Eksperimentel Matematik

En inspirationsbog

Eksperimentel Matematik

Matematiklærerforeningen

2007

© Matematiklærerforeningen, 2007

Udgivet af Matematiklærerforeningen med støtte fra Undervisningsministeriet.

Redaktion: Nynne Maria Afzelius, Morten Birk Christensen, Jes Sixtus Jørgensen, Olav Lyndrup, Ib Michelsen og Dennis Pipenbring.

Jørgen Dejgaard (Forlaget)

Omslag: Morten Birk Christensen

Tryk: Zeuner grafisk as, Odder

Salg: Matematiklærerforeningens bogsalg. Slotsgade 2, 3.sal, 2200 København N.

ISBN 87-90 996-27-5

Til bogen er der udarbejdet supplerende materiale der kan findes på uvmat.dk/XM. Dette materiale kan frit kopieres til egen brug.

Kopiering fra denne bog må kun finde sted på institutioner, der har indgået aftale med COPY-DAN og kun inden for de i aftalen nævnte rammer.

© *Rettighederne til de enkelte bidrag inkl. illustrationer tilhører de enkelte bidragydere.* Forfatterne overdrager alene rettigheder til tekst og til værket til forlaget i den godkendte form efter nærmere aftale. Overdragelsen omfatter alene den aftalte udgivelse. Forlaget kan ikke lade tekst og værket omarbejde og er ikke berettiget til at videreoverdrage nogen af de overdragne rettigheder helt eller delvist til andre. Forfatterne forbeholder sig ret til at ændre de supplerende materialer, de har stillet vederlagsfrit til rådighed. Aftalen forhindrer ikke forfatterne i at bruge deres egne bidrag i anden sammenhæng.

Andre illustrationer

[1] Janushoved, Andreas Alciato: *Emblemata*. Paris 1602

Forord

Denne bog udgør sammen med hjemmesiden uvmat.dk/XM/ det endelige produkt af et udviklingsprojekt om eksperimentel matematik (XM), som Matematiklærerforeningen søgte Undervisningsministeriet om i 2005 og fik bevilget i 2006.

Desuden har Matematiklærerforeningen ydet tilskud til bogens udgivelse.

Udviklingsprojektet er afledt af de nye læreplaner i matematik på både HF og i gymnasiet på alle niveauer. I disse læreplaner er begrebet eksperimentel matematik indført under didaktisk metode.

XM er et nyt begreb i gymnasiesammenhæng, så der er ved flere lejligheder stillet spørgsmål om, hvad XM er, og hvordan det skal praktiseres i undervisningen. I dette projekt har en gruppe lærere sat sig for at belyse emnet XM fra forskellige sider. Materialet i denne bog repræsenterer enkeltpersoners bud på, hvorledes matematikundervisning også kan foregå. Samtidig er det forhåbentligt startskuddet til en frugtbar debat om, hvordan vi som lærere på gymnasiale uddannelser kan videreudvikle vort fag.

Udviklingsprojektet startede med en seminardag den 24/5-2006 på Høje Tåstrup Gymnasium, hvor 30 personer deltog. Dagens program var med en første del, hvor H.C. Thomsen, Christian Thune, Steen Markvorsen, Poul Hjorth, Kristine Jess, Bjørn Felsager, Behrndt Andersen og Hans Vestergaard kom med oplæg. Efterfølgende var der diskussion i grupper og i plenum.

Vi takker alle, der deltog i det første seminar om eksperimentel matematik.

Næste skridt i udviklingsprojektet var et to dages seminar den 27/11 - 28/11 på Comwell i Roskilde. Der deltog 20 personer. De to dage var opdelt i oplæg, diskussion og det første arbejde med XM forløbsbeskrivelser.

Vi takker alle, der deltog i to dages seminaret.

Blandt deltagerne i to dages seminaret valgtes en redaktionsgruppe på seks personer. Redaktionsgruppen har i perioden december 2006 til april 2007 indsamlet og redigeret bidragene til denne bog. Redaktionsgruppen bestod af Nynne Maria Afzelius, Morten Birk Christensen, Jes Sixtus Jørgensen, Olav Lyndrup, Ib Michelsen og Dennis Pipenbring.

Vi takker Nynne Maria Afzelius, Berndt Andersen, Peter Trautner Brander, Morten Birk Christensen, Flemming Clausen, Søren Eilers, Lisbeth Fajstrup, Nils Fruensgaard, Steen Markvorsen, Poul Hjorth, Jes Sixtus Jørgensen, Olav Lyndrup, Ib Michelsen, Dennis Pipenbring, Kirsten Rosenkilde, H. C. Thomsen, Christian Thune, Julian Tosev, Hans Vestergaard og J. P. Ward. for bidragene til bogen.

Bogen er opdelt i to dele, hvor 1. del indkredser, hvad eksperimentel matematik kan være, og hvordan det kan praktiseres. 2. del består af en række forløbsbeskrivelser, der indeholder eksperimentel matematik. På hjemmesiden ligger bogens tekst og i mange tilfælde yderligere materiale til de enkelte forløbsbeskrivelser. Det kan dreje sig om lærermateriale, elevmateriale og -opgaver med videre. Materialet findes i flere formater, og kan derfor i mange tilfælde redigeres af læreren efter ønske.

Matematiklærerforeningen

Juni 2007

Olav Lyndrup

Indholdsfortegnelse

Forord.....5

1. del

Eksperimentel matematik som metode.....13
Et forsøg på karakterisering af XM.....21
Er eksperimentel matematik – matematik som fysikøvelser?.....27
License to Thrill.....35
At eksperimentere med matematik.....43

2. del

Generelt om forløbene.....49
Lav et gameshow til TV-Zero.....50
Sammensat differentiation.....52
Rette linjer.....54
Lige før stamfunktion.....56
Differentialkvotient.....58
Fingerregning.....61
Vingummibamsefabrikantspillet.....62
Tyngdekraften i din idræt.....64
Projekt vodkaklovn.....66

Statistik og spil – et historisk problem....68
Eulerlinjen eksperimentelt....70
Retvinklede trekanter med heltallige sider....72
Differentialkvotienter....74
Summer og integraler....76
Den bedste rette linje....78
Sierpinski spillet....80
Livredning....83
Brand....86
Solsikker....88
Trekanter....91
Minimer kabellængden....95
Funktioners parametre....98
Bilstatistik....100
Budget og regnskab....102
Anvendelse af differentialligninger....104
Stambrøker....106
Omkreds og Areal....108
Trekantsuligheden vha. Spaghetti....110
En eksperimentel tilgang til normalfordelingen....112
Klassisk plangeometri....114
En eksperimentel tilgang til parablen....116
Figentræet....118
Opinionsundersøgelser....120
Buffon problemet....122

1. del

Eksperimentel matematik som metode

Morten Birk Christensen, Olav Lyndrup og Dennis Pipenbring

Eksperimentel matematik som metode

Morten Birk Christensen, Oure Kostgymnasium, mbc@oure.dk
Olav Lyndrup, Nykøbing Katedralskole, olav.lyndrup@skolekom.dk
Dennis Pipenbring, Metropolitanskolen, dp@metropolitanskolen.dk

Den eksperimentelle matematik fremhæves i de nye læreplaner som et didaktisk princip, der bør anvendes i undervisningen. Den foreliggende idebog forsøger at hjælpe og at give ideer til at få dette ført ud i praksis. I læreplanen (her for stx) står:

> "*Gennem en eksperimenterende tilgang til matematiske emner, problemstillinger og opgaver, skal elevernes matematiske begrebsapparat og induktive evner udvikles. Dette sker blandt andet ved at tilrettelægge nogle forløb induktivt, så eleverne får mulighed for selvstændigt at formulere formodninger ud fra konkrete eksempler.*"

Læreplanen understreger, at den eksperimentelle tilgang ikke kan stå alene som undervisningsprincip. Der ønskes en vekselvirkning mellem, at eleverne selv eksperimenterer og prøver sig frem, og at læreren andre gange deduktivt viser og demonstrerer de matematiske metoder.

> "*Det eksperimentelle element i matematik kan ikke stå alene. Derfor skal udvalgte emneforløb tilrettelægges, så eleverne får en klar fornemmelse for bevisets betydning i matematisk teori*"

Matematikundervisningen kan derfor ses som et janushoved, hvor den eksperimentelle tilgang går hånd i hånd med den logiske og deduktive. De er to sider af samme sag.

Matematikken præsenteres via arbejdsmetoden, som den professionelle matematiker anvender i udviklingen af matematikken; den induktive og eksperimentelle tilgang.

Matematikkens landvindinger, præsenteres systematisk, logisk og deduktivt; Matematik er et resultatet af matematikernes arbejde gennem tiden. [1]

Undervisningen skal udvikle evner, så man viser og fremmer sans for intuition og forståelse for det matematiske begrebsapparat. Sætninger opstår ikke bare af sig selv, men ved at prøve sig frem og ved at eksperimentere, opdager matematikeren sammenhænge som til sidst bliver så overbevisende, at de er værd at bevise. Lad os i næste afsnit se nærmere på matematikerens arbejdsmetode.

Set fra en række matematikere igennem tiden

Traditionelt fremhæves Gauss som den, der om nogen eksperimenterede sig frem. Vi vil imidlertid tage afsæt i nogle andre kilder til at indfange, hvad den matematiske eksperimenterende tilgang bygger på.

I bogen "Mathematics and plausible reasoning", Volume 1 af G. Polya fra 1954 citerer G. Polya fra Eulers Opera Omnia, ser. 1, vol. 2, p. 459:

> "*It will seem not a little paradoxical to ascribe a great importance to observations even in that part of mathematical sciences which is usually called Pure Mathematics, since the current opinion is that observations are restricted to physical objects that make*

1 Janushovedet er gengivet fra Andreas Alciato: *Emblemata*. Paris 1602. (Det Kongelige Bibliotek, http://www2.kb.dk/elib/mss/skatte/f3_bib/178_3_9.htm)

impression on the senses. As we must refer the numbers to the pure intellect alone, we can hardly understand how observations and quasi-experiments can be of use in investigating the nature of numbers …"

Vi ser her, at Euler bla. bruger begrebet kvasi eksperimenter i forbindelse med matematikerens arbejdsmetode og det er åbenbart i modsætning til den daværende opfattelse af den rene matematik.

G. Polya skelner selv i forordet til bogen mellem "*demonstrative reasoning*" og "*plausible reasoning*", hvor "demonstrative reasoning" er det eller de argumenter som vi anvender, når vi opstiller beviser for matematiske sætninger. "*Plausible reasoning*" er det eller de argumenter, der støtter os, når vi eksperimenterer og opstiller formodninger. G. Polya anviste selv en metode til arbejde med "plausible reasonning". Nemlig ved "I address myself to all interested students of mathematics of all grades and I say: Certainly, let us learn proving, but also *let us learn guessing*." [2]

Vi kan måske ud fra G. Polya beskrive eksperimentel matematik, som en arbejdsmetode, hvor vi lærer eleverne at gætte kvalificeret om matematik.

Senere i 2004 udkom bogen "Mathematics by Experiment" af Jonathan Borwein og David Bailey. Undertitlen på bogen er "Plausible reasoning in the 21st Century". Undertitlens mulige reference til G. Polya underbygges i forordet, hvor "Mathematical Discovery: On Understanding, Learning and Teaching Problem Solving" fra 1968 af G. Polya citeres. "Mathematics by Experiment" indeholder avancerede

2 G. Polya: *Mathematics and plausible reasoning.* Volume 1, Preface side V-VI, 1954.

eksempler på, hvordan matematikere eksperimenterer i det laboratorium eller de laboratorier, som computerprogrammer i matematik har skabt.

Med afsæt i disse værker af en række professionelle matematikere illustreres det, at eksperimentel matematik kan opfattes som en arbejdsmetode, der består i at gætte kvalificeret. En brug af sund fornuft, der får én til at tro, at en given tilgang kunne føre til noget meningsfyldt. Det er denne tilgang, som det eksperimentelle undervisningsprincip forsøger at indfange. Nutidige matematikere anvender i høj grad computerprogrammer som værktøj til at gætte. Derfor er det nærliggende at anvende dette redskab til eksperimenterende undervisning.

Set fra didaktikere

Vi har set, at eksperimenterende tilgange er matematikerens arbejdsmetode. Men kan dette anvendes som didaktisk princip for tilrettelæggelse af undervisningen? Denne bog og idekatalog er et bud på, at det er meningsfuldt, og at mange matematikundervisere i dag i stor stil anvender en eksperimentel indgang til stoffet.

En matematikundervisning, hvor eleverne bliver aktiveret i og med, at de skal gøre noget for at opdage sammenhænge, er den typiske induktive og eksperimenterende form. Dette tager både afsæt i en erfaringsbaseret anskuelse af læring, hvor parolen er "learning by doing" og en mere socialkonstruktivistisk anskuelse, hvor viden og erkendelse opnås ved dialog og pragmatisk løsning af problemstillinger. Den gode eksperimentelle undervisning tager derfor typisk afsæt i det, som Wolfgang Klafki kalder handlingsorienteret undervisning, samtidigt med at det er vigtigt at opbygge og kombinere undervisning ud fra de tanker, Lev Vygotsky kalder nærmeste udviklingszone. For hvis de eksperimentelle forløb ikke er i zonen for den nærmeste udvikling, så vil eleverne ikke være i stand til at tage fat på problemet. Det er meningen at eleverne selv skal arbejde med problemstillingerne. Om problemstillingerne er lukkede (med en fast konklusion / resultat) eller om de er åbne, er ikke så vigtigt, fordi det

er i selve arbejdet med problemstillingerne, at eleverne lærer handlingsorienteret undervisning.

Flere matematiske didaktikere efterlyser den eksperimenterende kompetence som noget centralt, for at matematikken som fag kan udvikle sig. F.eks.udtrykkes dette ved programerklæringen for tidsskriftet *Experimental Mathematics* (se Søren Eilers *Eksperimentel matematikundervisning*, Faglig sidefagssupplering i matematik 2006.*)*

> "*Experiment has always been, and increasingly is, an important method of mathematical discovery. (…) Yet this tend to be concealed by the tradition of presenting only elegant, well-rounded and rigorous results.*
>
> *While we value the theorem-proof method of exposition, and do not depart from established view that a result can only become part of mathematical knowledge once it is supported by a logical proof, we consider it anomalous that an important component of the process of mathematical creation is hidden from public discussion. It is to our loss that most of us in the mathematical community are almost always unaware of how new results have been discovered*."

Den eksperimentelle matematik kan optræne i en tilgang til at forstå og forholde sig til matematikken, på den måde matematikken er skabt. Af mange opfattes dette som ny og anderledes måde at lære matematik på, til trods for at det er den matematiske metodik.

Den eksperimentelle måde at lære på bør anspore eleverne til selv at opdage og se sammenhænge i matematikkens logiske verden. Eleverne trænes i at stille spørgsmålstegn til det eksisterende og give plads til egne kreative tanker. Man kunne håbe på, at eleverne bedre tilegner sig forståelsen for, hvordan de eksisterende matematiske metoder er fremkommet, og at de samtidig ser det smarte ved disse metoder. Dette samtidig med at de opdager, at det er muligt, at se nye veje i

matematikkens univers. Dette er nogle af fordelene ved eksperimentel matematikundervisning; en undervisning der er kendetegnet ved at arbejde med kvalificeret gæt og intuition, som vi så, var den professionelle matematikers arbejdsmetode.

Hvad karakteriserer eksperimentel matematik?

Nynne Maria Afzelius og Julian Tosev

Et forsøg på karakterisering af XM

Nynne Maria Afzelius, Nørre Gymnasium, nynnemaria@12move.dk
Julian Tosev, Frederiksberg Gymnasium, julian@tosev.dk

En klar definition på, hvad eksperimentel matematik er, er ikke umiddelbart til at finde. Men der findes forskellige bud på at indfange den. På nettet findes en række beskrivelser, men der hersker hverken på nettet eller i litteraturen enighed om, præcis hvad eksperimentel matematik er. Interesserede kan nederst finde henvisninger til en række materialer og links, hvor man kan læse videre. Mange af de definitioner der angives, stiller computeren centralt i arbejdet . Der eksisterer dog en række fælles egenskaber ved de forskellige beskrivelser af den eksperimentelle matematik, som kan indsnævres til fire punkter: Kreativitet, erfaringsdannelse, matematiske objekter og "bevis og falsifikation". Disse fire punkter udgør tilsammen en karakterisering af den eksperimentelle matematik - det skal dog ikke opfattes som en egentlig definition, men mere som en beskrivelse af visse karakteristika ved området.

