STUDENTEREKSAMEN MAJ-JUNI 2011 **2011-8-3**

MATEMATISK LINJE
3-ÅRIGT FORLØB TIL A-NIVEAU

MATEMATIK

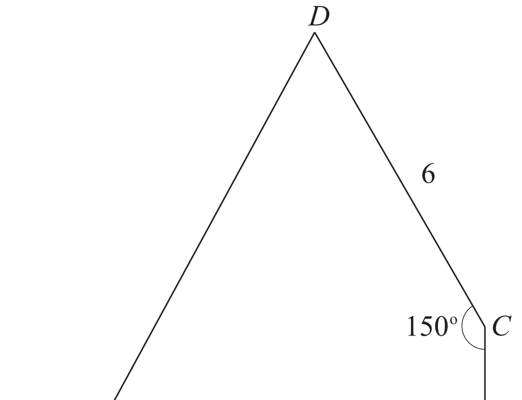
PRØVEN MED HJÆLPEMIDLER

Tirsdag den 31. maj 2011 kl. 9.00-13.00

Kun én af opgaverne 7a og 7b må afleveres til bedømmelse

Der tildeles i alt ca. 100 point

Opgave 1
(ca. 15 point)



I firkant *ABCD* er $\angle B = 90°$, $\angle C = 150°$, $|AB| = 8$, $|BC| = 4$ og $|CD| = 6$.

Beregn $|AC|$ og $\angle ACB$.

Beregn $|AD|$.

Beregn arealet af firkant *ABCD*.

VEND!

Opgave 2 (ca. 15 point)

I et koordinatsystem er en parabel *P* bestemt ved ligningen

$$y = x^2 - 8x + 7 \,.$$

Bestem koordinatsættet til parablens toppunkt *T*.

Bestem koordinatsættet til hvert af parablens skæringspunkter med førsteaksen.

Det af de to skæringspunkter, der har størst førstekoordinat, betegnes med *A*.
En linje *l* går gennem punktet *A* og punktet $B(0,7)$.

Bestem en ligning for linjen *l*.

Beregn afstanden fra parablens toppunkt *T* til linjen *l*.

Opgave 3 (ca. 15 point)

I et koordinatsystem i rummet er tre punkter givet ved

$$A(2,\,3,\,1),\;\; B(3,\,4,\,8) \text{ og } C(5,\,1,\,5).$$

Bestem en ligning for den plan α, der indeholder punkterne *A*, *B* og *C*.

Bestem en parameterfremstilling for den linje *l*, der går gennem punkterne *A* og *B*.

I samme koordinatsystem er en linje *m* givet ved parameterfremstillingen

$$m: \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 22 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix} \quad , \quad s \in \mathrm{R} \,.$$

Linjerne *l* og *m* skærer hinanden i punktet *P*.

Bestem koordinatsættet til *P*, og bestem den spidse vinkel mellem *l* og *m*.

Opgave 4 (ca. 20 point)

En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = x^2 \cdot \ln(x) + 2 \quad , \quad x > 0.$$

Bestem en ligning for tangenten til grafen for f i punktet $P(1, f(1))$.

Bestem funktionens monotoniforhold.

Grafen for f afgrænser sammen med førsteaksen og linjerne med ligningerne $x = 1$ og $x = 3$ en punktmængde *M*, der har et areal.

Beregn ved hjælp af stamfunktioner arealet af *M*.

Opgave 5
(ca. 15 point)

Om en eksponentielt aftagende funktion $h(t)$ oplyses, at

$$h(0{,}25) = 80 \text{ og } h(10) = 20.$$

Bestem en forskrift for $h(t)$.

I en model for en bestemt type slanger antages det, at en slanges længde l (målt i cm) er en funktion af slangens alder t (målt i år) givet ved

$$l(t) = 120 - h(t).$$

Benyt modellen til at bestemme en slanges længde, når dens alder er 15 år.

I modellen er en slanges vægt w (målt i gram) som funktion af længden l givet ved

$$w(l) = 0{,}00034 \cdot l^3.$$

Bestem en slanges vægt, når dens alder er 25 år.

Opgave 6
(ca. 10 point)

Foto: J.P. Touborg

Når et isbjerg smelter, afhænger den mængde is, der smelter pr. tidsenhed, af isbjergets størrelse og form samt af de klimatiske forhold.
I en model for et bestemt isbjerg betegner M isbjergets masse, målt i ton, mens t betegner tiden, målt i døgn.
Det antages i modellen, at M som funktion af t opfylder differentialligningen

$$\frac{dM}{dt} = -0{,}2 \cdot M^{\frac{2}{3}}.$$

Bestem en forskrift for M som funktion af t, når det oplyses, at $M(0) = 600$.

Benyt modellen til at bestemme det tidspunkt, hvor isbjerget vejer 300 ton.

VEND!

Opgave 7a
(ca. 10 point)

En skål indeholder 8 røde og 5 blå kugler.
Uden tilbagelægning udtages på tilfældig måde en stikprøve på 3 kugler fra skålen.

Bestem sandsynligheden for, at der i denne stikprøve er netop 1 rød kugle.

Bestem sandsynligheden for, at der i denne stikprøve er højst 1 rød kugle.

Opgave 7b
(ca. 10 point)

For en bestemt population af fisk er populationens størrelse N, målt i antal fisk, en funktion af tiden t, målt i antal år. I en model antages det, at N er løsning til differentialligningen

$$\frac{dN}{dt} = 8 \cdot 10^{-8} \cdot N \cdot (5 \cdot 10^{6} - N).$$

Bestem den hastighed, hvormed populationens størrelse vokser til det tidspunkt, hvor populationens størrelse er $2 \cdot 10^{6}$.

Bestem en forskrift for N som funktion af t, når det oplyses, at $N(0) = 10^{6}$.

Kun én af opgaverne 7a og 7b må afleveres til bedømmelse