Kap. 1: Indledende teori om differentialligninger.

Normalt når vi i mere "simple" matematiske sammenhænge taler om en ligning og en løsning hertil, så er der tale om at bestemme værdier af den uafhængige variable (ofte kaldet x eller t), som indsat i ligningen giver et sandt udsagn (jfr. f.eks. andengradsligninger, trigonometriske grundligninger og eksponentielle grundligninger). De ubekendte i ligningerne og løsningerne hertil er altså tal.
I forbindelse med differentialligninger er det imidlertid funktioner, der optræder som ubekendte, idet en differentialligning giver en sammenhæng mellem:

- en eller flere af den ukendte funktions afledede (første afledede, anden aflede osv.),
- funktionen selv og
- andre funktionelle sammenhænge hvori den uafhængige variable indgår.

Eksempel 1.1.
Hvis vi kalder den uafhængige variable for x og den ukendte funktion for y (dvs. y(x)), så er de følgende udtryk eksempler på differentialligninger:

a) $y' = 2x + 3$ **b)** $y' = y^2\cdot\sin(x)$ **c)** $x^2y^2 + xy' = 0$ **d)** $y' = y - 3x$ **e)** $y' - 2y = -2x^2 + 1$
f) $y' = 0{,}00004\cdot y\cdot(500 - y)$ **g)** $y'' = -4y$ **h)** $e^{-y}\cdot y' = 2x + 3$ **i)** $xy'' = y^2 + 12y'\cdot\sqrt{x}$

Der er i nogle sammenhænge tradition for, at man kalder den ukendte funktion for y indtil man ved noget konkret om den og indtil evt. konstanter er bestemt, hvorefter der er tale om en bestemt løsning, som da benævnes f(x) el. lign. Men der er ingen konsekvens i dette – og ofte vil f(x) o.lign. optræde som ubekendte funktioner "fra starten" i stedet for y. Differentialligningen i f.eks. b) vil da hedde: $f'(x) = (f(x))^2\cdot\sin(x)$.

Vedrørende betydningen af den dobbelt afledede y'' – eller $f''(x)$ – henvises til Appendix 1.
Til at angive differentialkvotienten af en funktion anvendes ofte også notationen $\frac{dy}{dx}$, $\frac{df(x)}{dx}$ o.lign.
Med denne notationsform opskrives f.eks. differentialligningerne b) og g) på følgende måde:

b) $\frac{dy}{dx} = y^2\cdot\sin(x)$ eller $\frac{df(x)}{dx} = (f(x))^2\cdot\sin(x)$ og **g)** $\frac{d^2y}{dx^2} = -4y$ eller $\frac{d^2f(x)}{dx^2} = -4f(x)$

Den variable behøver naturligvis ikke hedde x, ligesom den ubekendte funktion naturligvis ikke behøver at hedde y. Differentialligningen: $t\cdot\varphi'(t) = 2t^2 + 3t\cdot\varphi(t)$ er således et eksempel herpå.
I løbet af denne bog vil vi løse samtlige de omtalte differentialligninger (med undtagelse af i)). ♥

Hvis den ubekendte funktion højst optræder med sin første afledede, dvs. at kun x, y og y′ indgår i ligningen, så taler vi om en førsteordens differentialligning, hvorimod vi har en andenordens differentialligning, hvis der også optræder den anden afledede y″ (altså: x, y, y′ og y″), osv.
Ved en løsning til en differentialligning forstår vi en funktion, som indsat på den ubekendte funktions plads i differentialligningen giver et sandt udsagn. Dette lyder umiddelbart tilforladeligt og forståeligt, men der skjuler sig et problem i denne "definition". For spørgsmålet er: For hvilke værdier af den uafhængige variable (dvs. for hvilke x-værdier) skal udsagnet være sandt ? Dette spørgsmål kan også stilles på følgende måde: Hvad skal definitionsmængden være for en given løsning ?

Et eksempel kan måske bidrage til at uddybe problemstillingen:

Eksempel 1.2.

Vi betragter differentialligningen: $y' = \frac{1}{x}$.

Følgende funktioner er alle løsninger til denne ligning (kontrolleres let ved indsættelse i ligningen):

a) $f(x) = \ln(x) + 17$, b) $f(x) = \ln(-x) - 12$, c) $f(x) = \begin{cases} \ln(x)+2 \ , & x>0 \\ \ln(-x)+46 \ , & x<0 \end{cases}$

Løsning a) gælder for alle x > 0, men den gælder f.eks. også for alle $x \in \left]2;21\right[$. Løsning b) gælder for alle x < 0, men den gælder f.eks. også for alle x < –20. Løsning c) gælder for alle x ∈ R\{0}, men den gælder også f.eks. for alle $x \in \left]-5;0\right[\cup \left]0;8\right[$ og for alle $x \in \left]2;21\right[$.
Der er altså uendeligt mange muligheder for definitionsmængden for en løsning !!
En mulighed for at komme uden om dette problem ville være at sige, at definitionsmængden skal være den størst mulige talmængde, der gør udsagnet (dvs. differentialligningen med den givne løsning indsat) sandt.
For løsning a), b) og c) ville vi da få definitionsmængderne hhv.: $\left]0;\infty\right[$, $\left]-\infty;0\right[$ og R\{0}.

Og generelt ville vi kunne sige: En løsning f til differentialligningen $y' = \frac{1}{x}$ er en differentiabel funktion, der opfylder, at for alle x ∈ Dm(f): $f'(x) = \frac{1}{x}$. ♥

I forlængelse af eksempel 1.2 fastlægger vi foreløbig:
Ved en <u>løsning</u> til en differentialligning forstår vi en funktion, som indsat på den ubekendte funktions plads i differentialligningen giver et sandt udsagn <u>for alle x ∈ Dm(f).</u>
Denne definition skal imidlertid vise sig at give problemer i visse sammenhænge, hvor Dm(f) består af flere usammenhængende intervaller. Vi vender lidt senere tilbage til problemstillingen.

Ved den <u>fuldstændige løsning</u> til en differentialligning forstår vi <u>mængden af samtlige</u> funktioner, der er løsning til differentialligningen. Som en modsætning hertil kaldes én enkelt løsning ofte også for en <u>partikulær løsning</u> til differentialligningen.

Når man kort taler om <u>at løse en differentialligning</u>, så mener man almindeligvis at bestemme den fuldstændige løsning til differentialligningen (hvis der ikke stilles yderligere krav til løsningerne).

Ved en <u>løsningskurve</u> eller en <u>integralkurve</u> til en differentialligning forstår vi <u>grafen</u> for en løsning.