Kreativitet

En vigtig egenskab ved eksperimentel matematik er den store fokus på elevens kreativitet og elevens egne indfaldsvinkler til matematiske problemer. Udforskning, leg og afprøvning bliver stillet helt centralt, så eleven får erfaring med at anvende flere løsningsmetoder til et matematisk problem og dermed ikke kun arbejder med én given løsningsmodel. Det er et mål, at eleven udvikler og finder egne fremgangsmetoder til at løse opgaver, f.eks. gennem induktive forløb. Dermed bliver eleven i stand til at formulere generelle matematiske betragtninger om en given problemstilling. Fremgangsmåderne skal udvikles på baggrund af viden, som eleverne allerede har, og derfor er det nødvendigt, at eleven på forhånd har matematisk erfaring med et emne.

En udfordring for mange lærere er at acceptere en kreativ proces, hvor eleven har ret til at lave fejl og prøve sig frem. Historien om en psykologiprofessor, der ville undersøge den professionelle matematikers arbejdsmetode, illustrerer dette. Psykologiprofessoren satte en højt respekteret matematiker til at løse et problem. Matematikeren skrev nogle ting ned, viskede noget ud, skrev noget nyt, viskede ud og til sidst vidste han et resultat. Psykologiprofessoren ville, at han ikke viskede noget ud. Professoren var lige så meget interesseret i det, der ikke var rigtigt. Det var jo det, der viste vejen til at nå målet. Der er alt for ofte en for stærk adskillelse mellem matematikerens kreative proces og fremvisningen af det færdige produkt. I arbejdet med den eksperimentelle matematik skal man være villig til at give rum og plads til processen og den kreative udfoldelse; uanset om eleverne starter langt fra målet.

Erfaringsdannelse

Gennem arbejdet med eksperimentel matematik er det et fundamentalt mål, at eleven bliver i stand til at opdage mønstre og sammenhænge i matematikken. Denne opdagelse bliver mulig gennem erfaring, da dette giver overblik og kontrol med det matematiske emne, og derved bliver eleven i stand til at finde både mønstre og sammenhænge i matematikken. Disse mønstre og sammenhænge kan desuden optræde i flere repræsentationer, f.eks. både algebraisk og geometrisk. Formålet med erfaringsdannelsen er at opnå matematisk indsigt og intuition vha. eksperimentel matematik. Denne matematiske indsigt og intuition kan f.eks. hjælpe en med at angribe et matematisk problem på en ny måde. Det er f.eks. beskrevet i Leone Burtons bog "Mathematicians as Enquirers: Learning about Learning" (Burton, 2004)

Matematiske objekter

Da de matematiske objekter ikke umiddelbart er til at tage og føle på, bliver man nødt til at beskæftige sig med dem gennem forskellige repræsentationer. Det er en pointe i den eksperimentelle matematik, at

man arbejder med de matematiske objekter på en række forskellige måder. Her kommer blandt andet computeren eller lommeregneren ind i billedet, idet den gør det muligt at manipulere med objekter og afprøve ideer hurtigt og let. Dette gør objekterne til nogle størrelser, som kan undersøges på næsten samme måde, som det er gældende inden for de andre naturvidenskabelige fag – man kan konkret eksperimentere i matematik! Man kan også forestille sig, at man benytter materialer som pap, f.eks. til at undervise i proportionalitet ved hjælp af puslespils lignende opgaver.

Ved at lade eleverne arbejde med matematiske objekter, og ved at lade dem håndtere dem selv i et utal af forskellige situationer og repræsentationer, letter man processen med at personliggøre den matematiske viden

.

Bevis og falsifikation

Beviser har en central placering inden for matematikken. Inden for den eksperimentelle matematik er det et mål, at beviser ikke blot bliver udenadslære fra en bog, men at elever selv forsøger at finde hypoteser til påstande og dermed selv finder beviser. Dette kan ske ved at eleven begynder at se sammenhænge i matematikken, som kan afprøves og testes. Man kan komme med ideer og forslag til beviser eller ligefrem modbevise hypoteser. Falsifikation er netop denne proces, hvor man modbeviser - eller gendriver - et bevis eller en hypotese. Ideen med denne proces er, at elever prøver at komme med hypoteser, som dernæst bliver falsificeret, dette medfører forhåbentligt nogle bedre hypoteser, som så igen bliver falsificeret osv. Derved får eleven selv indflydelse på beviser og kan komme med egne indfaldsvinkler og hypoteser.

Helt generelt må man sige, at der i eksperimentel matematik er stor fokus på det induktive, kreative, afvekslende og selvstændige, som forhåbentlig kan være med til at motivere eleverne, og give dem en dybere forståelse for de matematiske objekter og samtidig give en

større interesse for faget. Som matematiker kan man have stor begejstring ved faget, og opleve mange forskellige facetter fascinerende ved netop matematik. Eksperimentel matematik kan være en af vejene til at vise eleverne, hvorfor matematik er det hele værd.

Yderligere litteratur

Interesserede læsere kan f.eks. fortsætte læsninger her:

Borwein, J. M.: *The Experimental Mathematician: The Pleasure of Discovery and the Role of Proof.* International Journal of Computers for Mathematical Learning 10, 75 – 108, 2005.

Burton, L.: *Mathematicians as Enquirers: Learning about Learning Mathematics*. Springer, 2004.

Skovsmose, Ole: *Landscapes of Investigation*, Roskilde University: Center for Research in Learning Mathematics, Pub. no. 20, 2000.

Grenier, Denise og Godot, Karine: *Research situations for teaching: a modelling proposal and example*, ICME 10, 2004.

Matematik
som
Fysikøvelser

Nils Fruensgaard

Er eksperimentel matematik – matematik som fysikøvelser ?

Nils Fruensgaard, Københavns åbne Gymnasium,
Nils.Fruensgaard@skolekom.dk

I fysikundervisningen har det været en tradition gennem en menneskealder at planlægge eksperimentelle øvelser med efterfølgende rapportskrivning. Alle gymnasielærere med en matematisk studentereksamen har været igennem de traditionelle 25-35 fysikøvelser med mere eller mindre vellykket rapportskrivning. Der har i de sidste hundrede år været et standardsæt af øvelser, som laves af eleverne i gymnasiet.

En del af matematikundervisningen kan tilrettelægges eksperimentelt efter samme mønster. Eleverne arbejder to og to med et forelagt matematisk problem, som undersøges eksperimentelt i fx to timer. Derefter udarbejdes en rapport, som rettes af læreren. Denne rapport vil have forskellig udformning afhængig af emnet for eksperimentet. På samme måde som fysik har en samling af apparatur, så kan matematik have sine hylder, hvor der står kasser med indhold til matematikeksperimenterne. Eleverne tager så en kasse frem og arbejder med indholdet i disse eksperimentelle timer.

Der kan fx arbejdes med følgende emner:

Møbiusbåndet

Eleverne får udleveret en kasse med papir, tape, saks, farvepenne og andre småting. Der udleveres en øvelsesvejledning om Møbiusbåndet, som omtaler, hvordan man kan tape og klippe, og eleverne noterer, hvad de ser. Efterfølgende kan eleverne skrive en rapport med fx klip fra internettet, egne fotos fra mobiler eller digitale kameraer. I

bogen *The heart of mathematics* [Bu, s. 344] beskrives masser af ideer og problemstillinger for arbejdet med topologien på Møbiusbåndet.

Terningerne

Ved tilrettelæggelsen af de eksperimentelle matematiske øvelser kan man ikke komme uden om en statistisk øvelse med kast med terninger. Fx vil en øvelse om summen af to terningers øjental være på et passende niveau. Her kan teorien beskrives, og eleverne kan forstå den, og man kan sammenligne teori og eksperiment. Der kan også udføres χ^2 - test [Ve, s.74] eller en anden test for sammenligning. Det eksperimentelle udstyr er jo bare nogle terninger, der ligger klar i en kasse.

Tallet π

Til det eksperimentelle udstyr i matematikundervisningen vil en af standardkasserne indeholde materialer til måling af π. Det drejer sig om målebånd og cirkelskiver til det klassiske eksperiment, hvor man måler diametre og omkredse af nogle cirkler. Hvis cirklerne er lavet af kraftig pap, kan man sætte mærke på dem, og så lade dem rulle en hel omgang eller flere på målebåndet. Man kan også lade eleverne selv finde runde ting at måle på. Databehandlingen kan ske i Excel med tegning af tendenslinje.

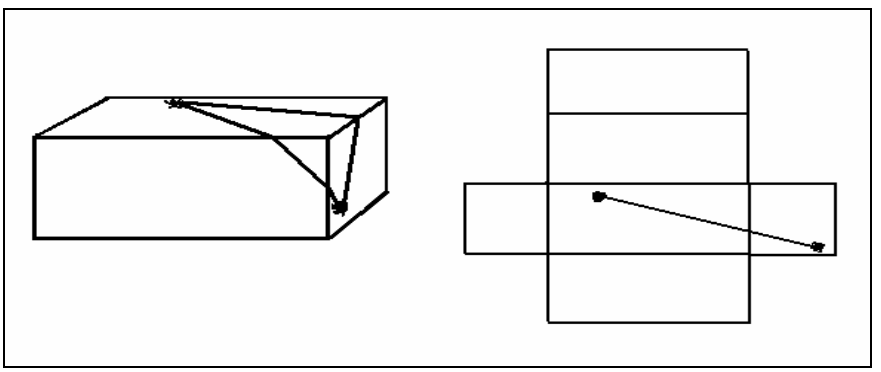
Den vitruvianske mand og mig selv

Har man et målebånd, så er alt klar til at måle hinandens højder, favnmål, navlehøjde, armlængder osv. De velkendte forhold stilles op, og nogle vil nærme sig det gyldne snit [Fe, s.10]. Som baggrund har eleverne hørt om noget af teorien bag tallet Φ, og hvordan det gyldne tal findes mange steder i naturen. Rapporten skal indeholde tabeller med målinger, udregnede forhold og kommentarer. Der må gerne være et

afsnit om Leonardo da Vincis teorier.

Den korteste vej på en kasse

Der udleveres en papkasse med forskellige sidelængder. Der afsættes to mærker tilfældigt på kassen, fx på to nabosider eller på modstående sider [Bu, s.291]. Med en snor skal der måles, hvor langt der er mellem de to mærker, hvis man måler på kassens sider. Er der flere veje mellem de to punkter, som giver samme afstand? Man kan fortælle eleverne, at en teori siger at den korteste vej vil være en ret linje, hvis man skærer kassen op langs kanterne og lægger den fladt. Et tilsvarende problem finder man ved at måle mindste afstande på en torus eller en kugle.



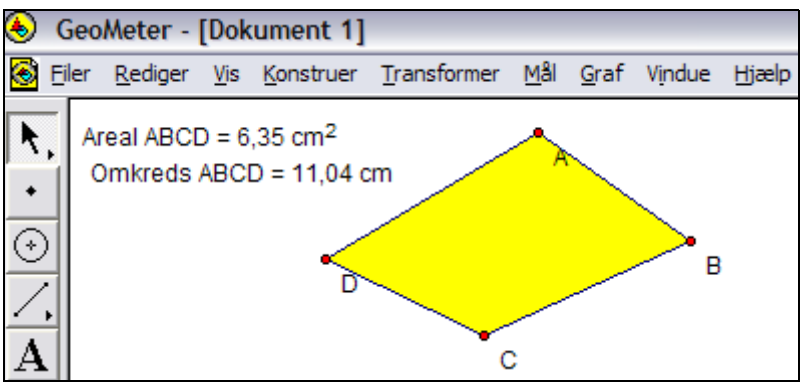
Formler i Excel

At lave formler i Excel, afprøve dem, rette i dem og få dem til at virke er en eksperimentel aktivitet. Man kan bede om at få opstillet formler som har karakter af funktionstabeller, hvor man har en x-søjle og en y-søjle. Der kan også opstilles formler, som er rekursive, hvor et tal i en søjle udregnes på basis af de forrige som fx Fibonacci-tallene. Der kan også stilles formler op, der afhænger af flere variable som fx opstilling af en saldo-tabel for en opsparing. Den eksperimentelle natur er her forskellig fra nogle af de andre eksempler, idet eleverne forsøger sig frem for at nå et bestemt mål, nemlig at deres regneark fungerer efter hensigten. Her er mere tale om en konstruktion end et ekspe-

riment, men arbejdsprocessen er eksperimentel, og hvis eleverne arbejder sammen to og to, vil der forgå en proces, hvor der udveksles formodninger, som afprøves og rettes og diskuteres i flere omgange, indtil man når frem til det endelige resultat.

Jeg er den største

I geometrien kan man også eksperimentere, selvom alle resultater kendes fra den deduktive opbygning. Derfor vil eksperimenterne



mere have form af et induktivt forløb mod de geometriske læresætninger. Men det skal ikke udelukke, at man benytter sig af den utrolige motivation, eleverne udviser gennem arbejdet med de dynamiske geometriprogrammer. En matematikøvelse, hvor man undersøger et geometrisk problem med PC vil være XM-relevant. Man kunne fx arbejde med problemet med at maksimere arealet af en firkant med fast omkreds på den måde, det skitseres i bogen "Jeg er den største" [Bj, s. 7]. Eleverne kan arbejde med Geometer eller gratisprogrammet Geogebra, som kan downloades eller køres interaktivt på nettet.

Opsamling

Ovenstående syv XM-øvelser er fremlagt som eksempler på aktiviteter, der har en eksperimentel karakter. Der er utallige muligheder for at stille øvelser op med statistisk indhold. Det kan være målinger af

bilers hastighed, random walk, møntkast osv. Man kan også låne eksperimenter fra fysik, hvor man kan lave databehandling og variabelsammenhænge i massevis. På samme måde som der i fysik har været krav om udførelsen af et bestemt antal øvelser, og at der til eksamen skal opgives et vist antal, så kan man i matematik som lærer sætte sig selv det mål, at man udfører fx tre øvelser per år med efterfølgende rapportskrivning. På den måde opfylder man bekendtgørelsens krav om at tilgodese den eksperimentelle tilgang – måske på et minimumsniveau, men det er jo et udmærket sted at starte.

XM i gymnasiet skal defineres bredt. Der skal være plads til klippe / klistre-eksperimenter med geometriske former, databehandling af små forsøg, statistiske undersøgelser med databehandling, konstruktioner med dynamiske geometriprogrammer og mange andre gode ideer. På den måde vil XM får karakter af både induktive forløb, konstruktionsopgaver og forsøg med ting og sager. XM skal gerne blive et vigtigt element i undervisningen og vise faget fra en ny side: XM skal motivere til, at man gerne må prøve sig frem i matematik og vise, at engagement og vilje til at deltage aktivt betyder noget for ens udbytte af undervisningen.

Referencer

[Bu]: Edward B. Burger, Michael Starbird: *The heart of mathematics*, Key Curriculum Press 2000.

[Fe]: Bjørn Felsager, o.a.: *Naturfag 1*, 2. udgave, Systime 1996.

[Ve]: Per Vejrup-Hansen: *Statistik med Excel*, Samfundslitteratur 2002.

[Bj]: Bjørn Felsager: *Jeg er den største*, Matematiklærerforeningen 2003.

XM@DTU

S. Markvorsen & P. G. Hjorth

License to Thrill

Steen Markvorsen, DTU, S.Markvorsen@mat.dtu.dk
P. G. Hjorth, DTU, P.G.Hjorth@mat.dtu.dk

Matematik 1

I begyndelsen af det tredje årtusind hedder på Danmarks Tekniske Universitet det indledende matematikkursus *Matematik 1: Lineære og Differentiable Strukturer*, kaldet MAT-1.

MAT-1 fylder ganske meget (15-20 ECTS, dvs. ca. 1/3) i første års studieplanen for alle ingeniørretninger, og det indkorporerer lineær algebra, differentialligninger, funktioner af flere reelle variable og vektoranalyse i et og samme kursus.

De studerende har derfor travlt. Hver uge introduceres konceptuelt nye emner med tilhørende opgaver og eksempler. Det er en udfordring under et sådant pensumpres at opretholde en interesse og nysgerrighed. En af de måder vi møder udfordringen er ved at introducere elementer af Eksperimentel matematik.

