STUDENTEREKSAMEN NOVEMBER-DECEMBER 2007 **2007-8-1V**

MATEMATISK LINJE
1-ÅRIGT FORLØB TIL A-NIVEAU

MATEMATIK

DELPRØVEN UDEN HJÆLPEMIDLER

Onsdag den 12. december 2007 kl. 9.00-10.00

BESVARELSEN AFLEVERES KL. 10.00

Der tildeles i alt ca. 25 point

Eksamenssæt fra Færøerne

Opgave 1
(ca. 25 point)

a) I et koordinatsystem i planen er to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ bestemt ved

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4+t \end{pmatrix} \text{ og } \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1-t \end{pmatrix},$$

hvor t er et tal.

Bestem den værdi af t, for hvilken $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er parallelle.

Bestem de værdier af t, for hvilke $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er ortogonale.

b) I et koordinatsystem i planen bevæger et punkt $P(x,y)$ sig, således at der til tidspunktet t gælder

$$\begin{matrix} x = t^3 - 3t \\ y = t \end{matrix} \quad , \quad t \in \mathbb{R}.$$

Beregn koordinatsættet til hvert af banekurvens skæringspunkter med andenaksen.

Beregn længden af hastighedsvektoren til tidspunktet $t = 2$.

VEND!

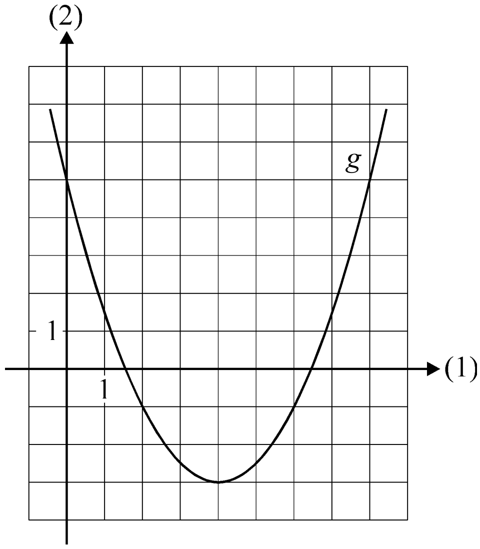
c) Gør rede for, at funktionen

$$f(x) = 4 + 3e^{2x}$$

er en løsning til differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = 2y - 8.$$

d)



Funktionen g, hvis graf er tegnet på figuren, er en stamfunktion til funktionen f.

Bestem $\int_2^8 f(x)\,dx$.

e) I et koordinatsystem er en kugle bestemt ved

$$x^2 - 2x + y^2 + 6y + z^2 - 4z - 11 = 0.$$

Det oplyses, at punktet $P(4,1,2)$ ligger på kuglen.

Bestem en ligning for kuglens tangentplan i P.

Besvarelsen afleveres kl. 10.00

STUDENTEREKSAMEN NOVEMBER-DECEMBER 2007 **2007-8-1V**

MATEMATISK LINJE
1-ÅRIGT FORLØB TIL A-NIVEAU

MATEMATIK

DELPRØVEN MED HJÆLPEMIDLER

Onsdag den 12. december 2007 kl. 9.00-13.10

Kun én af opgaverne 6a og 6b må afleveres til bedømmelse

Der tildeles i alt ca. 75 point

Opgave 2
(ca. 15 point)

Om to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ gælder, at

$$|\vec{a}| = 5 \ , \ |\vec{b}| = 2 \ \text{ og } \ \vec{a} \cdot \vec{b} = 7{,}5.$$

Beregn vinklen mellem $\vec{a}$ og $\vec{b}$.

Beregn arealet af det parallelogram, der udspændes af $\vec{a}$ og $\vec{b}$.

Beregn tallet $\vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{b})$.

VEND!

Opgave 3 (ca. 15 point)

Bestem hvert af integralerne

$$\int 2x\cdot 3^{x^2}dx \quad , \quad \int 3x^2\cdot \ln x\, dx \quad \text{og} \quad \int \frac{2x^4-1}{x^2}\,dx .$$

Opgave 4 (ca. 15 point)

I et koordinatsystem i rummet er to linjer l og m bestemt ved parameterfremstillingerne

$$l: \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad , \quad t \in \mathrm{R}$$

$$m: \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \quad , \quad s \in \mathrm{R}.$$

Gør rede for, at linjerne l og m skærer hinanden i punktet $P(0,5,2)$.

Bestem en ligning for den plan α, der indeholder linjerne l og m.

Beregn afstanden fra punktet $E(1,0,0)$ til planen α.

Beregn koordinatsættet til projektionen af vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ på linjen m.

Opgave 5 (ca. 15 point)

En funktion f er løsning til differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x(y^2+1)}{2y} \ ,$$

og grafen for f går gennem punktet $P(3,1)$.

Bestem en ligning for tangenten til grafen for f i P.

Bestem forskrift og definitionsmængde for f.

Opgave 6a
(ca. 15 point)

En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = x^2, \quad x \in \mathbb{R}.$$

For ethvert positivt tal a afgrænser linjen med ligningen $y = a$ og grafen for f en punktmængde M_a, der har et areal.

Bestem for $a = 4$ arealet af M_a.

Bestem a, så arealet af M_a er lig med 7.

Bestem for $a = 1$ rumfanget af det omdrejningslegeme, der fremkommer, når punktmængden M_a drejes 360° om linjen med ligningen $y = 1$.

Opgave 6b
(ca. 15 point)

I en model for bestanden af harer indenfor et bestemt område er antallet af harer $N(t)$ løsning til differentialligningen

$$\frac{dN}{dt} = k(600 - N),$$

hvor t er tiden i antal år, og k er en konstant. Det oplyses, at $N(0) = 300$ og $N(5) = 500$.

Bestem k.

Bestem væksthastigheden til tidspunktet $t = 5$.

Bestem antallet af harer til tidspunktet $t = 7$.

Kun én af opgaverne 6a og 6b må afleveres til bedømmelse