Øvelse 1.3.

a) Vis ved indsætning, at funktionen $f(x) = \frac{1}{\cos x + 10}$, x ∈ R, er en løsning til differentialligning b) i eksempel 1.1.

b) Vis ved indsætning, at funktionerne $f_1(x) = 0$, x ∈ R og $f_2(x) = \frac{2}{x^2+1}$, x ∈ R , begge er løsninger til differentialligning c) i eksempel 1.1. ♥

Øvelse 1.4.

a) Vis, at der findes én og kun én lineær funktion, som er løsning til differentialligning d) i eksempel 1.1 – og opskriv funktionsforskriften for denne lineære funktion.

b) Vis, at der findes ét og kun ét andengradspolynomium, som er løsning til differentialligning e) i eksempel 1.1 – og opskriv funktionsforskriften for dette andengradspolynomium. ♥

Eksempel 1.5.

Hvis vi ser på differentialligningen: $y' = x^2$, så består den fuldstændige løsning af samtlige stamfunktioner til funktionen x^2 (overvej dette !). Den fuldstændige løsning til differentialligningen er derfor givet ved: $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + k$, $x \in R$, hvor $k \in R$ er en vilkårlig konstant.

I dette tilfælde er forskellen på de enkelte løsninger altså en konstant, og samtlige løsningskurver fremkommer ved at parallelforskyde løsningskurven for $f(x) = \frac{1}{3}x^3$ langs andenaksen. ♥

Øvelse 1.6.

Bestem den fuldstændige løsning til differentialligning a) i eksempel 1.1. ♥

I forlængelse af eksempel 1.5 og øvelse 1.6 minder vi om følgende definition af og sætning om stamfunktioner:

Definition 1.7.

En funktion F siges at være stamfunktion til en funktion f i et interval I, hvis

$$F'(x) = f(x) \text{ for alle } x \in I$$

Oftest er I et åbent interval, men hvis x er et intervalendepunkt for I, som er med i I, så er det underforstået, at der er tale om enten $F'_+(x)$ eller $F'_-(x)$.

Sætning 1.8.

Lad f være en funktion, som i et interval I har en stamfunktion F. Da gælder:

1) Samtlige stamfunktioner til f i intervallet I er af formen F + k, hvor $k \in R$ er en vilkårlig konstant (også kaldet en arbitrær konstant).
2) Hvis (x_o,y_o) er et punkt i planen, hvor $x_o \in I$, så har f netop én stamfunktion i I, hvis graf går igennem punktet (x_o,y_o).

Som bekendt findes den entydige løsning i sætningens punkt 2) ved først at finde en stamfunktion til f ved integration af f, hvorefter værdien af den vilkårlige konstant, der kan lægges til den fundne stamfunktion, tilpasses, så funktionsværdien i x_o netop bliver y_o (f.eks. er den stamfunktion til f(x) = 2x, hvis graf går igennem punktet (2, 15), givet ved: $F(x) = x^2 + 11$, idet $F(x) = x^2 + k$, og konstanten k skal passe til, at F(2) = 15).

Læseren opfordres til at lave en figur, der illustrerer situationen.

I forbindelse med differentialligninger kan sætning 1.8 formuleres på følgende måde:

Sætning 1.9.

1) Hvis funktionen h har en stamfunktion H i et interval I, så er den fuldstændige løsning til differentialligningen: $y' = h(x)$ i intervallet I givet ved:

   For alle $x \in I$: $f(x) = H(x) + k$, hvor $k \in R$ er en vilkårlig konstant.

   dvs.

   For alle $x \in I$: $f(x) = \int h(x)dx + k$, hvor $k \in R$ er en vilkårlig konstant.

   De forskellige løsningskurver til differentialligningen fremkommer ved parallelforskydning i andenaksens retning af en vilkårlig af løsningskurverne.

2) Gennem ethvert punkt (x_o,y_o) i planen, hvor $x_o \in I$, går der netop én løsningskurve til differentialligningen.

Øvelse 1.10:

a) Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen: $\frac{dy}{dx} = x \cdot e^x$, $x \in R$

   Bestem herefter den partikulære løsning, som går igennem punktet (–5 , 0).

b) Bestem den partikulære løsning til differentialligningen i eksempel 1.5, som går igennem punktet (3, 20000). ♥

Vi vender nu tilbage til problemstillingen omkring definitionsmængden for en løsning til en differentialligning, herunder til differentialligningen fra eksempel 1.2.

Eksempel 1.11.

I henhold til sætning 1.9 får vi, at den fuldstændige løsning til differentialligningen: $y' = \frac{1}{x}$ i intervallet $]0;\infty[$ er givet ved: $f(x) = \ln(x) + k$, $x \in]0;\infty[$, $k \in R$

På samme måde ses, at den fuldstændige løsning til differentialligningen: $y' = \frac{1}{x}$ i intervallet $]-\infty;0[$ er givet ved: $f(x) = \ln(-x) + c$, $x \in]-\infty;0[$, $c \in R$.

Alt i alt ses dermed, at den fuldstændige løsning til differentialligningen: $y' = \frac{1}{x}$ er givet ved:

$$f(x) = \begin{cases} \ln(x) + k , & x > 0 \\ \ln(-x) + c , & x < 0 \end{cases}$$

hvor k og c er vilkårlige, og ikke nødvendigvis ens (!), konstanter.
Hvis vi nu f.eks. ønsker ”den” løsning, der går igennem punktet (1 , 5), så er dette ikke muligt, idet værdien af <u>k</u> ganske vist <u>skal</u> være 5 , men for $x < 0$ er der ingen indskrænkninger, dvs. at c kan antage alle mulige værdier (svarende til alle mulige forskydninger af grafen for ln(–x) i andenaksens retning). Der er altså uendeligt mange løsninger, som går igennem (1 , 5).
Hvis vi derimod indskrænker os til at en løsning <u>skal</u> være defineret i et <u>interval</u>, så er der kun én løsning, der går igennem (1 , 5), nemlig: $f(x) = \ln(x) + 5$, $x \in]0;\infty[$. ♥

Med henblik på at sikre entydigheden af en løsning (jfr. bl.a. eksempel 1.11), og ud fra ønsket om at kunne anvende forskellige matematiske sætninger i behandling og omskrivning af differentialligninger mm. (se længere fremme i teksten), indfører vi nu følgende:

Konvention 1.12.

En løsning f til en differentialligning forudsættes at være defineret i et åbent interval I_f . I_f vælges størst muligt, og på en sådan måde, at det tilfredsstiller eventuelle supplerende krav til ligningen.