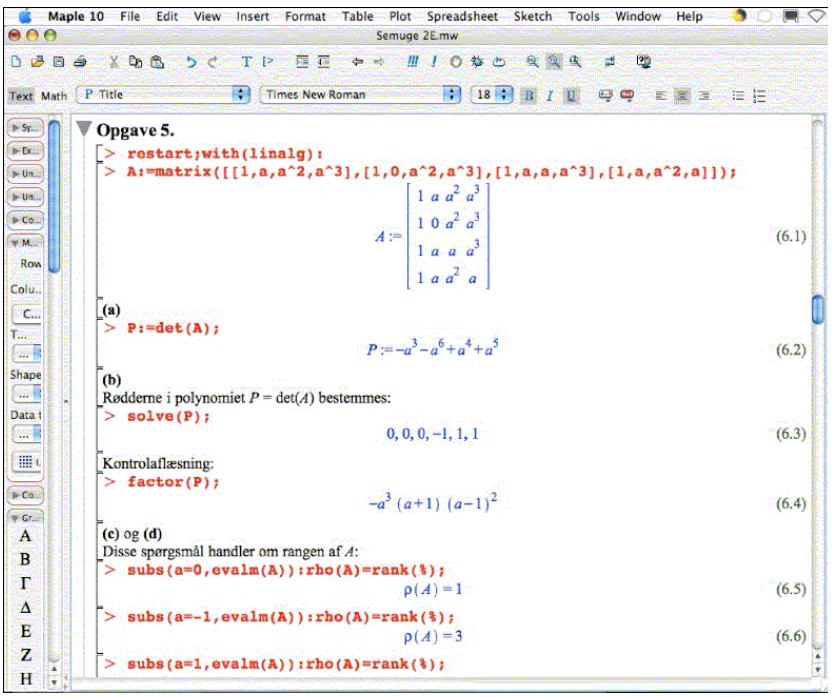
Det væsentligste hjælpemiddel hertil er matematikprogrammet MAPLE, et interaktivt grafisk og symbolsk matematikprogram. MAPLE har været på markedet i over 15 år. Programmets lærekurve er acceptabel – det er ikke fantastisk intuitivt, men vi oplever at især studerende, der i gymnasiet har benyttet andre symbolske programmer (fx MathCad eller lignende), er imødekommende over for den nogen gange lidt knudrede syntaks og tilegner sig den.

Den investering i tid, som bliver lagt i at lære de mest nødvendige MAPLE operationer, forsøger vi at genvinde ved udforskning og eksperimentering i de forskellige matematiske discipliner, som indgår i MAT-1.

1 Lineær algebra

Lineær algebra er på en gang velsignet af meget smukke strukturer,

men forbandet af konkrete beregninger, der er langsommelige lige så snart dimensionen af de indgående rum overstiger 3. Det problem er MAPLE i stand til at overkomme.



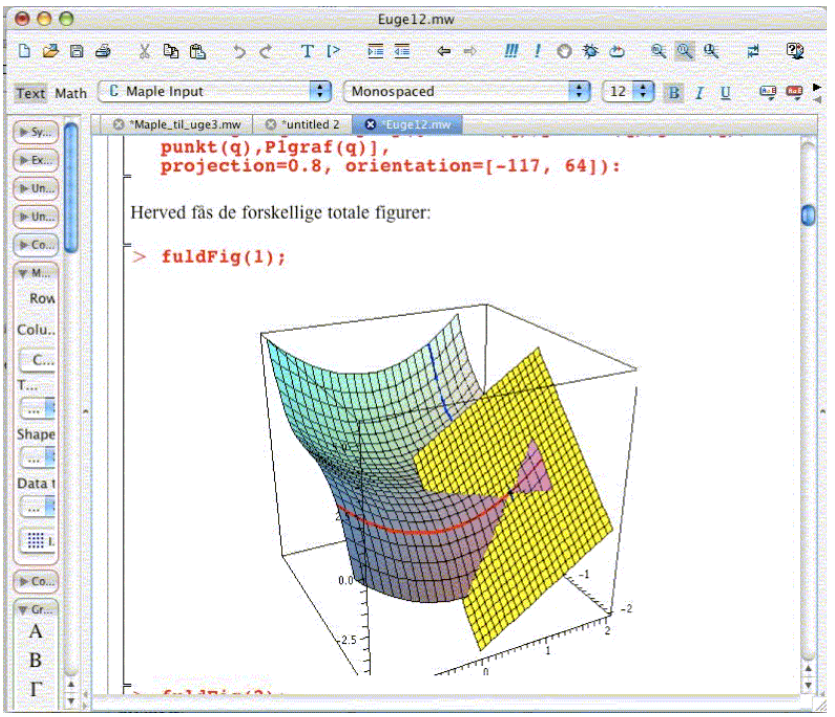
Lineær algebra

Determinanter og egenværdier af 50×50 matricer er intet problem, så hvis den studerende iøvrigt magter at indtaste eller konstruere en given matrix, ligger en eksperimenterende udforskning af matricens egenskaber åben på en måde, der aldrig før har været mulig.

2 Funktioner af flere variable

Man vil finde tilhængere af klassisk analyse, som mener at funktioner af to reelle variable slet ikke er beregnet til at blive set, men kun at blive analyseret. Analysen kan give svar på alle interessante spørgsmål,

og funktionens udseende er en unødig spekulation. Uanset hvor meget sympati man kan have for dette dyd-ud-af-nødvendighedenstandpunkt ville det være synd og skam ikke i dimension 3 at bruge de muligheder der foreligger. Med MAPLE er man i stand til at følge ideen fra 1 variabel og plotte funktionen *før* man spørger om noget andet.



Analyse

Når grafer af funktioner, tangentlinjer og tangentplaner kan plottes og virtuelt drejes og undersøges fra alle synsvinkler åbnes op for en experimenterende måde at analysere funktioner på, som om de var molekyler eller bygningsværker.

Dette stiller nye krav til opgaverne. En viden om grafens udseende er - med computergrafik til rådighed - ikke længere et endemål; nye

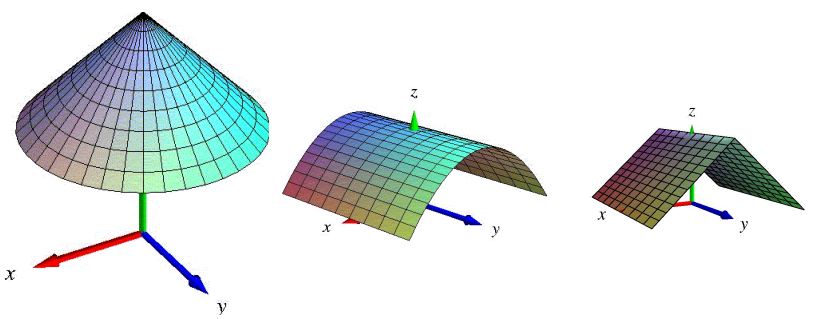
spørgsmål kan stilles om funktionen. Her er især spørgsmål, der stiller skarpt på forskellen mellem matematikken og computergrafikken. Hvornår er noget 'vist', hvornår er noget 'bevist'. Uden at jagt på 'patologiske' funktioner bliver gjort til et nyt hovedprincip, er det vigtigt at indarbejde en kritisk og realistisk holdning hos de studerende til hvad software kan og hvad det ikke kan i matematikken. Igen er den eksperimenterende vinkel til stor nytte.

3 Vektoranalyse og integration

Med vektoranalysen begynder et samspil af lineær algebra og analyse som er en af MAT-1's styrker. Den eksperimentelle tilgang kan bevares, hvis man kan trække på færdigheder udviklet i de første 2/3 af kurset.

Repræsentationen som datastrukturer i Maple af de punktmængder, der skal integreres over, volder det meste besvær. Når dette punkt er afklaret, kan de egentlige eksperimenter omkring integration begynde.

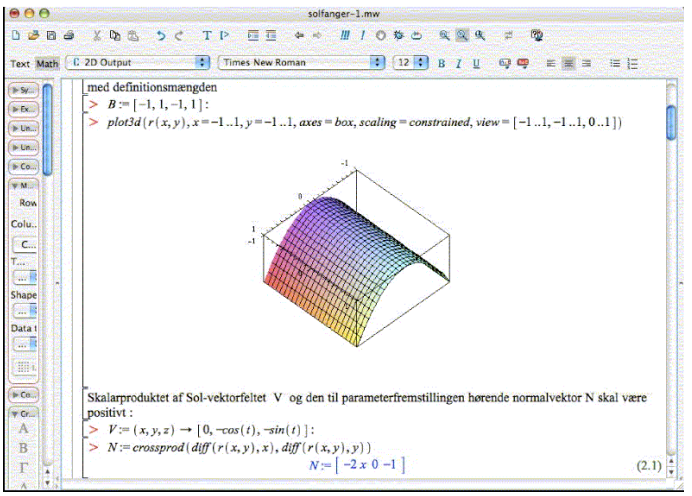
Et af de fineste eksempler på styrken af denne computer-støttede eksperimentelle tilgang er en opgave, hvor den studerende ledes gennem beregningen af den samlede mængde solenergi (beregnet som et fluxintegral) afsat på et buet tag i løbet af en dag, se [4] side 29–30.



Forskellige solfangertage

Beregning og visualisering af gradientfelter og rotationsfelter, beregning af fluxintegraler, også i realistiske 'ikke-pæne' tilfælde, er kom-

petencer som hovedparten af de studerende tager med fra MAT-1's sidste halvdel. Det er målet at de studerende går fra kurset med deres egen 'værktøjskasse' af symbolske analyseværktøjer - en værktøjskasse, som de vil kunne benytte i andre fag og for den sags skyld i deres job efter endt uddannelse.



Analyse af et solfangertag

Referencer

[1] M. P. Bendsøe, A. Bertelsen, P. G. Hjorth, og S. Markvorsen: *Optimale Konstruktioner*. Perspektiv (3), Fysikforlaget, (2003) 1 - 8.

[2] Se, fx: http://www2.mat.dtu.dk/info/mathematics/EmMa/

[3] S. Toft Jensen og J. Matthiasen (red.): *Matematiske Ideer*, Matematikforeningen, 1993.

[4] S. Markvorsen: *Integration i flere Variable*, Noter, Institut for Matematik, DTU, 2007. IntegrationSM.pdf

[5] S. Markvorsen, *Math Education at a Crossroads*, MAT-Report No. 2006-19, Institut for Matematik, 2006.

http://www.learninglab.dtu.dk/frikoebsprojekter/MAT1.aspx

[6] Yu. A. Shashkin, *Fixed Points*, American Mathematical Society, MAA, 1991.

[7] V. M. Tikhomirov, *Stories about maxima and minima*, American Mathematical Society, MAA, 1990.

[8] P. G. Hjorth, J. Perram & M. Andersen, *Experiences in Evaluating Outcome in Tool Based Competence Building*", Int. Journal of Technology in Mathematics Education 11, 4, 139, 2005.
http://www.maplesoft.com/academic_instruction/index.aspx

At eksperimentere med matematik

Lisbeth Fajstrup

At eksperimentere med matematik

Lisbeth Fajstrup, Institut for Matematiske Fag, Aalborg Universitet
fajstrup@math.aau.dk

Eksperimenter er en del af fagets natur

Matematikere eksperimenterer med faget. Store matematikere har naturligvis en vis intuition, men som f.eks. beskrevet af Hadamard i "The psychology of invention in the mathematical sciences", kommer de gode ideer ganske vist som lyn fra en klar himmel, men altid efter lang tids fordybelse i eksempler og forsøg på at bevise, formulere, abstrahere; altså fra eksperimenter, der ind imellem lykkes og ind imellem mislykkes, men alt i alt bidrager til forståelsen.

Matematiske sætninger af typen "For en X, der opfylder P, Q og R, gælder $Å$" er resultatet af en stribe eksperimenter: Man har regnet på eksempler og set, at man kan uddrage en overordnet egenskab $Å$ for en lang række tilfælde. Man har forsøgt at bevise, at $Å$ gælder for alle X, men det gik ikke. Så er det tilbage og se på eksemplerne; man finder nye eksempler på X, der ikke opfylder $Å$, og det viser sig, at de ikke har egenskaben P. Nå, så forsøger man at vise, at $Å$ gælder for alle X, der opfylder P. Igen problemer – måske kan man se af bevisideen, at man har brug for egenskaberne Q og R, for at det virker. Og så videre. Indrømmet, det er lidt abstrakt, men sådan ser det meste matematik jo ud for den, der ikke er inde i den konkrete terminologi. Læseren kan tænke på sit favoritresultat – hvor X er en gruppe, et metrisk rum, en reel funktion af to reelle variable eller noget helt fjerde.

At prøve sig frem, når man står overfor et vanskeligt problem, er en god strategi og en uomgængelig del af fagets natur.

Elever/studerende eksperimenterer alt for lidt

Der eksperimenteres altså med matematik. Måden, vi præsenterer matematik på, er ofte lige modsat: Vi præsenterer sætningen (udleder

en formel) og forventer, at beviset skal læres (og forstås) og præsenteres til mundtlig eksamen. Der skal regnes opgaver, hvor man bruger sætningen – eller sætter ind i formlen, som er udledt på tavlen og i bogen.

Jeg vil give et eksempel på en meget basal, ja, måske nærmest banal, form for eksperimenteren. Der er ikke computere involveret; det drejer sig udelukkende om at turde prøve sig frem. At begive sig ud i ukendt terræn, uden at kunne se hele vejen til løsningen, inden man drager af sted. Og at vove at gå lidt vild.

På universiteterne møder vi dygtige studerende, der går helt i baglås, når de ser en opgave, de ikke med det samme kan overskue løsningen af. De "sidder på hænderne", i stedet for at prøve sig frem. Et eksempel, jeg har mødt på landinspektøruddannelsen de sidste 15 år, er opgaven

Isoler x i ligningen $a=(1-x)/(1+x)$

Der er næsten ingen studerende, der går i gang med opgaven, som skal bruges i en større opgave om målestoksforhold. Problemet er muligvis, at man ved at gange med 1+x bringer mere uorden, i og med at x så er på begge sider af lighedstegnet.

At en så simpel ligning med en variabel volder problemer, skyldes ikke, at de tekniske færdigheder mangler. Mange studerende ved godt, at man må "gøre det samme på begge sider af lighedstegnet", og de kan såmænd også godt gange med 1+x. Det er formentlig mere et spørgsmål om indstilling til faget, og dermed et langt mere grundlæggende problem. At løse ligninger handler jo ikke kun om at genkende typeopgaver; det er der alt for mange forskellige "typer" ligninger til.

Ved at præsentere opgaver for eleverne, hvor man er *nødt til* at prøve sig frem - at eksperimentere, giver man dem forståelse for, at det er en lødig fremgangsmåde: "Den ubekendte står i nævneren; det er ikke smart; hvad kan man mon gøre ved det? Lad os prøve at gange på begge sider af lighedstegnet med 1+x og se, hvad der sker." Man kunne også omforme højresiden til $1/(1+x)-x/(1+x)$ og finder så ud af, at det ikke var en god ide – eller i hvert fald, at man nok skal

gange med 1+x bagefter. Pointen er bestemt ikke, at de studerende alle sammen og til alle tider skal kunne få en god ide. Men det er foruroligende, at de slet ikke forsøger. Et andet eksempel kunne være ligninger, hvor den ubekendte befinder sig under et kvadratrodstegn, som man skal forsøge at "komme af med". F.eks.

$$1+\sqrt{(1+x)}=a+x$$

Jeg mener, at denne og andre tilsvarende episoder er tegn på, at de studerende, vi får, har set for få eksempler på, at det kan være nødvendigt at prøve sig frem – at eksperimentere med faget; og at de derfor finder det lidt pinligt og imod de uskrevne regler, hvis man ikke kan se løsningsmetoden med det samme. Det giver et forvrænget og vel egentlig også lidt kedeligt indtryk af faget, og eleverne får alt for lidt udbytte af de tekniske færdigheder, de opøver i gymnasiet, når de ikke kan bringe dem i spil i sammenhænge, der er bare en lille smule anderledes end dem, de har set før.

Eksempel: Flyt et klaver – eller en sofa

Med gymnasiereformens krav om "XM" er der mulighed for at vise en anden side af faget. Computereksperimenter og simuleringer er bestemt en af de muligheder, man bør bruge, men jeg vil beskrive en helt anden type eksperiment, hvor vi lader førstesemesterstuderende eksperimentere med "matematikkens sjæl". Projektet hedder "At flytte et klaver" og foregår i perioden oktober til december. Problemet formuleres overordnet som, "at flytte et klaver gennem en gang, der knækker", men simplificeres til et 2-dimensionalt problem om at flytte objekter med forskellig facon igennem en gang (2D), der knækker. De studerende arbejder med dels at eksperimentere: Man kan forsøge med trekanter, rektangler, kvadrater, cirkler,… med gange, der knækker vinkelret, med andre vinkler etc. de klipper figurer ud i pap og forsøger at kante dem gennem gange, de har tegnet. De formulerer resultaterne og ræsonnementerne – forudsætninger, konsekvenser,…, laver formodninger og forsøger at bevise dem. De studerende laver selv simplifikationerne, vælger plane figurer, de kan overskue at sige noget om etc. De opdager f.eks., at man kan vælge at sige, gangen har

bredde 1, uden at have begrænset sig.

De udvikler sådan set deres eget lille matematiske område.

Der er et gammelt (Moser, 1966) uløst [3] problem i matematik, sofaflytningsproblemet: Hvor stort et areal kan en stiv figur have, hvis den skal kunne skubbes igennem en gang med et retvinklet knæk og gangbredde 1. Så der er udfordring for alle studerende, men pointen er, at de studerende ikke skal løse et problem – de skal undersøge, formulere notation for og afklare dele af problemet. Og de finder selv frem til, hvilke dele.

Når semesteret er slut, har de studerende ikke løst problemet, men de har lært en del om at afgrænse problemet, at opstille, afprøve og afvise eller verificere hypoteser, at skelne væsentlige fra uvæsentlige omstændigheder, at formulere hypoteser, resultater og definitioner præcist, de har brugt elementær trigonometri til noget vedkommende, de har engageret sig og haft det sjovt og nogle har fået blod på tanden.

