MATEMATISK LINJE
1-ÅRIGT FORLØB TIL A-NIVEAU

MATEMATIK

DELPRØVEN UDEN HJÆLPEMIDLER

Torsdag den 14. august 2014 kl. 9.00-10.00

BESVARELSEN AFLEVERES KL. 10.00

Der tildeles i alt ca. 25 point

Opgave 1
(ca. 25 point)

a) I et koordinatsystem i planen er to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ bestemt ved

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1+t \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6-2t \end{pmatrix} \;, \quad t \in \mathbb{R} \;.$$

Beregn den værdi af t, for hvilken $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er ortogonale.

Beregn for $t = -3$ koordinatsættet for vektoren $2\vec{a} + \vec{b}$.

b) I et koordinatsystem i rummet er en kugle bestemt ved ligningen

$$x^2 + 2x + y^2 - 6y + z^2 = 15 \;.$$

Bestem kuglens radius og koordinatsættet til dens centrum.

VEND!

c) I et koordinatsystem i planen bevæger et punkt $P(x, y)$ sig, således at der til tidspunktet t gælder

$$\begin{aligned} x &= t^2 - 5t + 6 \\ y &= t^3 - 2t \end{aligned} \quad , \quad \text{hvor } t \in \mathrm{R} \ .$$

Bestem hastighedsvektoren i det punkt på banekurven, der svarer til tidspunktet $t = 2$.

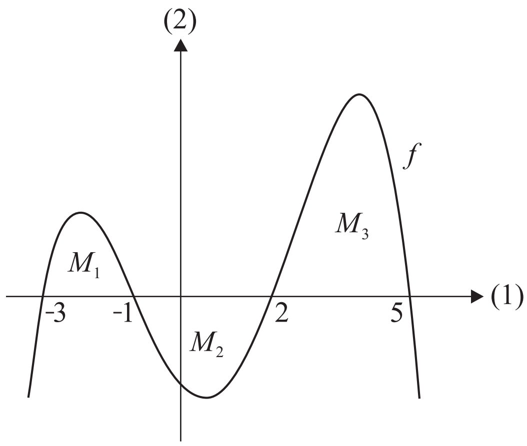
d) Funktionen f er en løsning til differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = 2x + 3y \ ,$$

og grafen for f går gennem punktet $P(2,1)$.

Bestem en ligning for tangenten til grafen for f i punktet P.

e)



Figuren viser grafen for en funktion f. Grafen for f afgrænser sammen med førsteaksen tre punktmængder M_1, M_2, og M_3. Det oplyses, at arealerne af M_1 og M_2 er henholdsvis 38 og 69, og at $\int_{-3}^{5} f(x)\,dx = 102$.

Bestem $\int_{-1}^{5} f(x)\,dx$.

Bestem arealet af M_3.

Besvarelsen afleveres kl. 10.00

MATEMATISK LINJE
1-ÅRIGT FORLØB TIL A-NIVEAU

MATEMATIK

DELPRØVEN MED HJÆLPEMIDLER

Torsdag den 14. august 2014 kl. 9.00-13.10

Kun én af opgaverne 6a og 6b må afleveres til bedømmelse

Der tildeles i alt ca. 75 point

Opgave 2
(ca. 15 point)

I et koordinatsystem i planen er to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ givet ved

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} t \\ t^2 - 3t + 6 \end{pmatrix} ,$$

hvor t er et tal.

Beregn for $t = 2$ arealet af det parallelogram, der udspændes af $\vec{a}$ og $\vec{b}$.

Beregn for $t = 2$ koordinatsættet til projektionen af $\vec{a}$ på $\vec{b}$.

Beregn de værdier af tallet t, for hvilke $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er parallelle.

VEND!

Opgave 3 (ca. 15 point)

I et koordinatsystem i rummet er der givet et punkt $A(2,4,3)$ og en plan α med ligningen

$$2x + y - 2z = 10\,.$$

Bestem en ligning for den plan β , der indeholder punktet A, og som er parallel med α .