Denne konvention er gældende i resten af denne bog – og den er i øvrigt alment accepteret i forbindelse med løsning af differentialligninger af den type og på det niveau, vi skal anvende.
Som konsekvenser af konventionen kan nævnes følgende vigtige punkter:

- vi kan blive nødt til at indskrænke en given løsnings definitionsmængde (jfr. eksempel 1.11)
- en løsning f til en differentialligning skal altid angives med et tilhørende interval I_f
- intervallet afhænger af den fundne løsning, og vil ofte ikke være det samme for alle funktioner i den fuldstændige løsning (se f.eks. nedenstående eksempel 1.14 !).
  Dette er årsagen til det lille f på angivelsen I_f af intervallet.

Øvelse 1.13.

a) Bestem den løsning til differentialligningen: $y' = \frac{1}{x}$, som går igennem punktet $(-e^2 , 22)$.

b) Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen: $y' = \frac{1}{x^2}$

Bestem den løsning, som går igennem punktet (5, 10). ♥

Eksempel 1.14.

Vi vil bestemme de løsninger til differentialligningen: $y' = \tan^2(x)$, som går igennem punkterne $(0, -3)$ hhv. $(\frac{17\pi}{4}, 6)$. Vi ved (eller kan let kontrollere – gør det !), at funktionen: $F(x) = \tan(x) - x$ er en stamfunktion til $\tan^2(x)$. Ifølge sætning 1.9 og konvention 1.12 får vi hermed, at den fuldstændige løsning til $y' = \tan^2(x)$ er givet ved: $f(x) = \tan(x) - x + k$, $x \in I_f$ og $k \in R$, hvor I_f er et interval, hvor tan(x) er defineret (dvs. et interval af typen $\left]-\frac{\pi}{2} + p \cdot \pi \,;\, \frac{\pi}{2} + p \cdot \pi\right[$, hvor p er et helt tal).

a) Når vi skal bestemme den løsning f, som går igennem punktet (0, –3), så skal vi dels have fastlagt, hvilket interval vi skal bruge, dels hvilken værdi konstanten k skal have:
Vi ser, at vi må vælge intervallet $I_f = \left]-\frac{\pi}{2} \,;\, \frac{\pi}{2}\right[$ samt at $k = -3$. Den søgte løsning er altså:

$$f(x) = \tan(x) - x - 3 \quad , x \in \left]-\frac{\pi}{2} \,;\, \frac{\pi}{2}\right[$$

b) Når vi skal bestemme den løsning f , som går igennem punktet $(\frac{17\pi}{4}, 6)$, så skal vi igen have fastlagt, hvilket interval vi skal bruge, og hvilken værdi konstanten k skal have. Da $\frac{17\pi}{4} \in I_f$ skal være opfyldt, ser vi, at $I_f = \left]-\frac{\pi}{2} + 4 \cdot \pi \,;\, \frac{\pi}{2} + 4 \cdot \pi\right[= \left]\frac{7\pi}{2} \,;\, \frac{9\pi}{2}\right[$. Da det kræves, at $f(\frac{17\pi}{4}) = 6$ og da $\tan(\frac{17\pi}{4}) = 1$, ser vi, at vi skal vælge $k = 5 + \frac{17\pi}{4}$. Den søgte løsning er altså:

$$f(x) = \tan(x) - x + 5 + \frac{17\pi}{4} \quad , \quad x \in \left]\frac{7\pi}{2} \,;\, \frac{9\pi}{2}\right[$$ ♥

I det ovenstående har vi indledningsvist set, at der findes mange forskellige slags differentialligninger, og vi har fundet den fuldstændige løsning til differentialligninger af typen: $y' = h(x)$.

I kapitel 3 skal vi undersøge og bestemme de fuldstændige løsninger til differentialligninger af typerne: $y' = ky$, $y' = b - ky$, $y' = -k(y-K)$, $y' + g(x)\cdot y = h(x)$ og $y' = ky(M-y)$, hvor k, b, K og M er konstanter, og hvor g(x) og h(x) er kontinuerte funktioner.
I kapitel 5 skal vi se på en omskrivnings-/løsningsmetode til differentialligninger af typen: $y' = h(x)\cdot g(y)$, hvor h er en kontinuert funktion af den uafhængige variable x, og hvor g er en kontinuert funktion af den afhængige variable y (f.eks. differentialligningen i eksempel 1.1 b))
I kapitel 6 skal vi bestemme den fuldstændige løsning til andenordens differentialligninger af typen: $y'' = ay$, hvor a er en konstant, samt af typen: $y'' + p\cdot y' + q\cdot y = 0$, hvor p og q er konstanter.

Men inden vi slutter dette indledende kapitel, skal vi stifte kendtskab med endnu et begreb, nemlig de såkaldte <u>linieelementer</u>, ligesom vi skal se på en grafisk metode, der kan give en idé om, hvordan løsningskurverne til en given differentialligning ser ud. Metoden kan bruges ved 1.ordens differentialligninger, hvor det er muligt at isolere y' på den ene side af lighedstegnet, hvormed der på den anden side af lighedstegnet står et udtryk U(x,y), som kun afhænger af x og y, dvs. differentialligningen har formen:

$$y' = U(x,y)$$

(I eksempel 1.1 er differentialligningerne: a), b), d), e), f) og h) af denne type, og hvis $x>0$ eller $x<0$ er også differentialligningen c) af denne type).

Ved et <u>linieelement</u> forstår vi et talsæt $(x_o,y_o;\alpha)$, der grafisk <u>illustreres</u> af et lille liniestykke, som går igennem punktet (x_o,y_o) og som har hældningskoefficienten α.

En løsning til differentialligning $y' = U(x,y)$ er som omtalt en funktion f, der opfylder:

$$\text{For alle } x \in I_f: \; f'(x) = U(x, f(x))$$

Som bekendt angiver differentialkvotienten $f'(x)$ hældningskoefficienten for tangenten til løsningskurven i punktet (x, f(x)). Vi siger da, at <u>løsningen går igennem linieelementet</u> $(x, f(x); f'(x))$.
Disse linieelementer kan også angives ved: (x, f(x); U(x,f(x))) eller (x, y ; U(x,y)), hvor y = f(x).

Hvis vi for tilstrækkeligt mange og tilstrækkeligt tæt placerede punkter (x,y), hvor $x \in I_f$, tegner linieelementerne $(x, f(x); f'(x))$, så vil der fremkomme en figur med en masse små liniestykker, som kan give os en idé om, hvordan løsningskurverne til differentialligningen ser ud.