Konklusion

Man skal og kan naturligvis ikke lade elever eller studerende eksperimentere sig frem til alting, men at de ser den side af faget og får et indtryk af, at man kan lege med matematikken og selv erobre nyt terræn ad en helt anden vej, end traditionelle lærebøger foreskriver det, vil forhåbentlig give en ny indsigt i fagets natur. Både for de kommende studerende ved de matematikforbrugende uddannelser, men nok så vigtigt: For de gymnasieelever, der aldrig mere møder matematik i undervisningssammenhæng.

3 I artiklen J.L.Gerver: *On moving a sofa around a corner*, Geom. Dedicata, 42,1992, 267-283 konstrueres et eksempel med areal 2,2195…, og det formodes, at det er det største areal.

2. del

Generelt om forløbene

Anden del af denne inspirationsbog præsenterer 34 afprøvede forløb, hvor eksperimentel matematik indgår som en arbejdsmetode.

Redaktionsgruppen har læst korrektur på alle forløbsbeskrivelser.

Til næsten alle forløb hører der materialer (f.eks. i form af elevmateriale), som redaktionsgruppen ikke har læst korrektur på.

Det tilhørende materiale er ikke med i bogen, men findes på uvmat.dk/XM/. Herfra kan det frit downloades og anvendes, og det er også muligt (og anbefalelsesværdigt) at tilpasse materialet.

Alle forløbsbeskrivelser er struktureret efter følgende skabelon:

- Overskrift
- Navn på bidragsyder med
  arbejdssted og
  e-mail-adresse
- Matematisk emne og niveau
- Tid til forløbet
- Faglige mål
- Beskrivelse
- Materialer
- Bemærkninger

Med hensyn til niveauangivelse har vi i redaktionsgruppen valgt at angive det *laveste* niveau et forløb må forventes med succes at kunne gennemføres på. Selvom niveauet er angivet som C, kan det i mange tilfælde også anvendes på et B-hold eller et A-hold. For en række af forløbene gælder det, at de med stort udbytte vil kunne anvendes første år og tages op igen senere, når nye matematiske redskaber er blevet introduceret.

Lav et gameshow til TV-Zero

Konstruer selv et skrabespil

Nynne Maria Afzelius
Nørre Gymnasium
nynnemaria@12move.dk

Sandsynlighedsregning C

5 – 6 timer

Faglige mål

- Opstille en matematisk model på baggrund af et virkeligt spil
- Beregne sandsynligheden for en gevinst og den gennemsnitlige gevinst
- Vurdere fordele og ulemper ved konstruktioner af spil

Beskrivelse

Eleverne får udleveret et brev fra TV-Zero: de skal lave et skrabespil til et gameshow. Resten af modulet bruges som opvarmning: Regn på et konkret skrabespil (f.eks. Mandagschancen). Derefter slippes eleverne løs på problemet (skrabespillet til TV-Zero) med en deadline (afleveringsfrist). I brevet fra TV-Zero er beskrevet en række kriterier for spillet, bl.a. gennemsnitlig gevinst og gevinstchance. Det er væsentligt at eleverne lægger noget arbejde i at få deres spil til at leve op til disse kriterier og vedlægger beregninger, der dokumenterer dette.

Produktet, de afleverer, skal udformes som et udkast/tilbud til TV-Zero (og også bedømmes som sådan).

Materialer

- Brev fra TV-Zero

Bemærkninger

Forløbet er gennemført i to 1.g klasser (der skal have matematik til hhv. A og B niveau) og en 2.g klasse. Det har hver gang været en stor succes, og nok den aktivitet, jeg har gennemført, der har medført størst elevaktivitet. Jeg har startet med at hævde, at det faktisk var en aktivitet, som en tv-kanal gennemførte, men undervejs har jeg så måtte afsløre, at det nok ikke var "helt rigtigt". Det er væsentligt at tillade et vist frirum for elevernes ideudvikling til spillet, samtidig med at de naturligvis skal støttes i de senere udregninger og justeringer af spillet.

Sammensat differentiation

Flemming Clausen
Nørre Gymnasium
fc@email.dk

Nynne Maria Afzelius
Nørre Gymnasium
nynnemaria@12move.dk

Differentialregning B

3-4 timer

Faglige mål

- Fortrolighed med anvendelse af tretrinsreglen
- Indsigt i bevisførelse indenfor differentiation
- Indsigt i reglen for differentiation af sammensat funktion og færdighed i brug af reglen

Beskrivelse af forløbet

Via reglerne for differentation af x^n eksperimenterer eleverne sig frem til en formel for differentation af $(f(x))^n$ startende med n=2,3,…. I arbejdet udnyttes, at eleverne kender formlen for differentation af produkt.

Udgangspunktet er, at eleverne allerede kender til differentiabilitet, differentialkvotient, tangentbestemmelse og tretrinsreglen anvendt på $x^2, x^3, x^{-1}, x^{-2}, x^{-3}$ og $\sqrt{(x)}$. Forløbet er tilrettelagt som et gruppearbejde, hvor eleverne via en række arbejdsspørgsmål ledes frem til at bestemme, hvordan man differentierer en sammensat funktion.

Forløbet lægger op til at eleverne udformer en matematisk rapport med deres resultater.

Materiale

- Arbejdsspørgsmål

Bemærkninger

Forløbet er gennemført i en række forskellige 2. g klasser på Nørre Gymnasium, og det kan anvendes på både B- og A-niveau. Det sværeste for eleverne er ofte at udforme rapporten, sådan at det faktisk bliver en rapport og ikke blot en besvarelse af de stillede spørgsmål – her kræves ofte lidt lærervejledning, da det for eleverne er uvant. Enkelte af opgaverne er mærket med en *, de er tænkt som valgfrie opgaver til de lidt hurtigere/fagligt stærke grupper. Disse opgaver kan også udelades.

Kendskab til differentiabilitet omfatter udelukkende viden om, hvad det betyder, når man siger, at $f(x)$ er differentiabel i x_0 . Man kan også udelade ordet, og nøjes med at oplyse om funktionen $f(x)$, at sekant-hældningen går mod $f'(x)$, når h går mod 0. Tilstrækkelig øvelse i at arbejde med oplysningen kan opnås ved at arbejde med øvelse 3 og 4 i elevmaterialet eller ved at arbejde med beviserne for $(kf)'$ og $(f+g)'$. Det er værd at bemærke, at beviset for $(f \cdot g)'$ er sværere end de stillede arbejdsspørgsmål.

Rette linjer

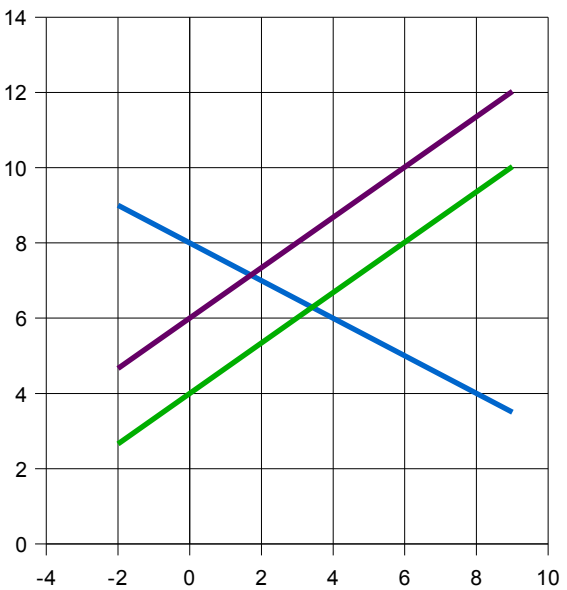
Nynne Maria Afzelius
Nørre Gymnasium
nynnemaria@12move.dk

Analytisk geometri C

1 time

Faglige mål

- At træne tegning af rette linier (på lommeregner)
- At gennemskue sammenhængen mellem hældning og parallelitet/ ortogonalitet



Beskrivelse

Eleverne skulle meget
gerne kende de rette linier fra folkeskolen. Først trænes de i at tegne rette linier med lommeregneren (eller Graph eller andet let anvendeligt IT-værktøj), og derefter kastes eleverne ud i processen: Opstil en hypotese, afprøv den, korriger den, afprøv igen, osv.

Konkret får eleverne følgende opgave:

Tegn to parallelle (rette) linjer på lommeregneren.

Kan du se hvad der gælder for to parallelle linjer?

Formuler resultatet som en matematisk sætning.

Afprøv din sætning på et par andre parallelle linjer. Om nødvendigt: revider din hypotese og formuler en ny sætning.

Tegn nu to ortogonale linjer (linier der skærer hinanden vinkelret). Kan du se hvad der gælder for ortogonale linjer? Formuler resultatet som en matematisk sætning. Afprøv din sætning på et par andre parallelle linjer. Om nødvendigt: revider din hypotese og formuler en ny sætning. Afprøv den igen.

Bemærkninger

Opgaverne kan naturligvis også løses på papir. I en fagligt stærk klasse kan man vælge at lægge vægt på det formalistiske (hvordan ser en matematisk sætning ud? Hvordan formulerer man en matematisk sætning præcist, osv.). Som lærer er det væsentligt at man "går ind på legen" og derfor ikke blot dømmer de forskellige hypoteser, men nærmere udfordrer (a la: "Passer det også når hældningen er 2 og –2"?). I en fagligt spredt klasse kan de fagligt stærke elever evt. udfordres med udformningen af et bevis.

Jeg bruger dette i starten af 1.g, fordi det bygger på noget velkendt (rette linjer), og træner både lommeregnerfærdigheder og matematisk formalisme.

I øvrigt kan en række lignende forløb udformes, f.eks. med parabler (bestem betydningen af a, c, d og evt. b).

Lige før stamfunktion

Behrndt Andersen
Texas Instruments
behrndt@ti.com

Differentialregning B

1 time

Faglige mål

- Skabe en intuition om stamfunktionsbegrebet før det defineres
- CAS-værktøj

Beskrivelse

Kort øvelse udarbejdet som et styret eksperiment med det formål at skabe en intuition om stamfunktionsbegrebet før det defineres. Bruger symbolsk regneark.

Eleven gætter først en stamfunktion til funktionen i kolonne C. Eleven taster sit gæt i kolonne A, programmet skriver differentialkvotienten i kolonne B. Hun kan nu tjekke, om hun har fundet den rigtige stamfunktion ved at sammenligne med kolonne C.

Øvelsen er lavet i Nspire CAS-dokumenter (på PC eller grafreg-

	A fkt	B diff	C skal_give
◆		=d(fkt,x)	
1	0	0	1
2	2*x	2	2
3	3*x	3	3
4	x^2	2*x	2*x
5	1/2*x^2	x	x
6	3/2*x^2	3*x	3*x
7	x^{3}		3*x^2
8			x^2
9			4*x^3
10			x^3
11			x^4
12			x^5
13			x^6
14			cos(x)

ner) fordi Nspire CAS giver mulighed for at læreren kan lave "elektroniske arbejdsark" - dokumenter med integreret CAS, geometri, grafer og regneark.

Materialer

- Lærermateriale

  Pdf –fil med beskrivelse og skærmbilleder
- Nspire-filer

  Det anbefales at afprøve filen før du giver den til eleverne, da den er lavet i en betaversion i 2006.

Bemærkninger

Man kan lave helt tilsvarende eksperimenter med TI InterActive eller TI-89 / Voyage 200. Hvis du bruger TI-89 eller Voyage 200 laves regnearket i stat-list-edit og instruktionen på papir eller mundtligt.

(Der kræves en TI-Nspire CAS enten grafregner eller software for at kunne bruge de animerede Nspire CAS-filer. Det anbefales at afprøve filen før du giver den til eleverne, da den er lavet i en betaversion i 2006).

Differentialkvotient

– bare en slags hældning

Behrndt Andersen
Texas Instruments
behrndt@ti.com

Differentialregning B

1 time

Faglige mål

- Indledning til differentialkvotient
- Skabe en intuition om differentialkvotienten som en generaliseret hældning
- Motivere grænseværdi for sekanthældning deduktivt

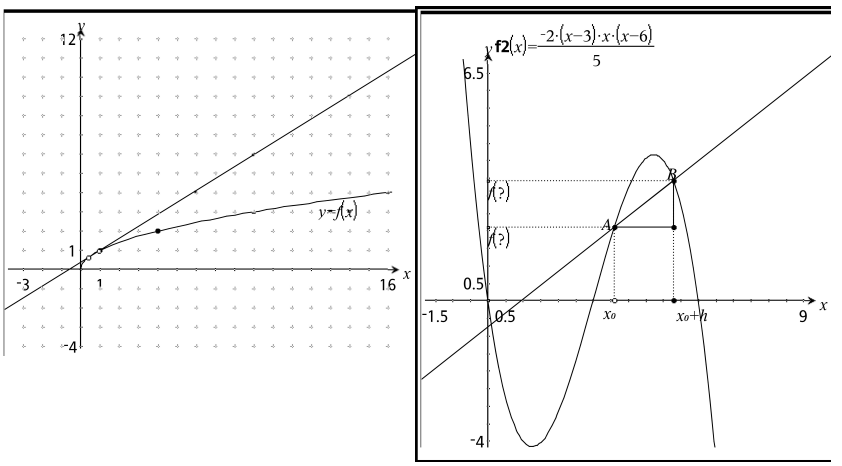
Beskrivelse

Ideen med forløbet er, at eleven får en intuitiv forståelse af begrebet "differentialkvotient" som en generaliseret hældning. Elevens eksperimenter kommer tidsmæssigt før begrebet defineres formelt.

Eleverne begynder med at finde hældningen for en simpel ret linie.

I fase 2 undersøges "hældningen" for en krum graf. Eleven flytter en sekant dynamisk ved at trække i to punkter på grafen.

I fase 3 trækkes dynamisk i x_0 og h og den traditionelle tegning af graf, sekant og hældningstrekant opdateres dynamisk. Læreren kan selv ændre h til Δx og lignende, så det dynamiske billede svarer til lærebogens.



Eksperimenterne er meget styrede, og laves i Nspire CAS-dokumenter (på Pc eller grafregner) fordi Nspire CAS giver mulighed for at læreren kan lave "elektroniske arbejdsark" - dokumenter med integreret CAS, grafer og geometri, som eleverne eksperimenterer i.

Materialer

- Lærermateriale

  Pdf –fil med beskrivelse og skærmbilleder
- Nspire-filer

  (Det anbefales at afprøve filen før du giver den til eleverne, da den er lavet i en betaversion i 2006)

Bemærkninger

Man kunne lave helt tilsvarende eksperimenter med momentan hastighed som intuitivt indhold. Det er muligt at hente Nspire-filerne og tilrette tekst etc. til egen smag.

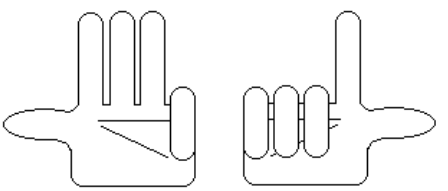
(Der kræves en TI-Nspire CAS enten grafregner eller software for at kunne bruge de animerede Nspire CAS-filer. Det anbefales at afprøve filen før du giver den til eleverne, da den er lavet i en betaversion i 2006.)

Fingerregning

Peter Trautner Brander
Næstved Gymnasium og HF
peter.trautner.brander@skolekom.dk

Algebra C

2 – 6 timer



Faglige mål

- Bogstavregning
- Mundtlig formidling

Beskrivelse

Først viser man eleverne, hvordan man på fingrene kan gange tal mellem 5 og 10. Det bevises at metoden virker. Dernæst tal mellem 10-15. Eleverne beviser selv. Til sidst "Fri forskning", hvor eleverne finder metode for andre tal-intervaller, eller andet antal fingre på hånden. Metoden skal bevises, og præsenteres for resten af klassen.

Materialer

- Elevmateriale (hvor metoden uddybes.)

Bemærkninger

Matematik skal bruge kroppen! Tabelkonge-konkurrence er sjovt. Første gang bliver eleverne irriterede over, hvor lang tid det tager at regne 12 gange 10 på fingrene, når det tager 1 sekund i hovedet. Forløbet kan udvides, hvis man går fra fingrene over til kuglerammer.

Vingummibamsefabrikantspillet

Peter Trautner Brander
Næstved Gymnasium og HF
peter.trautner.brander@skolekom.dk

Variable og sammenhænge C

2 timer

Faglige mål

- Lineære sammenhænge
- Produktion og aflæsning af grafer
- Lineære funktioner

Beskrivelse

Pararbejde. En person er fabrikant og bestemmer hemmeligt prisen på en tom pose og en vingummibamse. Den anden er journalist og skal afdække de to priser ved at stille snedige spørgsmål. Hvis det lykkes,

må der spises vingummibamser. (Læreren skal huske at købe en masse…). For hver sværhedsgrad får journalisten færre og færre oplysninger. Bagefter byttes der roller. I den skriftlige aflevering skal man som fabrikant fortælle, hvordan man konstruerer sildeben og tegner grafer udfra sine tal. Som journalist skal man fortælle, hvordan man afkoder sildeben og grafer og finder fabrikantens tal.