Beregn afstanden mellem α og β .

En linje l har parameterfremstillingen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \;,\quad t \in \mathrm{R}\,.$$

Vis, at A ligger på l, og beregn koordinatsættet til skæringspunktet mellem α og l.

Beregn vinklen mellem α og l.

Opgave 4 (ca. 15 point)

I en model for torsk på Færøbanken er længden af en torsk en funktion af torskens alder. Funktionen tilfredsstiller differentialligningen

$$\frac{dL}{dt} = 44 - 0{,}3736 \cdot L\,, \quad t > 2\,,$$

hvor L angiver torskens længde målt i cm, og t angiver torskens alder målt i år.
Det oplyses, at $L(3) = 70$.

Bestem en forskrift for L som funktion af t.

Beregn torskens alder, når dens længde er 100 cm.

Bestem $\lim\limits_{t \to \infty} L(t)$, og giv en fortolkning af dette tal.

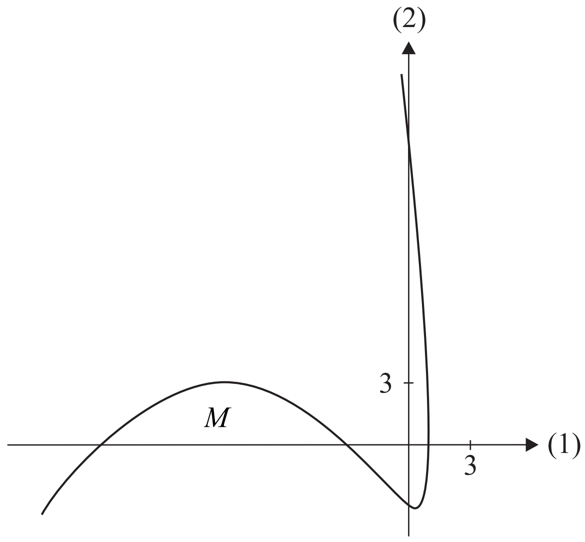
Kilde: *http://www.setur.fo/uploads/tx_userpubrep/ Seminar_Hvorfor_vokser_torsken_hurtigeru_pa_Farobanken_end_Faroeplateauer.pdf*

Opgave 5 (ca. 15 point)

Benyt stamfunktioner til at beregne hvert af integralerne

$$\int_1^2 \left(\frac{2}{x} + 3x^2 \right) dx \quad , \quad \int_0^1 (x+2) \cdot \mathrm{e}^x \, dx \quad \text{og} \quad \int_0^1 (2x+1)^5 \, dx\,.$$

Opgave 6a
(ca. 15 point)



I et koordinatsystem i planen er en kurve givet ved parameterfremstillingen

$$x = -t^2 + 4t - 3, \quad y = t^3 - 4t \qquad , \quad t \in \mathbb{R}.$$

Beregn de værdier af tallet t, for hvilke kurven skærer førsteaksen.

Beregn koordinatsættet til det punkt på kurven, hvori kurvens tangent er parallel med andenaksen.

I anden kvadrant afgrænser kurven sammen med førsteaksen en punktmængde M, der har et areal.

Bestem arealet af M.

Opgave 6b
(ca. 15 point)

En funktion f er en løsning til differentialligningen

(*) $$y'' = -4y\,.$$

Bestem en forskrift for f, når det oplyses, at $f(0) = \sqrt{3}$ og $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Om en anden funktion g oplyses, at g også er en løsning til differentialligningen (*), og at grafen for g går gennem punktet $P\left(\frac{\pi}{4}, 3\right)$. Endvidere oplyses, at hældningskoefficienten for tangenten til grafen for g i punktet P er 2.

Bestem en forskrift for g.

Kun én af opgaverne 6a og 6b må afleveres til bedømmelse