<u>Eksempel 1.15.</u>
På figur 1.1 ses en mængde af linieelementer svarende til differentialligningen: $y' = y + x$, dvs. linieelementerne har formen: (x, y; y+x), altså f.eks. (2, 1; 3). På figuren er desuden indtegnet fem forskellige løsningskurver. Den fuldstændige løsning kan vises at være: $f(x) = c\cdot e^x - x - 1$, $x \in \mathbb{R}$ og $c \in \mathbb{R}$ (jfr. sætning 3.6). Specielt er $f(x) = -x-1$ en løsning (svarende til c = 0), hvilket stemmer fint overens med figuren.

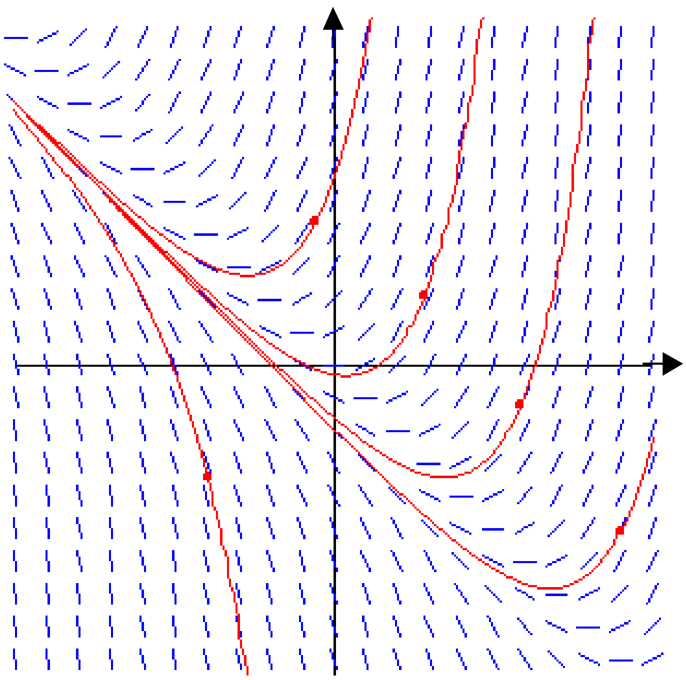


Fig. 1.1

Kap. 2: Indledende eksempler.

Radioaktivitet og stråling.

Eksempel 2.1.
Visse atomkerner har den egenskab, at de før eller siden "går i stykker" under udsendelse af radioaktiv stråling (som består af små "partikler"), hvorefter den tilbageblevne del af kernen ordner sig i en ny slags atomkerne. (Vi siger kort, at den radioaktive kerne henfalder).
Den radioaktive stråling kan måles med et såkaldt Geiger-Müller-rør ("Geigertæller"), idet man måler strålingens aktivitet dvs. antal registrerede partikler pr. sekund.
For radioaktive atomkerner forholder det sig således, at uanset hvor lang tid en kerne har eksisteret, så vil der være den samme sandsynlighed for, at kernen henfalder i løbet af det næste sekund. (Man sammenligner her ofte kernen med en terning: Uanset hvor mange gange man har kastet en terning (svarende til: uanset hvor lang tid der er gået), så vil der være den samme sandsynlighed for at få en 6'er i det næste kast (hvor det at få en 6'er svarer til, at kerne henfalder)).

Hvis vi nu tænker os, at vi til et givet tidspunkt t har et stort antal kerner N(t) af et givet radioaktivt stof, så vil antallet af kerner, som henfalder i løbet af det næste sekund, være proportional med N(t).
Hvis vi betragter et lille tidsrum Δt ("lille" i fht. den "hastighed", hvormed kernerne henfalder), så vil antallet af kerner, der henfalder i løbet af tidsrummet Δt stort set være proportional med Δt.
Ændringen ("tilvæksten") ΔN i antallet af radioaktive kerner i løbet af et lille tidsrum Δt vil derfor alt i alt tilnærmelsesvist være givet ved:

$$\Delta N \approx -k\cdot N(t)\cdot\Delta t$$

hvor "cirka-lig-med-tegnet" $\approx$ mere og mere bliver til et lighedstegn, jo tættere Δt er på 0.
k er proportionalitetsfaktoren, som kaldes henfaldskonstanten (Mere præcist er k lig med sandsynligheden pr. tidsenhed for at en given kerne henfalder – se nedenfor). Minusset foran k medtages, idet N bliver mindre, dvs. idet ΔN er negativ, og idet vi ønsker at k skal være en positiv konstant.
Ved division med Δt får vi differenskvotienten for N(t):

$$\frac{\Delta N}{\Delta t} \approx -k\cdot N(t)$$

og hvis vi lader Δt gå mod 0 får vi, at tegnet $\approx$ erstattet af et lighedstegn, samtidig med at differenskvotienten bliver til differentialkvotienten.
Funktionen N(t), som beskriver antallet af ikke-henfaldne kerner til tiden t, opfylder altså ligningen:

$$N'(t) = -k\cdot N(t)$$

Vi vender senere tilbage til løsning af denne ligning.

Af udtrykket: $\Delta N \approx -k\cdot N(t)\cdot\Delta t$ får vi ved omskrivning, at $\frac{-\Delta N}{N(t)} \approx k\cdot\Delta t$. Idet $-\Delta N$ angiver antallet af kerner, der henfalder i løbet af det lille tidsinterval Δt, og idet N(t) angiver hvor mange kerner vi har ved starten af dette tidsinterval, er brøken $\frac{-\Delta N}{N(t)}$ det samme som (den frekventielle) sandsynlighed for, at en kerne vil henfalde i løbet af tidsrummet Δt.
Da denne brøk cirka er lig med $k\cdot\Delta t$ ser vi (som omtalt ovenfor), at henfaldskonstanten k er det samme som sandsynligheden pr. tidsenhed for, at en given kerne henfalder. ♥

<u>Eksempel 2.2.</u>
Efter samme princip som anvendtes i eksempel 2.1 kan vi undersøge intensiteten af visse typer stråling, når strålingen trænger ind igennem stof/materiale. (Der er tale om gammastråling, røntgenstråling og i en række sammenhænge også betastråling).

Strålingens intensitet, der er lig med antallet af ”partikler”, som pr. sekund passerer en arealenhed (f.eks.1 cm^2), vil aftage p.gr.a. absorption i materialet (stoffet).
Hvis intensiteten i dybden x er lig med I(x), så vil intensitetsændringen ΔI i et <u>smalt</u> materialelag Δx (se figur 2.1) tilnærmelsesvist være proportional med I(x) og med Δx. (At materialelaget er ”smalt”, og at Δx dermed er ”lille” skal ses i forhold til den ”hastighed” hvormed materialet absorberer strålingen på sin vej ind igennem materialet).