Materialer

- Elevmateriale
- Lærervejledning

Bemærkninger

Matematik skal smage godt! Forløbet skal ligge som introduktion til formler og sammenhænge, INDEN eleverne har mødt grafer, y=ax+b, og den slags. De skal altså selv tænke sig til formlen for – og betydningen af – liniens hældning. (Eller, hvis de klarer problemerne på en anden måde, så er de topmotiverede for at lære formlen i næste time). Alle formler og beviser kan efter denne introduktion fyres af på meget kort tid, for forståelsen er allerede til stede. Hvis klassen fortsætter på B og A niveau, er det en god ide at hive vingummibamser frem igen på senere tidspunkter.

Tyngdekraften i din idræt

Kasteparabler

Morten Birk Christensen
Oure Kostgymnasium - Sport og Performance
mbc@oure.dk el. morten@privat.dk

Parabler B

8 timer

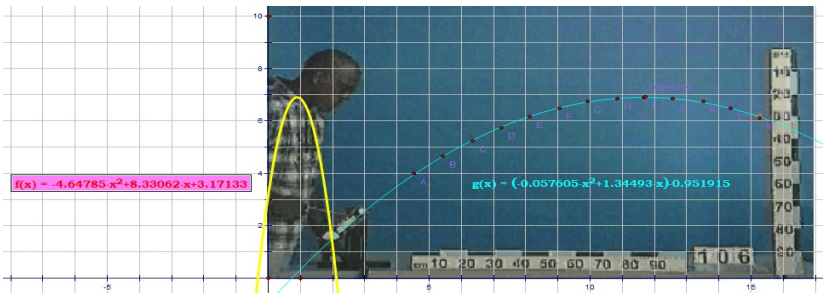
Faglige mål

- Andengradspolynomier som modeller fra elevens hverdag
- Polynomier og funktionsundersøgelse
- Hastighed og deceleration og differentialkvotient
- Historisk aspekt: Om parabelbevægelser, Galilei og Newton

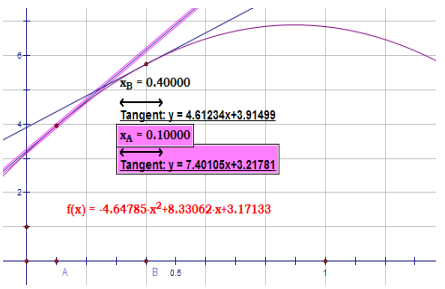
Beskrivelse

Med afsæt i små film fra elevernes idræt (kast med forskellige bolde, spring og hop) eller andres små filmklip fra nettet overføres en række billedklip fra film til GeoMeter. Bolden eller tyngdepunktet markeres. Derefter findes punkternes koordinater og ved regression findes andengradspolynomiet. Vi indarbejder tiden i forhold til billedserien og får et nyt andengradspolynomium.

Ved at tale om tangenthældninger kommer vi kort ind på differentialkvotienten og dermed hastigheden på forskellige tidspunkter i bevægelsen. Hvorfor falder hastigheden?



Afbild hastigheden som funktion af tiden. Der fås en ret linje med hældning på ca. -9.82. Tal om de- og acceleration. Sammenlign evt. med Galileis beskrivelse af lodrette fald.



Materialer

- Elevmateriale

Bemærkninger

De fleste mobiltelefoner optager film med 25 eller 12,5 billeder pr. sekund. Mange har også indbygget tid i filmklippet.

Forudsætninger: Tangenter. Anvendelse af GeoMeter eller lignende IT-program til geometri. Kunne lave regression.

Samarbejdsmuligheder f.eks. AT: Hvilke nye forståelser for verden kommer i renæssancen ud fra nye videnskabelige indsigter og hvordan anvendes dette i dag. Fagkombinationer er typisk historie, fysik og evt. dansk.

Projekt vodkaklovn

Eksperimenter med flaskedesign

Morten Birk Christensen,

Oure Kostgymnasium - Sport og Performance

mbc@oure.dk el. morten@privat.dk

Modellering og optimering B

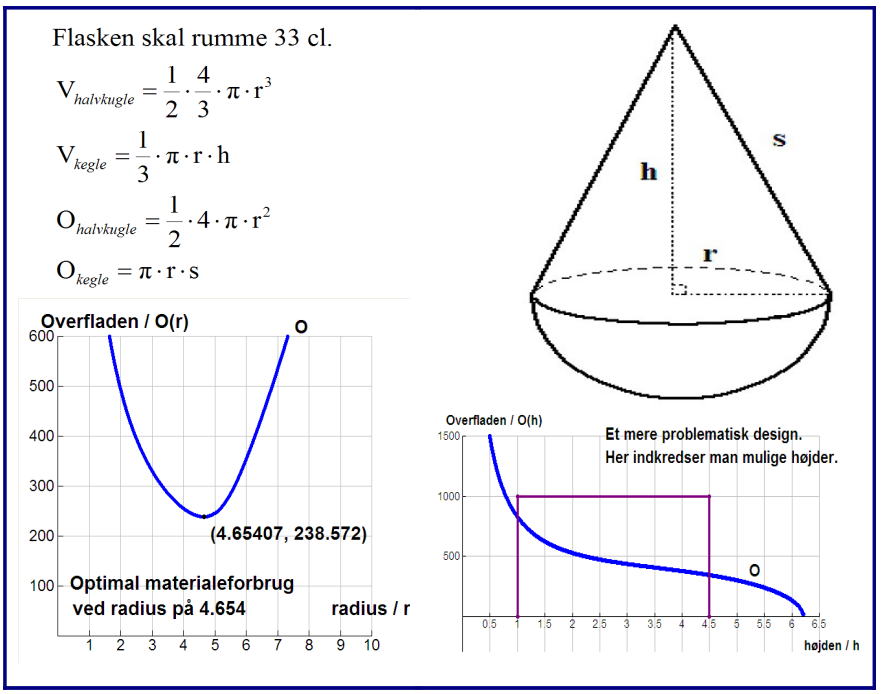
10 timer

Faglige mål

- At eleverne arbejder med problemløsning i matematik og ser nytten af matematisk modellering ud fra noget konkret i deres dagligdag
- Begrebet $f(x)$ og vurderinger af relevante definitionsmængder i forhold til problemstillingen, samt differentiation af funktioner og brugen af dette til optimering

Beskrivelse

Eleverne arbejder for en virksomhed, der skal lancere en vodkadrink til unge mennesker. Eleverne skal nu med udgangspunkt i en række formler for rumfang og overfladeareal for forskellige figurer (kugle og kugleudsnit, kegle og kegleudsnit m.fl.) selv designe en flaskeform og finde et funktionsudtryk for flaskens overfladeareal og rumfang. Ud fra de oplyste rumfangsmål i opgaven findes de mål på flasken, der gør flaskedesignet mest økonomisk rentabelt. Med andre ord skal de finde det mindst mulige materialeforbrug i forhold til rumfanget.



Eleverne vil nok lave flaskedesign, hvor der ikke er et minimums-punkt. Så må de indskrænke definitionsmængden, for at designet ikke går i stykker.

Materialer

- Elevmateriale

Bemærkninger

Ideen med Vodkaklovnen stammer fra et udviklingsseminar med Morten Blomhøj på RUC.

Samarbejdsmuligheder f.eks. AT: Ved inddragelse af æstetikken ved flaskedesign, kunne man let samarbejde med billedkunst. Man kunne også forestille sig, at eleverne skulle lave en salgskampagne og herved inddrage kundskaber fra dansk. Endelig er samarbejde med erhvervsøkonomi også en oplagt mulighed.

Statistik og spil – et historisk problem

Jes S. Jørgensen
Espergærde Gymnasium og HF
jj@eg-gym.dk

Sandsynlighedsregning C

5 timer

Faglige mål

- Indsigt i sandsynlighedsregning
- Beregning af spredning, middelværdi og varians vha. regneark
- Historisk aspekt

Beskrivelse

Med udgangspunkt i et brev fra Pascal til Fermat omhandlende to spil med terninger skal eleverne ved hjælp af eksperimenter undersøge, om påstandene i brevet kan være korrekte. Som en del af undersøgelsen beregner eleverne ved hjælp af regneark middelværdi, varians og spredning for de to spil.

De relevante uddrag af brevet lyder i dansk oversættelse:

> *Jeg har ikke tid til at sende dem løsningen på et problem, der har undret monsieur de Meré. Han fortalte mig, at han har fundet fejl i talteorien af følgende grund:*
>
> *"Hvis man vædder på at slå en sekser i 4 kast med en terning, har*

man en fordel som 671 til 625.

Hvis man vædder på at slå en Sonnez i 24 kast med to terninger, da har min opponent fordel.

Og ikke desto mindre er 24 til 36 det samme som 4 til 6."

Dette har gjort ham så indigneret, at han har sagt til nogle, at sætningerne ikke var rigtige og aritmetikken er selvmodsigende.

Pascals havde desuden følgende kommentar til spillet med dobbelt sekser (sonnez):

Man skal kaste to terninger 18 gange før man kan indgå et lige væddemål om at slå en dobbelt sekser. Thi ved ét kast med to terninger har man en chance som 1 til 36, ved to kast en chance som 2 til 36 osv., altså har man ved 18 kast lige chancer, nemlig 18 til 36.

Elevernes opgave er nu at analysere påstandene i brevet. Opgaven er udformet som en statistisk opgave, men eleverne opfordres også til at prøve på at argumentere for påstandene i brevet.
En naturlig udvidelsesmulighed er selvfølgelig at arbejde med spillet med teorien hørende til sandsynlighedsregning som udgangspunkt. Det kunne f.eks. være en god indgangsvinkel til arbejdet med binomialfordelingen.

Til forløbet er der udviklet en spilsimulator, som kan simulere de to spil. Eleverne bestemmer, hvor mange gange de to spil skal spilles.

Når eleverne har fået fremstillet nogle spildata er det meningen de arbejder videre med disse data i et regneark

Materialer

- Spilsimulator
- Elevopgave
- Pascals brev til Fermat (på fransk)

Eulerlinjen eksperimentelt

Olav Lyndrup
Nykøbing Katedralskole
olav.lyndrup@skolekom.dk

Geometri C

2 timer

Faglige mål

- Klassisk geometri
- Trekanter
- Geometriske steder i trekanter
- IT / Dynamisk geometri

Beskrivelse

Vha. et dynamisk geometriprogram eksperimenterer eleverne med trekanter og forskellige geometrisk steder for trekanter.

Eleverne ledes igennem eksperimenter med højder, medianer og midtnormaler i forskellige trekanter. Disse eksperimenter giver en øvelse i det dynamiske geometriprogram samtidig med, at eleverne ser eller genser egenskaber ved højderne, medianerne og midtnormalerne i en vilkårlig trekant.

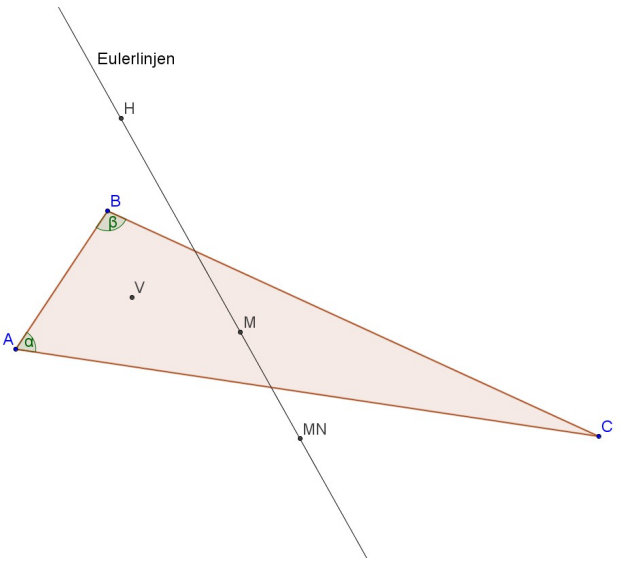
Slutresultatet for eleverne er, at de finder Eulerlinjen eksperimentelt.

Materialer

- Projektbeskrivelse (elevmateriale)

Bemærkninger

Forløbet har været brugt både i forbindelse med 1.g matematisk CAS-forsøg og standardforsøg. Det eksperimentelle arbejde efterfølges af sætninger / beviser for de fundne egenskaber og selve Eulerlinjen.



Retvinklede trekanter med heltallige sider

- hvad gemmer sig bag disse ?

Olav Lyndrup
Nykøbing Katedralskole
olav.lyndrup@skolekom.dk

Tal og geometri C

2 - 3 timer

Faglige mål

- Retvinklede trekanter
- Hele tal og primtal
- Divisibilitet

Beskrivelse

Eleverne repeterer typisk Pythagoras læresætning inden forløbet starter. Desuden har de udarbejdet en kvadrattabel for eksempel i Excel.

Herefter slippes eleverne løs to og to på materialearket, hvor de først skal finde sammenhænge mellem hele tal og retvinklede trekanter, derefter mellem primtal og retvinklede trekanter.

Besvarelsen tæller typisk for en aflevering.

Eleverne får trænet argumentation i høj grad.

Materialer

- Elevmateriale

Bemærkninger

Forløbet har været brugt både i forbindelse med introducerende matematik for kommende gymnasielever og på første år i gymnasiet for at give eleverne et billede af, at geometri og tal kan være smukt forbundne.

Differentialkvotienter

Olav Lyndrup
Nykøbing Katedralskole
olav.lyndrup@skolekom.dk

Differentialregning B

2 – 3 timer

Faglige mål

B

- Bevisførelse
- Regneregler for differentialkvotienter

Beskrivelse

Eleverne ledes gennem en række øvelser omhandlende grænseværdier hørende til x^2 og x^3. Konklusionen af disse øvelser skal eleverne benytte til at generalisere, så de kan bestemme differentialkvotienten af x^4, x^5, … Sidst i forløbet opfordres eleverne til at sammensætte de fundne differentialkvotienter til nye funktioner. Differentialkvotienten for disse nye funktioner skal derefter udledes.

Udgangspunktet er, at eleverne har set en argumentation for, at differentialkvotienten for funktionen $f(x) = x^2$ er $f'(x) = 2x$.

De skal eksperimentere med argumentationen og derved opøve en forståelse og rutine med argumentationen.

I den første del skal eleverne både bruge deres matematiske viden om grænseværdier og bruge deres CAS-værktøj til at bestemme grænseværdier.

I den anden del skal eleverne vha. deres CAS-værktøj arbejde videre med potensfunktioner og deres differentialkvotienter.

I den tredje del skal eleverne vha. deres CAS-værktøj arbejde videre med funktioner, deres sammensætninger og disses differentialkvotienter.

Materialer

- Elevmateriale

Bemærkninger

Forløbet har været brugt både på B- og A-niveau, da der var CAS-forsøg og standardforsøg.

Summer og integraler

Olav Lyndrup
Nykøbing Katedralskole
olav.lyndrup@skolekom.dk

Numerisk løsning af integraler B

3 - 4 timer

Faglige mål

- Rækker af summer
- Det ubestemte integral
- Det bestemt integral
- CAS-værktøj og integral

Beskrivelse

Udgangspunktet er, at eleverne skal finde arealet af en punktmængde.

De skal eksperimentere med rektangler og udtrykke det samlede areal af disse rektangler vha. summer.

Eleverne skal bruge deres CAS-værktøj som retteværktøj.

Når eleverne har eksperimenteret sig igennem et stadigt højere antal rektangler, så skal eleverne bruge metoden i forbindelse med funktioner, hvor det ikke er muligt at bestemme funktionsudtrykket for en stamfunktion.

Materialer

- Elevmateriale

Bemærkninger

Forløbet har været brugt på A-niveau hold, da der var CAS-forsøg og standardforsøg.

Helt i overensstemmelse med bekendtgørelsen, er det min erfaring, at eleverne har stor nytte af at se, hvordan et CAS-værktøj kan bruges i forbindelse med fx ubestemte integraler.

Den bedste rette linje

Steen Markvorsen
DTU
S.Markvorsen@mat.dtu.dk

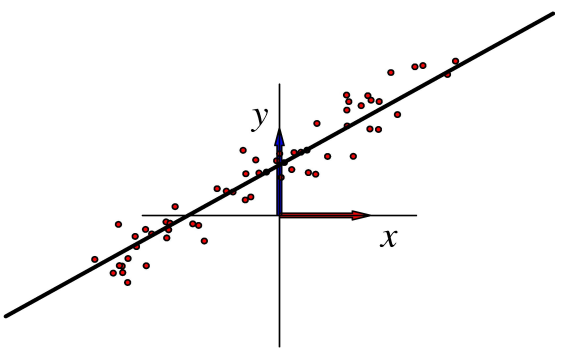
P. G. Hjorth
DTU
P.G.Hjorth@mat.dtu.dk

Regression B

2 - 5 timer

Faglige mål

- Rette linjer i planen
- Regression
- Akkumulerede cirkelskivearealer
- Bestemmelse af minima for funktioner af én og to variable.



