STUDENTEREKSAMEN MAJ-JUNI 2010 **2010-8-1**

MATEMATISK LINJE
1-ÅRIGT FORLØB TIL A-NIVEAU

MATEMATIK

DELPRØVEN MED HJÆLPEMIDLER

Onsdag den 26. maj 2010 kl. 9.00-13.10

Kun én af opgaverne 6a og 6b må afleveres til bedømmelse

Der tildeles i alt ca. 75 point

Eksamenssæt fra Færøerne

Opgave 2
(ca. 15 point)

I et koordinatsystem i planen er to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ bestemt ved

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ og } \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Beregn arealet af parallelogrammet udspændt af $\vec{a}$ og $\vec{b}$.

Beregn koordinatsættet til projektionen af $\vec{a}$ på $\vec{b}$.

Beregn den værdi af tallet s, for hvilken vektorerne $\vec{a} + s\vec{b}$ og $\vec{a}$ er ortogonale.

VEND!

Opgave 3 (ca. 15 point)

I et koordinatsystem i rummet er en plan α givet ved ligningen

$$3x - y + z = 32,$$

og en linje l har parameterfremstillingen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathrm{R}.$$

Beregn den spidse vinkel mellem l og α.

Beregn koordinatsættet til skæringspunktet P mellem l og α.

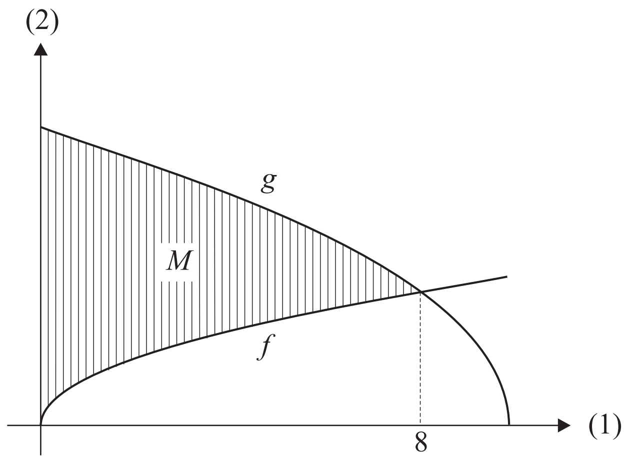
Bestem en ligning for den plan β, der indeholder l og punktet $Q(1,2,3)$.

Opgave 4 (ca. 15 point)

To funktioner f og g er givet ved

$$f(x) = \sqrt{x}$$
$$g(x) = \sqrt{40-4x}\,.$$

Graferne for de to funktioner afgrænser sammen med koordinatsystemets andenakse et område M, der har et areal.



Beregn ved hjælp af stamfunktioner arealet af M.

Bestem rumfanget af det omdrejningslegeme, der fremkommer, når M drejes 360° om koordinatsystemets førsteakse.

Opgave 5
(ca. 15 point)

En funktion f er løsning til differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x-7}{2y} \quad ,$$

og grafen for f går gennem punktet $P(5,1)$.

Bestem en ligning for tangenten til grafen for f i punktet P.

Bestem forskrift og definitionsmængde for f.

Opgave 6a
(ca. 15 point)

I et koordinatsystem i planen bevæger et punkt $P(x, y)$ sig, således at der til tidspunktet t gælder

$$\begin{aligned} x &= 3\ln t - 1 \\ y &= -t^2 + 4t - 3 \end{aligned} \quad , \quad t > \tfrac{1}{2} .$$

Beregn de værdier af tallet t, for hvilke banekurven skærer koordinatsystemets førsteakse.

Skitsér banekurven.

Bestem hastighedsvektoren til tidspunktet $t = 1$.

Banekurven afgrænser sammen med førsteaksen en punktmængde M, der har et areal.

Bestem arealet af M.

Opgave 6b
(ca. 15 point)

Antallet af individer i en population kan beskrives ved en funktion N, således at $N(t)$ er antallet af individer til tiden t, hvor t angives i døgn. Det antages, at N er en løsning til differentialligningen

$$\frac{dN}{dt} = 3{,}4 \cdot 10^{-5} \cdot N \cdot (1024 - N),$$

og at der til tidspunktet $t = 0$ er 200 individer i populationen.

Bestem en forskrift for N.

Bestem $\lim_{t \to \infty} N(t)$.

Bestem det tidspunkt, hvor væksthastigheden er størst.

Kun én af opgaverne 6a og 6b må afleveres til bedømmelse