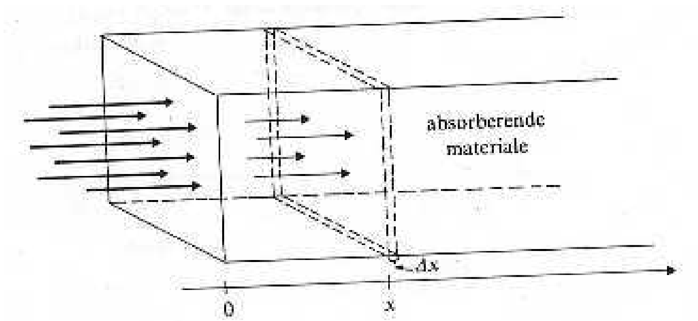


Fig. 2.1

Vi har således, idet ΔI er negativ, at $\Delta I \approx -\mu \cdot I(x) \cdot \Delta x$, hvor proportionalitetsfaktoren μ kaldes <u>absorptionskoefficienten</u> for det pågældende materiale i relation til den givne stråling. μ måles i m^{-1}.
Ved at dividere med Δx og anvende, at Δx er meget lille (dvs. lade Δx gå mod 0), får vi, at funktionen I(x), der beskriver intensiteten af strålingen i dybden x i et givet materiale, opfylder ligningen:

$$I'(x) = -\mu \cdot I(x).$$

Vi vender senere tilbage til løsning af denne ligning. ♥

<u>Eksempel 2.3.</u>
Nogle radioaktive kerner henfalder (via α- eller β-henfald) til en ny kerne, som også er radioaktiv. Dette gælder f.eks. for følgende henfaldsprocesser:

(1) $La^{150} \rightarrow Ce^{150} \rightarrow Pr^{150} \rightarrow ....$ (De to første pile står her for β-henfald)

(2) $Sm^{148} \rightarrow Nd^{144} \rightarrow Ce^{140}$ (De to pile står her for α-henfald)

(3) $U^{238} \rightarrow Th^{234} \rightarrow Pa^{234} \rightarrow ...$ (Den første pil står her for et α-henfald og den næste for et β-henfald)

Vi taler i sådanne tilfælde om moder-datter-henfald, hvor den første kerne kaldes moder-kernen og det den henfalder til kaldes datter-kernen.
Hvis moderkernen ikke selv er datter-kerne for en anden kerne, men altså ”ligger først” i processen (hvilket bl.a. gælder for de tre omtalte eksempler på henfaldsprocesser), så er det muligt at opstille en matematisk model for antallet af ikke-henfaldne kerner for både moder-kernerne og for datterkernerne. Dette foregår på følgende måde:

Som i eksempel 2.1 gælder for antallet M(t) af moderkerner til tiden t, at

$$\Delta M \approx -k_m \cdot M(t) \cdot \Delta t$$

hvor k_m er henfaldskonstanten for moderkernernes henfald og Δt er et lille tidsinterval.

For datterkernerne gælder dels, at der bliver færre af dem p.gr.a. deres henfald, samt at der bliver flere af dem p.gr.a. moderkernernes henfald. Hvis D(t) står for antallet af datterkerner til tiden t, så har vi, at:

$$\Delta D \approx -k_d \cdot D(t) \cdot \Delta t + (-\Delta M)$$

hvor k_d er henfaldskonstanten for datterkernens henfald. Bemærk, at ΔM er negativ (der bliver færre moderkerner), hvorfor tallet $-\Delta M$ er det antal moderkerner, der henfalder i løbet af tidsrummet Δt, dvs. $-\Delta M$ er det antal datterkerner, der skabes ved henfald i løbet af Δt.

Vi ser dermed, at ΔD kan skrives på følgende måde:

$$\Delta D \approx -k_d \cdot D(t) \cdot \Delta t + k_m \cdot M(t) \cdot \Delta t$$

Ved division med Δt på begge sider af lighedstegnet får vi differenskvotienten for D(t), og ved at lade Δt gå mod 0 får vi, at tegnet $\approx$ erstattet af et lighedstegn samtidig med at differenskvotienten bliver til differentialkvotienten, dvs. vi får at:

$$D'(t) = -k_d \cdot D(t) + k_m \cdot M(t)$$

Vi skal senere vise, at $M(t) = M_o \cdot e^{-k_m \cdot t}$. Hvis dette indsættes i udtrykket for $D'(t)$, hvor vi samtidig flytter første led over på den anden side lighedstegnet, så får vi i alt, at funktionen D(t), som beskriver antallet af datterkerner til tiden t, opfylder ligningen:

$$D'(t) + k_d \cdot D(t) = k_m \cdot M_o \cdot e^{-k_m \cdot t}$$

Vi vender senere tilbage til løsning af denne ligning. ♥

Temperatur-udligning.

Eksempel 2.4.

Hvis et givet legeme A har temperaturen T(t) til tiden t, og hvis dette legeme bringes i kontakt med et ”stort legeme” B med temperaturen T_o , så vil A’s temperatur efterhånden indstille sig på temperaturen T_o. (Det ”store legeme” er altså så stort, at dets temperatur praktisk talt er konstant – dets temperatur er altså i praksis upåvirket af, at det afkøler eller opvarmer A. Overvej dette !! Vi kan f.eks. tænke på en ovnplade med småkager, som tages ud af den varme ovn og anbringes på køkkenbordet. Det ”store legeme” er her køkkenbordet, al luften og principielt øvrige objekter i lokalet).

Den temperaturstigning ΔT, som sker i løbet af et lille tidsrum Δt, må tilnærmelsesvist være proportional med forskellen imellem temperaturerne T(t) og T_o, og med Δt selv. Vi har altså, at

$$(*) \qquad \Delta T \approx -a \cdot (T(t) - T_o) \cdot \Delta t$$

hvor a er en positiv konstant. (Det overlades til læseren at argumentere for, at minusset skal medtages i udtrykket !). Konstanten a afhænger af en række ting, bl.a. af A’s overfladeareal, af den hastighed hvormed varmen i legemet B kan føres bort fra eller hen imod A, og af varmeledningsevnen af en eventuel grænseoverflade mellem A og B (tænk f.eks. på forskellen i afkøling af te i en tekande uden tehætte, med tehætte og i en termokande).