En linje ser ud til at approksimere den givne punktmængde. Er det den bedste tilnærmelse?

Beskrivelse

Hvordan findes den "bedste" rette linje igennem en given mængde af punkter i planen? Hvad betyder "bedst" og er der altid præcis én ret linje, der så er den bedste? Eksperimenterne i denne øvelse går ud på at besvare disse spørgsmål.

Materialer

- Elevopgaver
- Animationer: Se i mappen:
  http://www2.mat.dtu.dk/people/S.Markvorsen/DISPLAY/
  Eller:
  - www.uvmat.dk/XM/RegresExperim.html
  - www.uvmat.dk/XM/AnimRot3.html
  - www.uvmat.dk/XM/AnimRot4.html
  - www.uvmat.dk/XM/AnimRot8.html

Sierpinski spillet

Steen Markvorsen
DTU
S.Markvorsen@mat.dtu.dk

P. G. Hjorth
DTU
P.G.Hjorth@mat.dtu.dk

Geometri A

2 - 4 timer

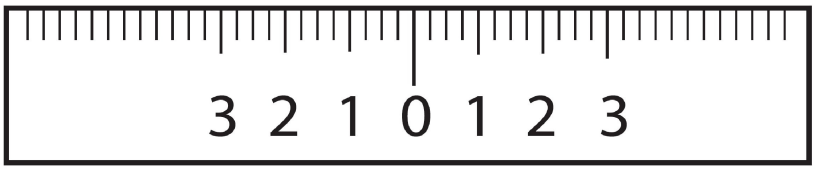
Faglige mål

- Punktmængder defineret ved iteration
- Abstrakte dimensionsbegreber
- Glimt af kaos

Beskrivelse

Tidlige eksempler på fraktale mængder blev givet af den polske matematiker Waclaw Sierpinski (1882-1969). Sierpinski tæppet, Sierpinski terningen og Sierpinski trekanten er klassikere. De er tilsyneladende enkle at forstå, smukke at se på, og rummer alligevel forbavsende historier om ikke-heltallig dimension, kaos-teori og dynamik på punktmængder. Der kan eksperimenteres med analoge mængder.

Vi har udtyndingsmetoden til at generere Sierpinski-trekanten. Men her er en fuldstændig anderledes måde: Vælg et punkt inde i trekanten, lige meget hvilket. Gå nu halvvejs fra dette punkt til et af hjørnerne, lige meget hvilket. Afmærk dette punkt. Gå nu igen halvvejs herfra til et af hjørnerne, lige meget hvilket. Og så fremdeles. Gør nu dette fx 100 gange.



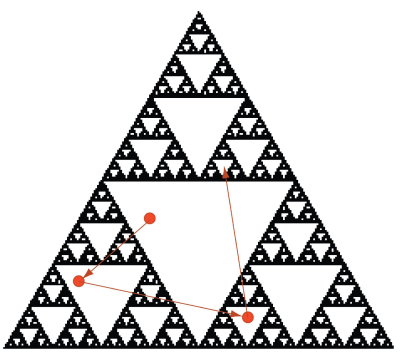
Dette kan hurtigt opnås på flg. måde: 10-20 elever får hver en klar overhead, hvorpå den grundlæggende trekant er fortrykt. Hver af eleverne skaber nu 10-15 punkter på denne måde. Til hurtigt at bestemme midtpunkter kan de fx anvende en midtpunktslineal (se figuren). Når alle er klar, lægges transparenterne oven på hinanden og på en kraftig projektor.

Et velkendt mønster begynder at vise sig.

Her er nogle trin på vejen til en forståelse:

(1) Hvis man foretager iterationen oven i den "færdige" Sierpinski-trekant, ser man at fra en hvid trekant af en vis størrelse vil man havne i en hvid trekant 1/3 så stor.

(2) Dette gælder på alle skalaer.



(3) Derfor vil prikkerne hurtigt ligge i så lille en trekant, at de ikke kan skelnes fra de egentlige Sierpinski punkter.

Materialer

- Overheads og tuschpenne. Midtpunktslinealer (kan fremstilles lokalt).

Bemærkninger

Man kan også gøre et egentlig "spil" ud af det. Man spørger: hvis jeg afmærker en af de (ikke alt for små) hvide trekanter som "mål", og peger på et startpunkt, hvor hurtigt kan man så få sit punkt i "mål" ved at vælge retninger for iterationen?

Der er masser af Java-Applets på nettet (men håndgjort er nu velgjort og giver en langsom, sund og rugbrødsagtig indsigt).

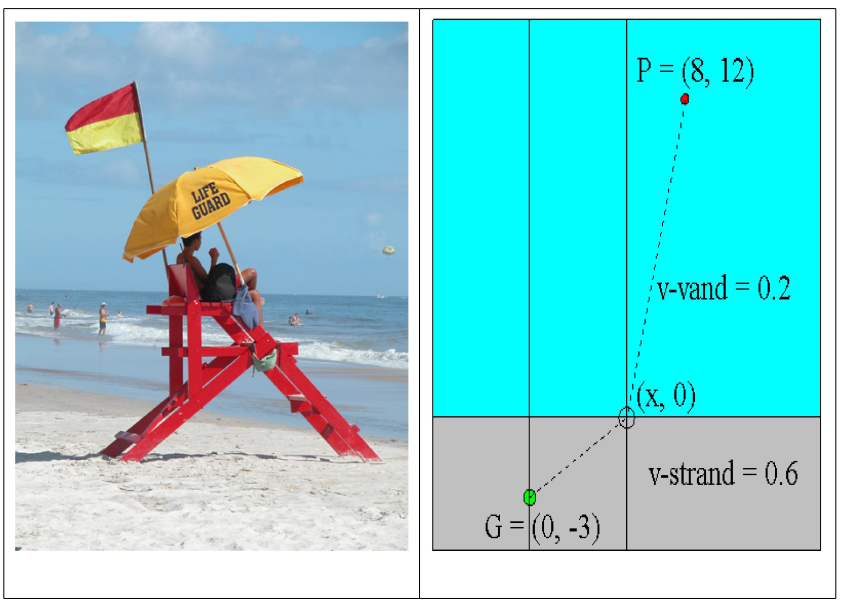
Se fx

- http://math.bu.edu/DYSYS/chaos-game/chaos-game.html
- http://serendip.brynmawr.edu/playground/sierpinski.html
- http://math.bu.edu/DYSYS/applets/index.html

Livredning

Steen Markvorsen
DTU
S.Markvorsen@mat.dtu.dk

P. G. Hjorth
DTU
P.G.Hjorth@mat.dtu.dk



Livredderen og en redningsplan.

Optimering B

1 - 2 timer

Faglige mål

- Funktionsundersøgelse
- Minimumsbestemmelse
- Snell's brydningslov

Beskrivelse

En (formentlig velkendt) optimeringsopgave, som skyldes R. P. Feynman: En livredder har base i et punkt G på stranden og observerer en nødstedt person i vandet i punkt P. Livredderen sprinter straks med topfart v_1 til vandkanten $(x,0)$ og svømmer derefter direkte mod P med topfart v_2 .

Opgave 1

Hvor lang tid tager det livredderen at nå fra G til P som funktion af x?

Opgave 2

Opgaven er at bestemme det punkt $(x,0)$, som giver mindst mulig redningstid. Desuden observeres, at den hurtigste rute har en knækvinkel, der tilfredsstiller Snell's brydningslov - en observation, der giver anledning til at betragte de reciprokke værdier af henholdsvis topfarten på sand og topfarten i vand som "brydningsindices" for livredderaktion fra sand til vand.

Opgave 3

Samme opgave som Opgave 1, men nu antages vandet at strømme med konstant fart langs x-aksen, enten i positiv x-akseretning eller i negativ x-akseretning. Antag enten at P er fast i forhold til koordinatsystemet (den nødstedte står på en lille ø omgivet af det strømmende vand), eller at den nødstedte flyder med strømmen.

Opgave 4

Samme opgave som Opgave 1, men med flere end to "lag" på ruten; områderne tænkes stadig at være parallelle med x-aksen og med forskellige konstante løbe-svømme-fart-værdier på hvert område.

Materialer

Illustrerende eksempler:

- www.uvmat.dk/XM/livredning.html
- J. Gleick, *Genius - The Life and Science of Richard Feynman*, Vintage books, 1992.

Brand

Steen Markvorsen
DTU
S.Markvorsen@mat.dtu.dk

P. G. Hjorth
DTU
P.G.Hjorth@mat.dtu.dk

Plangeometri B

2 - 10 timer

Faglige mål

- At eleverne arbejder med modellering ved brug af cirkler, ellipser, areal og omkreds
- Folieringer med cirkler og ellipser
- Vurdering af brandudbredelse ud fra matematiske modeller

Beskrivelse

Dette oplæg handler om en velkendt form for naturkatastrofer: På en vindstille sommerdag går der pludselig ild i en knastør skov, og brandens frontkurve udbreder sig straks cirkulært ud fra antændingstidspunktet.

Men hvis vinden blæser (op) og derved fører ekstra ilt til branden fra en given retning, er frontkurven langt fra cirkulær.

Formålet med øvelserne er at finde og vurdere tidsforløbet af skovbrande, dels med hensyn til hvor stort et skovområde der er blevet afbrændt til et givet tidspunkt og dels med hensyn til udbredelsesformen, altså formen af brandfrontkurven til tiden t efter antændingen.

Eleverne starter med simple modelleringer af situationer uden vind.

Herefter ses på mere komplicerede modeller med konstant vind og konstant vindretning.

Materialer

- Detaljeret beskrivelse:
  http://www.uvmat.dk/XM/06_SkovBrand.pdf
- Animationer: Se i mappen:
  http://www2.mat.dtu.dk/people/S.Markvorsen/DISPLAY/ -
  i undermapperne:
  XMatDTU/XMwriteF07/SKOVBRAND/AnimObs…./

  Animationerne hedder henholdsvis:

  AnimObs0W0.html

  AnimObs0W1.html

  AnimObs1W0.html

  AnimObs1W1.html

Bemærkninger

Der findes en mængde spændende litteratur om emnet. Se i den detaljerede beskrivelse.

Solsikker

Steen Markvorsen
DTU
S.Markvorsen@mat.dtu.dk

P. G. Hjorth
DTU
P.G.Hjorth@mat.dtu.dk

Solsikker viser i deres blomsterstand nogle forunderlige spiraler. Disse spiraler fortæller en matematisk historie om tal der tilnærmer andre tal, en biologisk historie om vækst, en biologisk historie om perception og en biologisk historie om evolution. Nogle enkle eksperimenter fører til en diskussion om irrationalitet af tal. Ultimativt til det Gyldne Snit.

Geometri B

2 – 4 timer

Faglige mål

- Mønsterdannelse i naturen.
- Parameterfremstilling for spiraler
- Rationale vs. irrationale tal.

Beskrivelse

Vi modellerer (ikke helt korrekt, men heller ikke helt urealistisk), at blomsterstanden vokser frem på den måde, at nye frø vokser frem i centrum og skubbes radialt væk af de efterfølgende. Hvert frø bevæger sig altså langs en radial linje, og den vinkel j (målt i enheder af 2 π) der er mellem frø n og frø n+1 bestemmer mønsterets form.

Det er muligt og instruktivt selv at tegne et mønster med papir og blyant. Meget mere opbyggeligt end at se på en computeranimation.

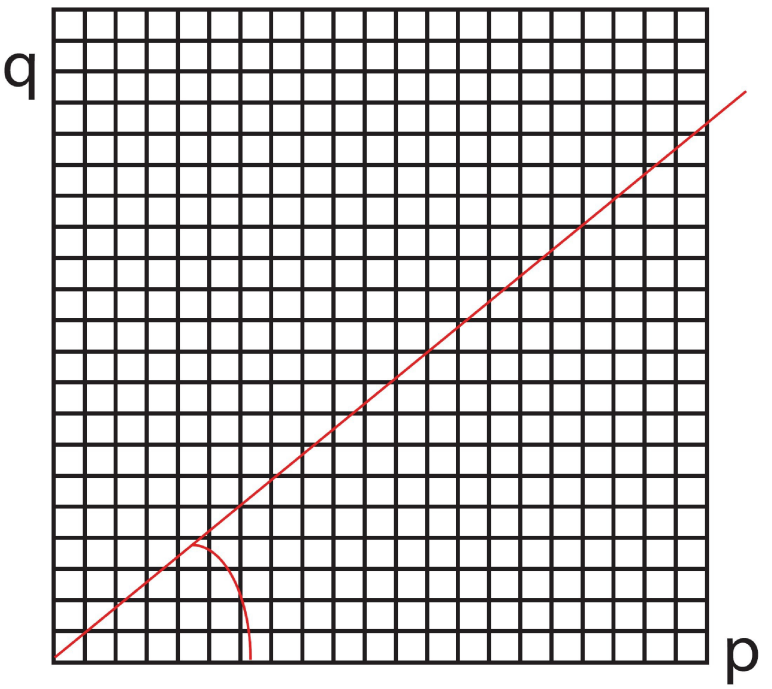
(0) Overvej hvad 'målt i enheder af 2 π' betyder - også med hensyn til drejningsvinkler større end 1/2 og mindre end 1/2.

(1) Vis at hvis vinklen j er et rationalt tal p/q vil det dannede mønster blive frø langs q stråler.

(2) Vis at et irrationalt tal med en meget god rational tilnærmelse vil danne et antal spiraler (hvilket antal).

(3) Hvordan kan vi kvantificere, at nogle irrationale tal har dårligere rationale tilnærmelser end andre tal?

(4) Hvilket irrationalt tal har dårligere rationale tilnærmelser end alle andre. Og hvad *er* disse rationale tilnærmelser?



Materiale

- Lommeregner, papir og blyant
- http://www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/Fibonacci/fibnat2.html

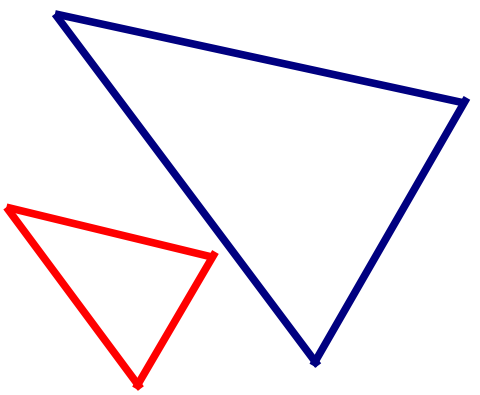
Bemærkninger

Righoldigt materiale findes på nettet. Blandt andet fremragende computeranimationer i Geometer's Sketchpad.

Trekanter

- der ligner hinanden

Ib Michelsen
VUC Skive-Viborg
ib.michelsen@mimimi.dk



Geometri C

2 – 6 timer

Faglige mål

- Ensvinklede og ligedannede trekanter
- Grundlæggende geometriske sætninger
- Bevisteknik (eventuelt)

Beskrivelse

1. del
Eleverne tegner to ligedannede trekanter efter eget valg: ABC og $A'B'C'$. Trekanterne klippes ud og placeres på et stort kvadreret ark og fastholdes ved hjælp af en limstift.

Ved placeringen sikres:

- at to sider, der svarer til hinanden, er parallelle
- at ABC har samme omløbsretning som $A'B'C'$

Undersøg, hvor mange par af parallelle linjer der findes gennem trekantssiderne.

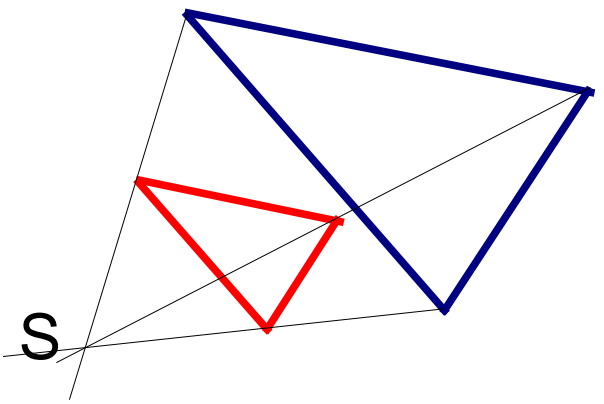
Vend én af trekanterne på hovedet. (Byt om på "op" og "ned".) Der skal stadig være 2 sider, der svarer til hinanden, som er parallelle.

Hvad sker der med omløbsretningen for den vendte trekant? Hvor mange par af parallelle linjer er der nu? Er svarene afhængige af, hvorledes trekanterne er tegnede?

Undersøg også betydningen af, at den ene trekant roteres 180°.

2. del

For en af placeringer af trekanterne tegnes linjer gennem A og A' hhv. B og B'. Skæringspunktet kaldes S. Endelig tegnes linjen gennem C og C'.



