligningen, og grafen for f går gennem punktet $P(3,5)$.

Bestem en ligning for tangenten til grafen for f i punktet P.

Gør rede for, at funktionen

$$g(x)=3(1+x^2)$$

også er en løsning til differentialligningen .

Besvarelsen afleveres kl. 10.00

MATEMATISK LINJE
1-ÅRIGT FORLØB TIL A-NIVEAU

MATEMATIK

DELPRØVEN MED HJÆLPEMIDLER

Tirsdag den 31. maj 2011 kl. 9.00-13.10

Kun én af opgaverne 6a og 6b må afleveres til bedømmelse

Der tildeles i alt ca. 75 point

Opgave 2
(ca. 15 point)

I et koordinatsystem i planen er to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ givet ved

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} t+1 \\ t \end{pmatrix},$$

hvor t er et tal.

Bestem den værdi af t, for hvilken $\vec{b}$ er vinkelret på vektoren $\vec{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Beregn $|\vec{a} + 2\hat{\vec{b}}|$ for $t = 2$.

Beregn de to værdier af t, for hvilke $|\vec{b}| = 5$.

VEND!

Opgave 3
(ca. 20 point)

I et koordinatsystem i rummet er tre punkter givet ved

$$A(2, 3, 1),\ B(3, 4, 8) \text{ og } C(5, 1, 5).$$

Bestem en ligning for den plan α, der indeholder punkterne A, B og C.

Bestem arealet af trekant ABC.

Bestem en parameterfremstilling for den linje l, der går gennem punkterne A og B.

I samme koordinatsystem er en linje m givet ved parameterfremstillingen

$$m: \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 22 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix} \quad , \quad s \in \mathrm{R}.$$

Linjerne l og m skærer hinanden i punktet P.

Bestem koordinatsættet til P, og bestem den spidse vinkel mellem l og m.

Opgave 4
(ca. 15 point)

En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = x \cdot \sqrt{16 - x^2}\,.$$

Grafen for f og koordinatsystemets førsteakse afgrænser i første kvadrant en punktmængde M, der har et areal.

Beregn ved hjælp af stamfunktioner arealet af M.

Beregn ved hjælp af stamfunktioner rumfanget af det omdrejningslegeme, der fremkommer, når M drejes 360º om koordinatsystemets førsteakse.

Opgave 5
(ca. 10 point)

Når et isbjerg smelter, afhænger den mængde is, der smelter pr. tidsenhed, af isbjergets størrelse og form samt af de klimatiske forhold.
I en model for et bestemt isbjerg betegner M isbjergets masse, målt i ton, mens t betegner tiden, målt i døgn.
Det antages i modellen, at M som funktion af t opfylder differentialligningen


Foto: J.P. Touborg

$$\frac{dM}{dt} = -0{,}2 \cdot M^{\frac{2}{3}}.$$

Bestem en forskrift for M som funktion af t, når det oplyses, at $M(0) = 600$.

Benyt modellen til at bestemme det tidspunkt, hvor isbjerget vejer 300 ton.

Opgave 6a (ca. 15 point)

I et koordinatsystem i planen bevæger et punkt $P(x, y)$ sig, således at der til tidspunktet t gælder, at

$$\begin{matrix} x = t^2 - 3t \\ y = t^3 - 9t \end{matrix} \quad , \quad t \in \mathrm{R} .$$

Beregn koordinatsættet til hvert af banekurvens skæringspunkter med førsteaksen.

Skitsér banekurven.

Bestem vinklen mellem vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}$ og hastighedsvektoren til tidspunktet $t = 0$.

Beregn t-værdien til hvert af de punkter på banekurven, hvori hastighedsvektoren er parallel med $\vec{a}$.

Opgave 6b (ca. 15 point)

For en bestemt population af fisk er populationens størrelse N, målt i antal fisk, en funktion af tiden t, målt i antal år. I en model antages det, at N er løsning til differentialligningen

$$\frac{dN}{dt} = 8 \cdot 10^{-8} \cdot N \cdot (5 \cdot 10^6 - N).$$

Bestem den hastighed, hvormed populationens størrelse vokser til det tidspunkt, hvor populationens størrelse er $2 \cdot 10^6$.

Bestem en forskrift for N som funktion af t, når det oplyses, at $N(0) = 10^6$.

Bestem det tidspunkt t, hvor populationens størrelse er $2 \cdot 10^6$.

Kun én af opgaverne 6a og 6b må afleveres til bedømmelse