Udtrykket (∗) kan, idet Δt er lille (dvs. ved at lade Δt gå mod 0), omskrives til:

$$\frac{dT}{dt} = -a \cdot (T(t) - T_o) \qquad \text{eller} \qquad T'(t) = -a \cdot (T(t) - T_o)$$

Dette udtryk kaldes Newton's afkølingslov, selvom den både gælder for afkøling og opvarmning under de beskrevne forudsætninger om legeme A og B.
Vi vender senere tilbage til løsning af denne ligning. ♥

Eksempel 2.5.
Vi tænker os nu, at to legemer har forskellige begyndelsestemperaturer $T_1(0)$ og $T_2(0)$, at de er i termisk kontakt og er af sammenlignelige størrelser, samt at de er isoleret fra omgivelserne. Temperaturudligningen forekommer, idet legemerne er i termisk kontakt med hinanden (kan udveksle varmeenergi (på mikroskopisk niveau) med hinanden). At der er tale om legemer af "sammenlignelig størrelse" betyder, en temperaturforandring af det ene legeme vil føre til en målbar temperaturforandring af det andet legeme. (Der er således ikke – som i eksempel 2.4 – tale om et stort og et lille legeme, hvor det store legemes temperatur kan antages at være konstant).

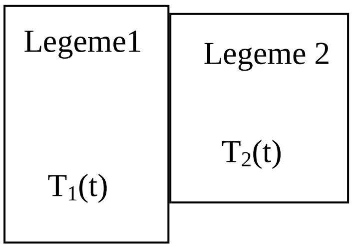


Fig. 2.2

Lad Δt være et lille tidsinterval, og lad ΔT_1 og ΔT_2 være temperaturtilvæksten af hvert af de to legemer i løbet at tidsintervallet Δt. Der gælder da (overvej !!), at der findes to positive konstanter q_1 og q_2 ,så:

$$\Delta T_1 \approx -q_1 \cdot (T_1(t) - T_2(t)) \cdot \Delta t \qquad \text{og} \qquad \Delta T_2 \approx -q_2 \cdot (T_2(t) - T_1(t)) \cdot \Delta t$$

Værdien af q afhænger af en række faktorer, herunder masse og varmefylde for de respektive legemer. Der gælder, at $\Delta T_1 \neq \Delta T_2$ (bl.a. – men ikke alene - fordi de har forskelligt fortegn).
Hvis vi derimod ser på energiudvekslingen imellem de to legemer, så gælder der (hvorfor ?), at $\Delta E_1 + \Delta E_2 = 0$, hvor ΔE betyder (varme)energitilvæksten. Som bekendt gælder der desuden, at $\Delta E_1 = C_1 \cdot \Delta T_1$ og $\Delta E_2 = C_2 \cdot \Delta T_2$, hvor C_1 og C_2 er varmekapaciteterne af de to legemer.
Ud fra disse oplysninger kan vi foretage følgende beregninger:

$$\Delta E_1 + \Delta E_2 = 0 \;\Rightarrow\; C_1 \cdot \Delta T_1 + C_2 \cdot \Delta T_2 = 0 \;\Rightarrow\; C_1 \cdot \frac{\Delta T_1}{\Delta t} + C_2 \cdot \frac{\Delta T_2}{\Delta t} = 0$$

Da Δt er lille (dvs. ved at lade Δt gå mod 0), får vi heraf, at: $C_1 \cdot T_1'(t) + C_2 \cdot T_2'(t) = 0$, og dermed, at: $T_2'(t) = -\frac{C_1}{C_2} \cdot T_1'(t)$, hvilket skal bruges i beregningerne nedenfor.

Da Δt er lille, får vi af udtrykket: $\Delta T_1 \approx -q_1 \cdot (T_1(t) - T_2(t)) \cdot \Delta t$, at: $T_1'(t) = -q_1 \cdot (T_1(t) - T_2(t))$
Hvis vi differentierer $T_1'(t)$ – og dermed finder den dobbelt afledede af $T_1(t)$ (se evt. Appendix 1) – og herefter anvender det ovenfor fundne resultat for $T_2'(t)$, så får vi følgende:

$$T_1'(t) = -q_1 \cdot (T_1(t) - T_2(t)) \quad \Rightarrow \quad T_1''(t) = -q_1 \cdot (T_1'(t) - T_2'(t)) \quad \Rightarrow$$

$$T_1''(t) = -q_1 \cdot (T_1'(t) + \frac{C_1}{C_2} T_1'(t)) \quad \Rightarrow \quad T_1''(t) = -q_1 \cdot (1 + \frac{C_1}{C_2}) \cdot T_1'(t) \quad \Rightarrow$$

$$T_1''(t) = -\alpha \cdot T_1'(t) \text{ , hvor } \alpha = q_1 \cdot (1 + \frac{C_1}{C_2}) \text{ er en positiv konstant.}$$

Vi vender senere tilbage til løsning af disse ligninger. ♥

Biologi og medicin

Eksempel 2.6.
Vi vil i dette eksempel betragte en gærcellepopulation, som vokser ved celledeling under optimale vilkår (fastlagt ved korrekt temperatur, rigelig næringsmængde og plads, o.lign.).
Til et givet tidspunkt t har vi N(t) gærceller pr. ml i en næringsopløsning. Forøgelse ΔN i antallet af gærceller, som i et lille tidsinterval Δt foregår p.gr.a. celledeling (Δt "lille" set i fht. den "hastighed" hvormed en celle deler sig), er tilnærmelsesvist proportional med både N(t) og med Δt, hvormed vi får, at $\Delta N \approx r \cdot N(t) \cdot \Delta t$, hvor r er en positiv proportionalitetsfaktor. (r beskriver sandsynligheden for celledeling pr. celle pr. tidsenhed).
Ved division med Δt på begge sider af lighedstegnet får vi differenskvotienten for N(t), og ved at lade Δt gå mod 0 (Δt er "lille") får vi, at tegnet $\approx$ erstattes af et lighedstegn samtidig med at differenskvotienten bliver til differentialkvotienten. Funktionen N(t), som beskriver antallet af gærceller pr. ml til tiden t, opfylder altså ligningen:

$$N'(t) = r \cdot N(t)$$

Vi vender senere tilbage til løsning af denne ligning.

Det skal bemærkes, at denne model for en gærcelle-populations vækst kun gælder ved optimale vilkår. Hvis der bliver pladsmangel, næringsmangel, for høj koncentration af affaldsstoffer eller en forkert temperatur, vil reproduktionsraten (dvs. det enkelte "individs" evne til reproduktion pr. tidsenhed) begynde at aftage. Dette vil vi behandle senere (se eksempel 2.10).

