MATEMATISK LINJE
1-ÅRIGT FORLØB TIL A-NIVEAU

MATEMATIK

DELPRØVEN UDEN HJÆLPEMIDLER

Torsdag den 22. maj 2008 kl. 9.00-10.00

BESVARELSEN AFLEVERES KL. 10.00

Der tildeles i alt ca. 25 point

Eksamenssæt fra Færøerne

Opgave 1
(ca. 25 point)

a) Beregn integralet $\int_{-1}^{1}(6x^2 + 4x)\,dx$.

b) I et koordinatsystem i planen er to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ bestemt ved

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} t \\ 10 \end{pmatrix} \text{ og } \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ t+3 \end{pmatrix},$$

hvor t er et tal.

Bestem t, så $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er parallelle.

Bestem for $t = 3$ arealet af det parallelogram, som udspændes af $\vec{a}$ og $\vec{b}$.

c) I et koordinatsystem i rummet er en kugle bestemt ved ligningen

$$x^2 + 6x + y^2 - 8y + z^2 = 0.$$

Bestem kuglens radius og koordinatsættet til dens centrum.

VEND!

d) En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = \frac{1}{x} + 8x^3 \;, \quad x > 0 \,.$$

Bestem til f den stamfunktion F, hvis graf går gennem punktet $P(1,10)$.

e) En linje l er givet ved parameterfremstillingen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 7 \\ 21 \end{pmatrix} \;, \quad t \in \mathbb{R} \,.$$

Bestem en ligning for l.

f) Undersøg, om funktionen

$$f(x) = \mathrm{e}^x + x^2$$

er en løsning til differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} - y = 2x - x^2 \,.$$

Besvarelsen afleveres kl. 10.00

MATEMATISK LINJE
1-ÅRIGT FORLØB TIL A-NIVEAU

MATEMATIK

DELPRØVEN MED HJÆLPEMIDLER

Torsdag den 22. maj 2008 kl. 9.00-13.10

Kun én af opgaverne 6a og 6b må afleveres til bedømmelse

Der tildeles i alt ca. 75 point

Opgave 2
(ca. 15 point)

I et koordinatsystem i rummet er givet punktet $A(2,3,2)$ og vektoren $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Bestem en ligning for den plan α, der indeholder punktet A, og som har $\vec{n}$ som normalvektor.

Bestem radius i den kugle K, der har centrum i punktet $P(-1,-3,2)$, og som tangerer planen α.

Beregn koordinatsættet til α's røringspunkt med K.

En linje l har parameterfremstillingen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -10 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Beregn afstanden fra P til l.

VEND!

Opgave 3 I et koordinatsystem i planen er tre vektorer $\vec{u}$, $\vec{v}$ og $\vec{c}$ givet ved
(ca. 15 point)

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \;,\quad \vec{v} = \begin{pmatrix} -5 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{c} = \vec{u} - \vec{v} \;.$$

Beregn koordinatsættet til hver af vektorerne $\vec{c}$ og $\hat{\vec{c}}$.

Beregn vinklen mellem $\vec{c}$ og $\vec{u}+\vec{v}$.

To vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er bestemt ved, at

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{c} \quad \text{og} \quad \vec{a} + \vec{b} = \hat{\vec{c}} \,.$$

Gør rede for, at vektorerne $\vec{a}$ og $\vec{b}$ står vinkelret på hinanden og har samme længde.

Opgave 4 Øl med temperaturen 25°C sættes ind i et køleskab, hvor temperaturen er 5°C.
(ca. 15 point)

Øllets temperatur $f(t)$, målt i °C, er en funktion af tiden t, målt i minutter efter øllets placering i køleskabet. Det oplyses, at f er løsning til en differentialligning af typen

$$\frac{dy}{dt} = 5a - ay \,.$$

Det oplyses yderligere, at $f(0) = 25$ og $f(75) = 15$.

Bestem en forskrift for f.

Bestem, hvor lang tid der går fra øllets placering i køleskabet, til øllets temperatur er 10°C.

Bestem $f'(75)$, og giv en fortolkning af dette tal.

Kilde: *Politiken*, 1. *juli* 2006.

Opgave 5
(ca. 15 point)

En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = 3\sqrt{x}, \quad x \geq 0.$$

Grafen for f og koordinatsystemets førsteakse afgrænser sammen med linjerne med ligningerne $x = 1$ og $x = \frac{9}{2}$ en punktmængde M, der har et areal.

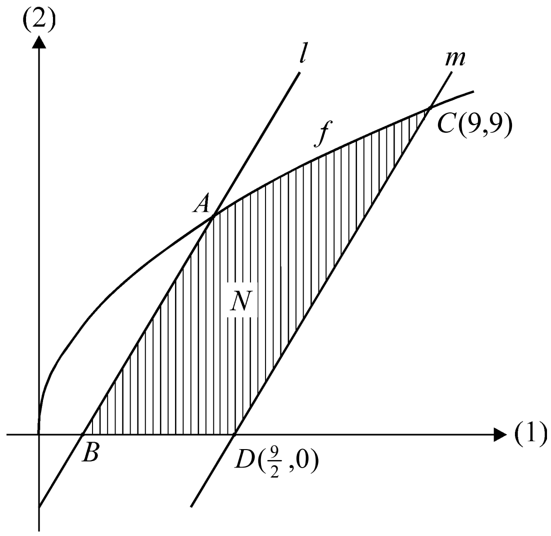
Beregn ved hjælp af stamfunktioner arealet af M.

Linjen l med ligningen $y = 2x - 2$ skærer grafen for f i et punkt A og førsteaksen i et punkt B.

Bestem koordinatsættet til hvert af punkterne A og B.

Linjen m med ligningen $y = 2x - 9$ skærer grafen for f i punktet $C(9,9)$ og førsteaksen i punktet $D(\frac{9}{2},0)$. Grafen for f og førsteaksen afgrænser sammen med linjerne l og m en punktmængde N, der har et areal.

Bestem arealet af N.



VEND!

Opgave 6a
(ca. 15 point)

I et koordinatsystem i planen er en kurve givet ved parameterfremstillingen

$$\begin{aligned} x &= t^2 + 2t - 8 \\ y &= 1 - t^2 \end{aligned} \quad , \quad t \in \mathbb{R} .$$

Beregn koordinatsættet til hvert af de fire punkter, hvori kurven skærer en af koordinatsystemets akser, og skitsér kurven.

Beregn koordinatsættet til det punkt, hvori kurvens tangent er parallel med koordinatsystemets førsteakse.

Kurven og koordinatsystemets førsteakse afgrænser i anden kvadrant en punktmængde M, der har et areal.

Beregn ved hjælp af stamfunktioner arealet af M.

Opgave 6b
(ca. 15 point)

En funktion f er løsning til differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = 2(x+1)\sqrt{y} \quad ,$$

og grafen for f går gennem punktet $P(2,9)$.

Bestem en ligning for tangenten til grafen for f i punktet P.

Bestem forskrift og definitionsmængde for f.

Kun én af opgaverne 6a og 6b må afleveres til bedømmelse