Hvad observeres? Er det tilfældigt? Gælder det altid?

Gentag eksperimentet efter at have roteret den ene trekant 180°?

Hvilken forskel er der?

3. del

For en tilfældigt valgt placering af trekanterne med samme omløbsretning tegnes en linje l gennem S, som ikke skærer nogen af trekanternes sider. Afstandene fra punkterne A og A' til l findes: $afstand_A$ hhv. $afstand_{A'}$. Tilsvarende findes afstande fra de øvrige punkter.

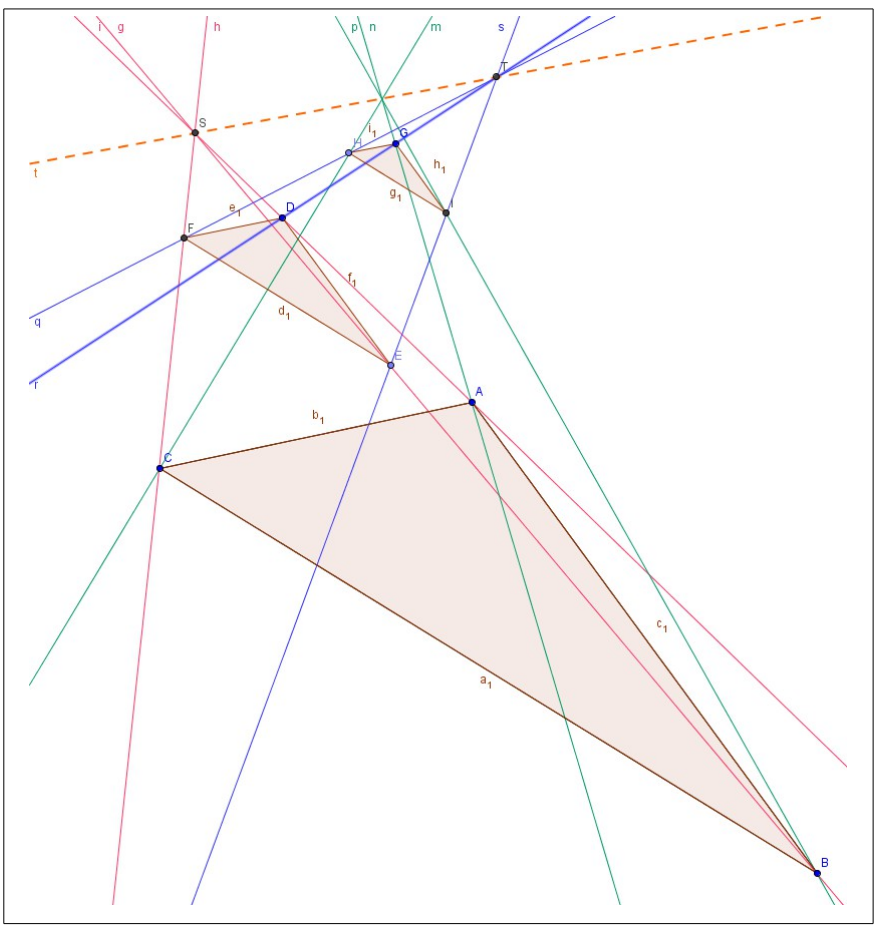
Beregn kvotienterne $afstand_{A'}/afstand_A$ og de to tilsvarende. Hvad bemærkes? Hvad sker der, hvis forsøget gentages med en ny linje gennem S? Også for tilfældet, hvor l skærer siderne?

4. del

Tegn en tredje trekant $A''B''C''$ ligedannet med en af de to første, klip den ud og placer dem alle tre således, at gælder for alle

- at sider, der svarer til hinanden, er parallelle
- at alle tre har samme omløbsretning

For hvert af de tre par af trekanter, der kan dannes, findes skæringspunkter som i 2. del. Kald dem S, S' (=T på denne tegning) og S''. Hvad bemærkes? Var det tilfældigt?



5. del

Hvilke muligheder er der for at generalisere de fundne sammenhænge?

Materialer

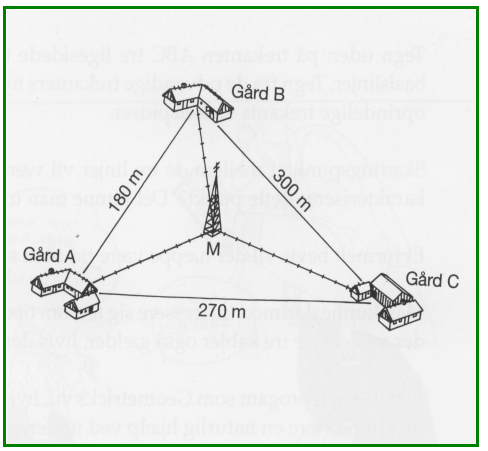
- Dr. Friedrich Reidt: *Die Elementhe der Mathematik – Ein Hülfsbuch*, Zweiter Teil (Planimetrie), Fünfte auflage, Berlin 1881
- Tilsvarende eksperimenter på PC: http://pc-p4.mimimi.dk/XM/trekanter
- Kildekode (GeoGebra) samme sted

Bemærkninger

Det er muligt at beskære opgaven, ligesom de formelle beviser kan inddrages i det omfang, man ønsker.

Minimer kabellængden

Ib Michelsen
VUC Skive-Viborg
ib.michelsen@mimimi.dk



Geometri C

2 – 6 timer

Faglige mål

- Pythagoras sætning
- Keglesnit – geometriske steder
- Anvendelse af regneark
- Anvendelse af IT-værktøj
- Geometriske konstruktioner af trekanter, cirkler og ellipser
- Funktion af 2 variable, niveaulinjer
- Nødvendig eller tilstrækkelig betingelse
- Generalisering af sætninger

Beskrivelse

Opgaven består i at minimere den samlede kabellængde fra masten M til gårdene A, B og C. Eleverne løser opgaven med et regneark, som for en given trekant viser løsningsmængden til uligheden:

$$\textit{samlet kabellængde} < k$$

hvor k er elevens forslag.

Elevens arbejde her er udelukkende at definere trekantens hjørner (med koordinater) og gætte på en rimelig værdi for k. Der gættes igen og igen indtil den optimale løsning for en given trekant er identificeret. Ved at gentage proceduren for nye trekanter og hver gang indtegne løsningen (dvs. punkt og kabler), kan der findes et mønster.

Fortsæt eksperimenterne ved at benytte et givet gæt af k – gerne for stort. Opdel det tilsvarende linjestykke i to: et med længden r, der benyttes som radius i en cirkel med trekantens ene hjørne som centrum og et andet med længden b, der benyttes som brændstrålernes sum i en ellipse, der har de to andre hjørner som brændpunkter. Ideen med eksperimenterne er at finde nødvendige betingelser for et optimum, der svarer til det før fundne mønster.

Endelig kan eleverne tegne omskrevne cirkler til de tre ligesidede trekanter (der kan tegnes på den oprindelige trekants sider): hvorfor

skærer de hver gang hinanden i ét punkt og hvilket punkt er det?

Materialer

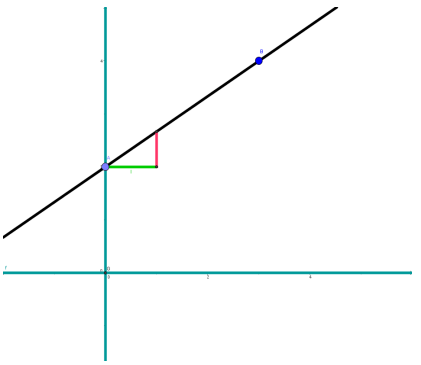
- Præsentation af opgave i http://pc-p4.mimimi.dk/xm/kabler
- Regneark til elevers eksperimenter samme sted
- Kilde (en tilfældig) til Jacob Steiner-problemet: http://www.triz-journal.com/archives/2006/06/08.pdf (Se siderne 4 – 5 med forslag til løsning af ovenstående problem med sæbevand og plexiglas).

Bemærkninger

Det er muligt at beskære opgaven, ligesom de formelle beviser kan inddrages i det omfang, man ønsker. Sætninger om ellipsen kan næppe forudsættes bekendt.

Funktioners parametre

Ib Michelsen
VUC Skive-Viborg
ib.michelsen@mimimi.dk



Funktioner C

1 time

Faglige mål

- At erfare sammenhængen mellem graf og parameter gennem eksperimenter

Beskrivelse

Med programmet Geogebra er der lavet en hjemmeside; eleven arbejder fra en PC med en browser (og uden andet programmel) og flytter punkter med en mus. På denne måde kan eleverne flytte med grafer, idet graferne (i disse eksempler) altid går igennem punkterne.

Samtidig kan parametrenes værdi aflæses i algebravinduet. For den lineære funktion er det bl.a. også vist, hvorledes linjestykket svarende til hældningskoefficienten ændrer sig, når hældningen ændres.

På hjemmesiden er der instruktioner, spørgsmål og knapper, der kan benyttes til hjælp og svar. Opgaverne er ikke gennemarbejdede, men antyder mulighederne.

Materialer

- Den rette linje: http://pc-p4.mimimi.dk/xm/parametre
- Parablen- Den hurtige version (samme link)

- http://www.geogebra.org/cms/ - programmet GeoGebra's hjemmeside (til download af program, information mv.)

Bemærkninger

Eksemplerne kunne lige så godt have taget udgangspunkt i andre funktioner: harmoniske svingninger er et oplagt eksempel.

Udover en PC med almindeligt udstyr, har læreren ikke brug for andet end programmet GeoGebra, der er et gratis program. Det kan frit hentes på nettet (se link herover.)

Ambitionsniveauet kan være forskelligt:

Den nemme løsning er at producere en eller flere tegninger, funktioner og lignende med programmet GeoGebra og lade programmet producere (eksportere) hjemmesiderne. Det er meget hurtigt og kan laves på få minutter (eller mere :-)

En lidt mere ambitiøs tilgang er, at integrere siden i en større hjemmeside (som i et af de viste eksempler.) Det giver mulighed for det samme sted at skabe interaktion mellem elev og materiale: Gør det – handling. Spørgsmål – svar. Hjælp mig – hjælp.

Jeg medgiver gerne, at den viste interaktion er ret primitiv, men vil mene, at alene med den teknik er der betydelige muligheder for at raffinere "samtalen". Tidsforbruget har nu typisk et omfang af timer. Og der kræves stort set ingen viden om programmering.

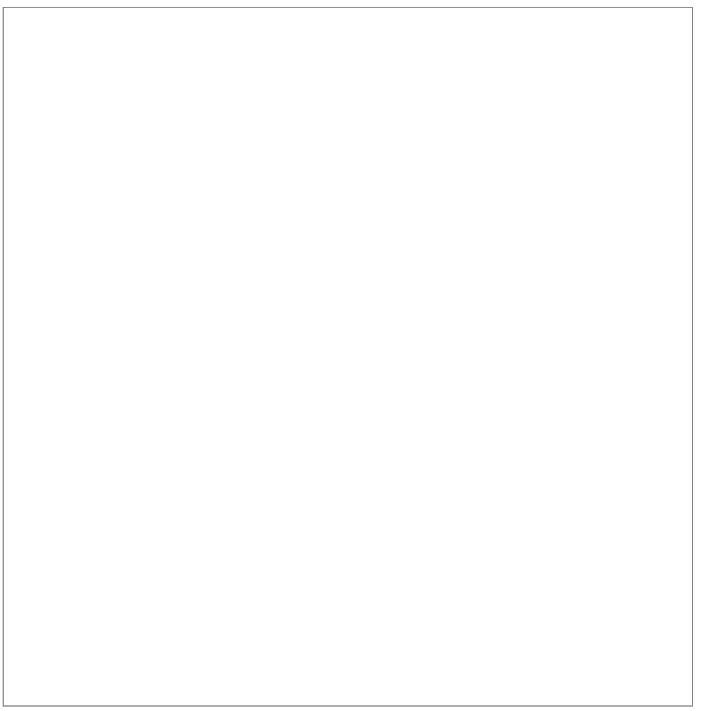
For den meget ambitiøse vil der være mulighed for – fra en sådan hjemmeside – at informationer og instrukser og spørgsmål ikke læses, men høres (sic!) og at ikke kun eleven kender elevreaktionen, men at der opsamles statistiske informationer og / eller elevrapporter.

Bilstatistik

Ib Michelsen
VUC Skive-Viborg
ib.michelsen@mimimi.dk

Statistik C

2 – 6 timer



Faglige mål

- Kendskab til statistiske deskriptorer og variable
- Indtegning og aflæsning af tendenslinjer
- Betydningen af andre forklarende variable

Beskrivelse

I første omgang er opgaven en traditionel opgave, der går ud på at beskrive, hvorledes priserne på en nærmere defineret stikpøve fra en bilpopulation fordeler sig.

I anden omgang kan eleverne formulere og teste hypoteser om sammenhængen mellem bilens alder, km-tal o.l. - og bilprisen.

I tredje omgang inddeler eleverne materialet i mindre dele (fx efter bilmærke eller bilmærke og alder) – og vurderer derefter:

- om en ændring fra én heterogen bilpopulation til en gruppe af mere homogene delpopulationer medfører en bedre samlet beskrivelse?
- hvor godt kan man få hele populationen beskrevet ved sådanne opdelinger?
- og hvor robust bliver modellen ved opdelingen?

Materialer

- Statistikprogram eller regneark
- http://www.dba.dk/ (Link til Den Blå Avis)
- http://www.bilbasen.dk/

Bemærkninger

Data kan selvfølgelig også findes mange andre steder – både i aviser, hos forhandlere og andre steder på nettet. Ofte kan der trækkes data direkte fra bildatabaserne - ud over data om den enkelte bil.

Budget og regnskab

Dennis Pipenbring
Metropolitanskolen
dp@metropolitanskolen.dk

Modeller C

8 - 10 timer

Faglige mål

- Anvendelse af modeller og revurdering af modeller
- Matematiks anvendelse i økonomi
- Anvendelse af regneark (Excel)

Beskrivelse

1. del

Opgaven består i at opstille et budget for ét år. Det skal indeholde sædvanlige udgifter og indtægter. Eleverne kan evt. søge informationer om div. udgifter og deres størrelse.

2. del

Eleverne skal opstille en model for et regnskab. Det er vigtigt, at der bliver tale om dobbelt bogholderi. Dvs. regnskabet skal stemme med indestående i banken og kassen.

Udgifter
Bolig
- Husleje
- Ejendomsskat
- Renovation
- Varme
- El, gas
- Boliglån 1
- Boliglån 2
- Antenneforening
- Ejendomsforsikring
- Vej og kloak
Transport
- Buskort
- Afdrag på bil
- Afdrag på cykel
- Bilforsikring
- Falck abonnement
- Vægtafgift
Lån
- Banklån
- 'kort'lån
- Andre lån
Forsikring
- Forsikringer
- Fagforening
Teleydelser
- Internet
- Telefon
- Mobiltelefon
- Tv og Radio licens
Fornøjelser
- Biograf, Teater, Café, Restaurant og bytur
Opsparing
- Kapitalpension
- Opsparing til nyanskaffelser
- Boligopsparing
- Ferieopsparing
Diverse
- Læge, tandlæge
- Husholdning, mad
- Nyanskaffelser
- Gaver
I alt

3. del

Eleverne får udleveret en række kvitteringer, svarende til en måned, som de skal skrive ind i deres regnskabsmodel.

4. del

Eleverne skal nu vurdere deres budget i forhold til resultatet af regnskabet.

5. del

Eleverne skal opstille et nyt budget på baggrund af regnskabet.

Materialer

- Eksempel på opstilling af budget, regnskab og sammenligning.

Bemærkninger

Det er en fordel at lade eleverne arbejde i små grupper, fordi det er vigtigt at diskutere sine dispositioner med andre.

Anvendelse af differentialligninger

Kirsten Rosenkilde
Nørre Gymnasium
kk@norreg.dk.

Differentialligninger A

8 timer

Faglige mål

- Differentialligningsmodeller
    - opstilling
    - anvendelse
    - løsning af differentialligninger

Beskrivelse

Forløbets primære formål er, at eleverne ud fra konkrete problemstillinger skal lære at opstille differentialligningsmodeller, som de efterfølgende skal løse, samt formidle dette i en gruppeopgave.

Eleverne skal opstille differentialligningsmodeller for vands afkøling i rum ved stuetemperatur (opgave 1) samt vands afkøling i rum ved stuetemperatur, som har et åbent vindue (temperatur udenfor er $0\frac{23}{92}$°C) (opgave 2). Den første fører til en 1. ordens differentialligning, som de kan løse vha. teori de kender i forvejen, og den anden giver en mere kompliceret differentialligning, som de skal lave en løsningskurve til vha. af et computerprogram (Vi brugte FPro).