Den omtalte matematiske model kan også beskrive andre populationers vækst. Hvis der i en given population både er tale om "fødsler" og "dødsfald", så angiver størrelsen r forskellen imellem fødselsraten (dvs. antallet af fødsler pr. individ pr. tidsenhed) og dødsraten (dvs. antallet af dødsfald pr. individ pr. tidsenhed). Dette vil vi imidlertid ikke komme yderligere ind på her. ♥

Eksempel 2.7.
Alt levende væv er opbygget af celler. Disse celler består bl.a. af en cellekerne, noget "cellevæske" (cytoplasma) og en cellevæg (cellemembranen) (se figur 2.3).

Der kan gennem cellemembranen diffundere stoffer både ind og ud af cellen. Det er bl.a. på denne måde, at næring optages og affaldsstoffer udskilles af cellen.

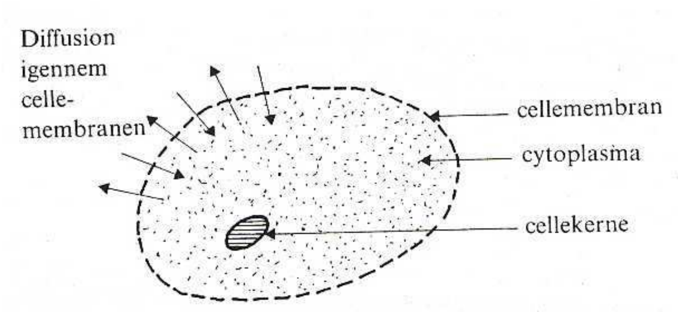


Fig. 2.3

Lad os nu prøve at undersøge den situation, hvor et bestemt stof findes i en given koncentration c_o udenfor cellen, medens koncentrationen c(t) af stoffet inde i cellen er en funktion af tiden. Vi antager altså, at cellens omgivelser er så "store", at koncentrationen dér kan betragtes som konstant, uanset om cellen optager (eller udskiller) lidt af det pågældende stof.
Spørgsmålet er nu: Hvordan vil koncentrationen c(t) opføre sig efterhånden som tiden går ?

Vi må forvente, at stoffet vil diffundere igennem cellemembranen i en retning, som udligner forskellen i koncentrationen.
Vi må ligeledes forvente, at den ændring $\Delta c(t)$ af koncentrationen af stoffet inde i cellen, som sker i løbet af et lille tidsrum Δt, tilnærmelsesvist er proportional med Δt og med forskellen i koncentrationerne c(t) og c_o. Vi kan derfor tillade os at skrive:

$$\Delta c(t) \;\approx\; -k\cdot(c(t)-c_o)\cdot\Delta t$$

Her er k en positiv konstant, som fortæller noget om cellemembranens "gennemtrængelighed" for det pågældende stof. Minusset medtages, idet c(t) aftager, hvis $c(t) > c_o$, dvs. hvis $c(t) - c_o > 0$, medens c(t) vokser, hvis $c(t) < c_o$, dvs. hvis $c(t) - c_o < 0$.
Idet Δt er meget lille, kan udtrykket (efter division med Δt) omskrives til:

$$\frac{dc(t)}{dt} = -k(c(t)-c_0) \quad \text{eller} \quad c'(t) = -k(c(t)-c_0)$$

Ved at finde en funktion, som opfylder den opstillede ligning, kan vi altså klarlægge udviklingen af koncentrationen af stoffet i cellen efterhånden som tiden går.
Vi vender senere tilbage til løsning af denne ligning. ♥

Eksempel 2.8.
Vi skal her opstille en model for diffusion af et stof imellem to "afdelinger" i en organisme (f.eks. et menneskes krop). Disse to "afdelinger" kan f.eks. være det intracellulære område (dvs. væsken inde i cellerne) og det extracellulære område (dvs. væsken udenfor cellerne, bl.a. vævsvæsken).
I modsætning til eksempel 2.7 vil vi her "tillade" (dvs. lade indgå i beregningerne), at koncentrationen af stoffet i "omgivelserne", altså f.eks. i det extracellulære område, varierer med tiden. Men vi vil antage, at det pågældende stof ikke – eller i hvert fald kun relativt langsomt – udskilles af organismen. Vi bemærker altså, at den samlede stofmængde i organismen antages at være konstant.
Den beskrevne situation kan illustreres skematisk på følgende måde (Figur 2.4):

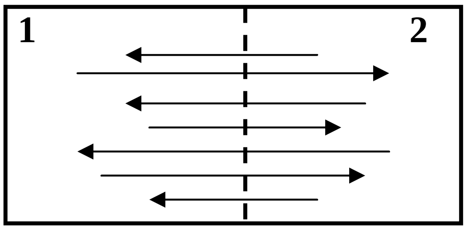


Fig. 2.4

Læseren bedes overveje hvilke stoffer, der kunne tænkes at være tale om hér, hvordan sådanne stoffer kunne tænkes at være kommet ind i organismen, samt hvad det vil sige, at stoffet udskilles relativt langsomt !

Som angivet på figur 2.4 kalder vi de to afdelinger for hhv. afd. 1 og afd. 2. Og i det følgende anvendes følgende betegnelser:

- V_1 og V_2 er rumfangene af væsken i afd. 1 og afd. 2.
- $V = V_1 + V_2$ (V er altså det samlede rumfang)
- $m_1(t)$ og $m_2(t)$ er masserne af det betragtede stof i afd. 1 og afd. 2 til tiden t.
- $m = m_1(t) + m_2(t)$ (m er altså den samlede masse af stoffet i organismen, og denne masse antages som omtalt at være konstant i den tidsperiode vi ser på hér).
- $c_1(t)$ og $c_2(t)$ er koncentrationerne af stoffet i afd. 1 og afd. 2 til tiden t.

Rumfangene måles typisk i liter, tiden i sekunder eller minutter, masserne i mg og koncentrationerne i mg/liter.
Det overlades til læseren at overveje/argumentere for, at der gælder, at:

$$(*) \qquad c_1(t) = \frac{m_1(t)}{V_1} \quad , \quad c_2(t) = \frac{m_2(t)}{V_2} \quad \text{og} \quad V_1 \cdot c_1(t) + V_2 \cdot c_2(t) = m$$

Spørgsmålet er: Hvordan vil koncentrationerne $c_1(t)$ hhv. $c_2(t)$ opføre sig efterhånden som tiden går?
Vi vil først se på c_1 :

Vi må forvente, at stoffet vil diffundere igennem de to afdelinger i en retning, som udligner forskellen i koncentrationen.
Vi må ligeledes forvente, at den ændring $\Delta c_1(t)$ af koncentrationen af stoffet i afdeling 1, som sker i løbet af et lille tidsrum Δt, tilnærmelsesvist er proportional med Δt og med forskellen i koncentrationerne $c_1(t)$ og $c_2(t)$.
Vi kan derfor tillade os at skrive:

$$\Delta c_1(t) \approx -\alpha \cdot (c_1(t) - c_2(t)) \cdot \Delta t$$

Her er α en positiv konstant, som fortæller noget om "gennemtrængelighed" for det pågældende stof imellem de to afdelinger.
Det overlades til læseren at argumentere for, hvorfor minusset foran α medtages.