Forløbet startede med en kort lærergennemgang af en konkret problemstilling (se bilaget Eksempler), hvor eleverne fik demonstreret hvordan man opstiller en differentialligning, samt hvordan man bestemmer en løsningskurve til en differentialligning vha. et computer-

program. Resten af forløbet bestod af gruppearbejde, og produktkravet for hele forløbet var en gruppeopgave.

Materialer

- Oversigt som blev udleveret til eleverne. Indeholder både formål, tidsramme, problemstillinger samt krav til gruppeopgave.
- Eksempler som kan benyttes til den introducerende lærergennemgang.

Bemærkninger

Jeg har gennemført dette forløb på et etårigt højniveauhold, og jeg har tidligere gennemført varianter af forløbet. Jeg har valgt at stille meget præcise krav til, hvad elevernes opgave skal indeholde (se bilaget Oversigt), da min erfaring ellers viser, at de ikke får alle de argumenter med, som jeg synes er væsentlige. Hvis man ønsker at eleverne skal have friere rammer, kan man fx erstatte den anden problemstilling med, at de selv skal udbygge modellen i første problemstilling. Det har jeg med succes prøvet i lignende forløb med andre modeller.

Stambrøker

H. C. Thomsen
Frederiksberg Gymnasium
hastian@hastian.dk

Ligningsløsning C

5 timer

Faglige mål

- Et eksempel på et forløb til genopfriskning af brøker og regning med brøker i 1.g.

Beskrivelse

En *stambrøk* er en brøk af formen $1/n$, altså en brøk hvor tælleren er 1 og nævneren er et naturligt tal (dvs. et positivt helt tal).

Skriv 1/6 som sum af to stambrøker.

Hvor mange måder kan det gøres på?

Skriv 1/6 som forskel mellem to stambrøker.

Hvor mange måder kan det gøres på?

Samme opgave for 1/7, 1/8 osv.

Er der mon en regel?

Hvis der er, kan du så *overbevise* dig selv og andre om den?

Hvis der er, kan den så *bevises*?

Hvis der ikke er, hvordan kan man så svare på de første spørgsmål?

Materialer

Supplerende lærermateriale: XM Stambrøker Udvidet

Bemærkninger

Denne korte udgave vil blive fulgt op af en mere udførlig med indarbejdelse af erfaringer fra afprøvninger og en diskussion af, hvilket udbytte et sådant forløb kan give (følg ovenstående link.)

Forløbet kan puttes ind hvor det passer bedst til holdet, og bør rundes af med en skriftlig aflevering.

Eleverne arbejder enkeltvis eller i smågrupper, alt efter hvad der egner sig bedst i situationen.

Omkreds og Areal

H. C. Thomsen
Frederiksberg Gymnasium
hastian@hastian.dk

Ligningsløsning C

5 timer

Faglige mål

- Arbejde med variable
- Løse ligninger

Beskrivelse

Prøv at lave et rektangel med areal 12 og omkreds 16.

Hvor mange måder kan det gøres på?

Hvad med areal 16 og omkreds 12?

Prøv at lave en cirkel med areal 12 og omkreds 16.

Hvor mange måder kan det gøres på?

Hvad med areal 16 og omkreds 12?

Prøv at lave en ligebenet trekant med areal 12 og omkreds 16.

Hvor mange måder kan det gøres på?

Hvad med areal 16 og omkreds 12 ?

Bemærkninger

Den første opgave om rektanglet kan løses på flere måder. En måde, som tiltaler eleverne, er at efter man har gættet 2x6-rektanglet, så sætter man den ene side til *ikke* at være 2, altså f.eks. 2+*s*, og den anden side bliver da 6-*s*. Der ganges og ved hjælp af nulreglen indses at der kun var den løsning man havde gættet og så den hvor man drejer denne 90 grader. *Men*: Denne metode går kun hvis man *har* gættet en løsning. Hvis der ikke er nogen løsning, eller man ikke kan gætte en, så må man prøve en anden vej.

Den anden opgave om cirklen er med for fuldstændighedens skyld, og fordi den kan give anledning til bemærkninger som "ku' vi så ikke sætte π til noget andet?" – en bemærkning som ikke (i folkeskolen i hvert fald) lyder helt så tosset, som vi måske vil mene.

Den tredje opgave om den ligebenede trekant giver anledning til en tredjegradsligning, hvis man vil løse (den første del af den) fuldstændigt. En af løsningerne ser de fleste ret hurtigt; men så ser det også ud til ar være slut. Ikke desto mindre er der endnu en positiv (irrational) rod, hvorimod den sidste rod er negativ. Disse løsninger, og de manglende til den anden halvdels tredjegradsligning, kan give anledning til mangen en drøftelse af antal rødder i polynomier, "falske" rødder osv.

Trekantsuligheden vha. Spaghetti

H. C. Thomsen
Frederiksberg Gymnasium
hastian@hastian.dk

Geometri C

2 timer

Faglige mål

- Trekantsulighed og elementære lineære uligheder

Beskrivelse

Der udleveres et antal (ukogte) spaghettier til hver deltager. Man bliver bedt om at knække hver spaghetti i tre stykker så tilfældigt som muligt, hvilket kan give anledning til diskussion af muligheden af dette. Deltagerne skal så pusle lidt med disse tre stykker, og vil efterhånden få dannet trekanter, hvor det kan lade sig gøre. Efter et stykke tid kan vi så prøve at undersøge i hvor stor en del af tilfældene, der *kan* dannes trekanter.

Her vil det være smart at introducere fornuftige navne på de variable. Lad det ene stykke hedde x, det næste stykke y, og dermed resten $1-x-y$, idet man inden har indset at man uden at tabe generalitet kan sætte spaghettiernes længde til 1.

Når man så formulerer alle de naturlige bånd der er på disse længder, får man en række lineære uligheder. Disse indtegnes (i første kvadrant) i et sædvanligt x-y-koordinatsystem, og man ser at sandsynligheden for at en tilfældigt knækket spaghetti kan give sider i en trekant bliver 0.25!

Hvis deltagerne kender cosinusrelationerne, kan man ydermere undersøge hvor stor en del af trekanterne der bliver (f.eks.) spidsvinklede osv.

En eksperimentel tilgang til normalfordelingen

Christian Thune Jacobsen
Gammel Hellerup Gymnasium
ct@ghg.dk

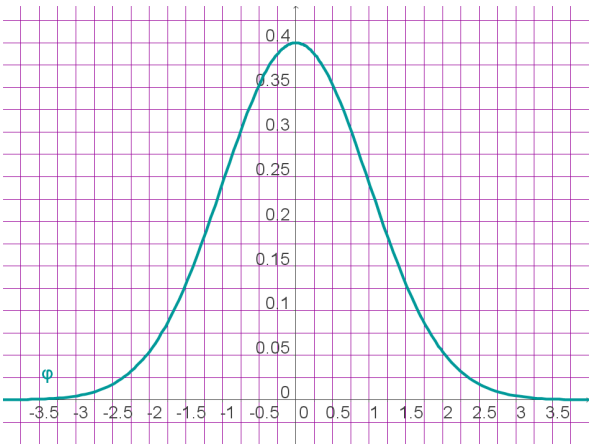
Normalfordelingen B

2 – 6 timer

Beskrivelse

Forløbet indledes med at eleverne individuelt via et CAS-program eksperimenterer sig frem til en funktion med normalfordelingens karakteristika. (Eleverne kender intet til normalfordelingen på forhånd). Herefter beregnes arealer under funktionen for forskellige intervaller og resultaterne af dette overføres til sandsynligheder. Hertil bruges et eksempel med at komme tættest mulig på en given linie, når der trilles med en bold.

Dette forløb er en eksperimentel udforskning af normalfordelingen, hvor et CAS program anvendes i udforskningen. I denne version er programmet Derive valgt. Andre programmer som TI-interactive, Maple, MathCad og TI-Nspire kan også let anvendes.



I forløbet kommer eleverne igennem en eksperimentel konstruktion af en frekvensfunktion og en fordelingsfunktion, som opfylder forskellige krav a la de krav, som frekvensfunktionen og fordelingsfunktionen for normalfordelingen opfylder.

Efter denne konstruktion arbejdes der videre med standardnormal-fordelingen.

Materialer

- Elevmateriale bestående af en række eksempler og 18 øvelser til udforskning af normalfordelingen.

Klassisk plangeometri

Med et dynamisk geometriprogram.

Christian Thune Jacobsen
Gammel Hellerup Gymnasium
ct@ghg.dk

Søren Eilers
Københavns Universitet
eilers@math.ku.dk

Klassisk geometri B

5 timer

Beskrivelse

Matematiske teorier bygger ofte på nogle få primitive begreber, der ikke skal defineres, samt nogle aksiomer, der ikke skal bevises.

Den klassiske plangeometri har følgende 4 "spilleregler":

L1. Der kan tegnes en ret linie mellem to givne allerede konstruerede punkter.

L2. Afstanden mellem to givne eller allerede konstruerede punkter kan udmåles med en passer.

L3. Der kan tegnes en cirkel med et givet punkt som cen trum, og en allerede udmålt afstand som radius.

L4. Der kan opsøges skærings punkter mellem to allerede konstruerede linjer eller cirkler.

Det er således ikke tilladt at måle afstande med linealer!

I de følgende opgaver anvendes et dynamisk geometriprogram som fx GeoGebra, Geometer, Cabri, Cinderella, TI-Nspire eller tilsvarende

(*her anvendes GeoGebra, der er et Open Source program, der frit kan hentes på Internettet* http://www.geogebra.org/cms/). Ved løsningen af de enkelte opgaver skal **ovenstående 4 spilleregler overholdes**.

Besvarelsen gemmes fx i "opgavenummer efterfulgt af fodstreg og to initialer", således gemmes opgave 1 i filen "1_ct".

I det følgende gælder, at så snart en konstruktion er udført i en opgave, så kan den direkte knap i GeoGebra benyttes herefter. (F.eks. når opgave 1 er løst korrekt, så kan den direkte knap, der i dette tilfælde er "perpendicular bisector" benyttes i efterfølgende opgaver.)

Materialer

- GeoGebra (se ovenfor)
- PC-adgang
- Elevmateriale bestående af 21 opgaver samt vejledning (hjælp) og kommentarer.

Bemærkninger

Særdeles velegnet til at belyse kernen i eksperimentel matematik.

En eksperimentel tilgang til parablen

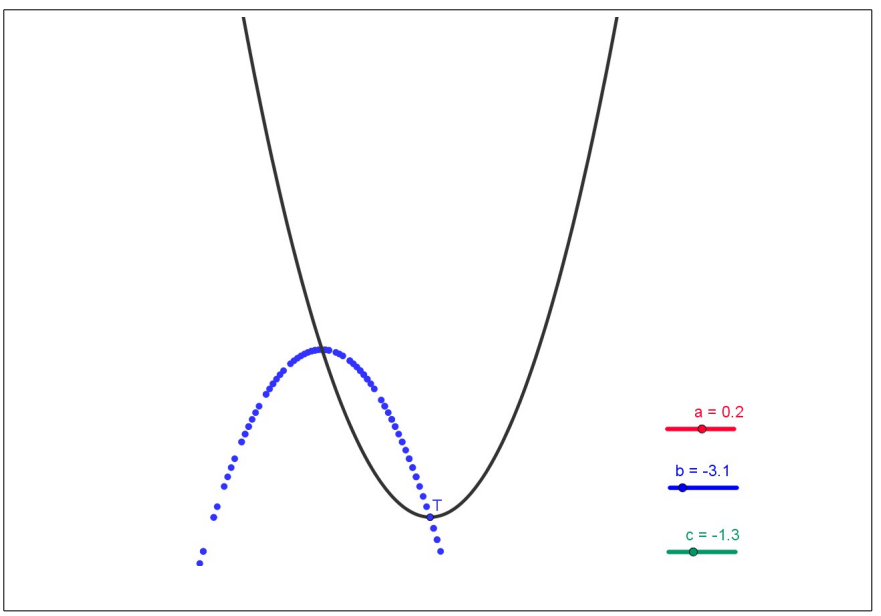
Christian Thune Jacobsen
Gammel Hellerup Gymnasium
ct@ghg.dk

Parablen B

2 – 4 timer

Beskrivelse

Dette forløb er en eksperimentel udforskning af parablen, hertil kræves et dynamisk geometriprogram eller et CAS program. I denne version er programmet GeoGebra valgt, da det kan hentes frit på Internettet, men andre programmer som fx Geometer, Cabri, Derive, TI-interactive, TI-Nspire kan også let anvendes.



I forløbet kommer eleverne igennem betydningen af a, b, c og D, skæringspunkter med x-aksen og formlen for toppunktet.

Materialer

- Link til GeoGebra
- Elevmateriale bestående af 16 opgaver samt vejledning og sætninger til udforskning af parablen

Figentræet

Hans Vestergaard
Frederikshavn Gymnasium
Hans.Vestergaard@skolekom.dk

Iteration og fraktaler A

15 timer

Faglige mål

- Indsigt i en helt ny verden i matematikken: Fraktaler!
- IT-kompetence med regneark og MathCad

Beskrivelse

Eleverne skal ved hjælp af regneark arbejde sig gennem teorien for figentræer / fraktaler. Forløbet er nært tilknyttet bogen "Figentræer og mandelbrød". Eleverne ledes gennem teorien ved en vekselvirkning mellem at læse teori i ovennævnte bog og øvelser løst med Excel (enkelte øvelser anvender dog MathCad). Arbejdsarkene er udarbejdet, så eleverne stort set kan komme gennem forløbet på egen hånd. Arbejdet i klassen har fortrinsvis været gruppearbejde med opsamling og inspiration.

Materialer

- Arbejdsark til eksperimenter på regneark omkring iteration og figentræet.
- Bjørn Felsager og Jonny Schultz: *Figentræer og Mandelbrød,* (Matematiklærerforeningen 1990)

Bemærkninger

Forløbet forudsætter at eleverne har bogen *Figentræer og Mandelbrød* af Bjørn Felsager og Jonny Schultz. Forløbet er gennemført i en 3.g under standardforsøget.

Opinionsundersøgelser

Hans Vestergaard
Frederikshavn Gymnasium
Hans.Vestergaard@skolekom.dk

Statistik C

10-15 timer

Faglige mål

- Eksperimenterende tilgang til statistik
- Indsamling og bearbejdning af data
- IT-kompetence

Beskrivelse

Forløbet tager udgangspunkt i en opinionsundersøgelse – Gallups politiske indeks – og hovedspørgsmålet er: "Hvor sikker kan man være på oplysningerne?"

En opinionsundersøgelse sammenlignes med kast med terninger. Dette simuleres på regneark og der tegnes histogrammer over binomialfordelingen. Formlerne for middelværdi og spredning postuleres og undersøges på histogrammerne.

Materialer

Jette Rygaard Poulsen, Hans Vestergaard og Søren Lundbye: *Hvad er meningen?* (Materialet findes som paradigmatisk eksempel (209 a) i vejledningen til Matematik C.), eller man kan finde det vha. følgende link:

http://www.uvmat.dk/paradig/not/n209a-1.pdf

Bemærkninger

Forløbet bør gennemføres i samarbejde med samfundsfag.

Buffon problemet

- ikke det sandsynlighedsteoretiske ...

Af J.P. Ward
Forfatter
Loughborough University, UK
J.P.Ward@lboro.ac.uk

Olav Lyndrup
Ansvarlig for den danske beskrivelse
Nykøbing Katedralskole
olav.lyndrup@skolekom.dk

Polygoner og matricer B

5 timer

Faglige mål

- Polygoner, regulære og irregulære
- Dynamisk geometriprogram
- Lineær algebra - matricer
- Vektorer

Beskrivelse

Eleverne starter med at tegne en vilkårlig polygon med et givet antal sider. Herefter finder eleverne midtpunktet af alle sider i polygonen. Midtpunkterne forbindes og en ny polygon dannes.

Denne proces gentages et vist antal gange.

Dette eksperiment kan med fordel udføres i et dynamisk geometriprogram.

Eleverne eksperimenterer også med polygoner med et større antal sider og med både irregulære og regulære polygoner.

Elever oplever, at der kommer system ud af et kaos – der kommer affine regulære polygoner frem, efterhånden som processen gentages.

Herefter skal eleverne kigge specielt på konkave og konvekse firkanter og se, at der kommer parallelogrammer frem. Dette skal eleverne efterfølgende bevise vha. vektorregning.

Herefter generaliseres problemformuleringen og der formuleres en generel notation for polygonerne.

Affin geometri introduceres, og slutteligt formuleres vha. vektorer og matricer en transformationsmatrice for den proces, som eleverne fandt eksperimentelt.

Materialer

- J. P. Ward, *Experimental mathematics in the curriculum* (part I), 2006
- J. P. Ward, *Experimental mathematics in the curriculum* (part II), 2006

Bemærkninger

Forløbet har været brugt på 1. års studerende (undergraduate) på Loughborough University, UK.

Bidraget er en del af to artikler, som er bragt i *Teaching Mathematics and its Applications*, som er en del af Oxford Journals– se http://teamat.oxfordjournals.org/