Idet Δt er meget lille, kan udtrykket (efter division med Δt) omskrives til:

$$(**) \qquad \frac{dc_1(t)}{dt} = -\alpha \cdot (c_1(t) - c_2(t)) \quad \text{eller} \quad c_1'(t) = -\alpha \cdot (c_1(t) - c_2(t))$$

Ud fra (∗) får vi (kontrollér !), at: $c_2(t) = \frac{m}{V_2} - \frac{V_1}{V_2}\cdot c_1(t)$

Indsættes dette i (∗∗) får vi efter lidt omskrivning (kontrollér !) , at:

$$(***) \quad c_1'(t) = -\beta\cdot(c_1(t) - \frac{m}{V})$$

hvor vi har indført en ny konstant β givet ved: $\beta = \alpha\cdot(1+\frac{V_1}{V_2})$.

Vi vender senere tilbage til løsning af denne differentialligning for dermed at få bestemt et udtryk for $c_1(t)$, ligesom vi vender tilbage til beregning af et udtryk for koncentrationen $c_2(t)$. Desuden vil modellen i kapitlet 6 om 2.ordens differentialligninger blive udvidet til at omfatte den situation, hvor det aktuelle stof relativt hurtigt udskilles af organismen (typisk via nyrerne). ♥

Eksempel 2.9.

Visse giftstoffer, tungmetaller o.lign. herunder bly, udskilles meget langsomt af organismen, bl.a. fordi det optages i knogler o.lign. Vi vil i dette eksempel se nærmere på bly.
En person har igennem en kortere tidsperiode været udsat for blyforgiftning. Hvis personen ikke optager yderligere bly, vil blyindholdet langsomt udskilles idet der vil gælde følgende (overvej !):
$B'(t) = -U_{Pb}\cdot B(t)$, hvor U_{Pb} er en konstant, der kaldes udskillelseskoefficienten for bly.

Desværre forholder det sig ofte således, at man gennem maden af forskellige årsager jævnligt optager en smule bly. Hvis vi antager, at der pr. døgn optages O_{Pb} mg bly, så kan ændringshastigheden $B'(t)$ (målt i mg pr. døgn) af organismens blyindhold udtrykkes således (overvej !):

$$B'(t) = O_{Pb} - U_{Pb}\cdot B(t)$$

Vi vender senere tilbage til løsning af denne ligning for at finde en funktionsforskrift for B(t). ♥

Eksempel 2.10.

I eksempel 2.6 beskrev vi den situation, hvor antallet af individer i en given population (i det konkrete tilfælde gærceller) vokser under optimale vilkår. En sådan vækst kan imidlertid ikke fortsætte i det uendelige, idet populationstætheden efterhånden bliver så stor, at der begynder at være mangel på føde eller plads (herunder områder med tilstrækkelig lav koncentration af affaldsstoffer) for de enkelte individer. Populationens vækstrate vil derfor aftage.
Hvis vi antager, at det miljø, som populationen lever i, har en given bærekapacitet K, (dvs. en øvre grænse for antallet af individer, der kan eksistere i miljøet), så kan vi opstille en tæthedsafhængig model for populationsvæksten på følgende måde:
Den forøgelse ΔN i antallet af individer i populationen, som foregår i et lille tidsinterval Δt, antages tilnærmelsesvist at være proportional med det aktuelle antal N(t), med det antal individer $K - N(t)$, som der endnu er plads til i miljø, samt med Δt. (Overvej rimeligheden af disse antagelser !!).
Vi får således:

$$\Delta N \approx s\cdot N(t)\cdot(K - N(t))\cdot\Delta t$$

Ved at dividere med Δt på begge sider af lighedstegnet samt udnytte, at Δt er lille, får vi følgende ligning, der beskriver udviklingen i antallet af individer N(t) i det betragtede miljø:

$$N'(t) = s\cdot N(t)\cdot(K - N(t))$$

Vi vender senere tilbage til løsning af denne ligning. ♥

Økonomiske, behavioristiske emner.

De følgende modeller kaldes som anført "økonomiske, behavioristiske modeller".
Den økonomiske benævnelse er medtaget, idet der arbejdes med størrelser, som spiller en rolle for de betragtede virksomheders økonomiske resultater. Den behavioristiske benævnelse skyldes, at de medtagne eksempler alle bygger på menneskers/kunders opfattelse og adfærd, hvormed der bestemt ikke kun er tale om økonomi, men også en række andre faktorer (behavioristisk = adfærds-/handlings-/reaktionsmæssigt).
Modeller af den pågældende type er særdeles nyttige, såvel i forbindelse med økonomiske og sociologiske uddannelser som ved arbejdet med de relevante, grundlæggende mekanismer i "virkeligheden".
I forbindelse med uddannelser drejer det sig om de studerendes indlæring (forståelse og erkendelse) af økonomiske, behavioristiske sammenhænge, og om at have et kvantitativt beskrivelsesmiddel til mekanismer, der er vanskeligt forklarlige i en kvalitativ formulering.
Også i "virkeligheden" drejer det sig – for de mennesker, der arbejder med disse emner – om at have en grundlæggende og solid forståelse af og kendskab til økonomiske, behavioristiske sammenhænge. Mulighederne for i praksis at opstille brugbare modeller begrænses af en række faktorer. Først og fremmest skal de relevante medarbejdere kunne håndtere dette, men hertil kommer, at noget af det vanskeligste ved de økonomiske, behavioristiske modeller <u>i praksis</u> er at vælge en korrekt modeltype og at bestemme størrelsen/værdien af de parametre, der indgår i modellerne. Desuden spiller det behavioristiske element en sådan rolle, at der ofte bør arbejdes med stokastiske modeller (dvs. modeller der tager højde for tilfældigheder i og sandsynligheder for f.eks. kunders reaktionsmønster) som <u>supplement</u> til de her præsenterede deterministiske modeller (dvs. modeller hvor der på forhånd og med sikkerhed kan beskrives, hvad der vil ske). Men de <u>grundlæggende mekanismer</u>, der præsenteres via de deterministiske modeller, fungerer imidlertid fint i "virkeligheden".

<u>Eksempel 2.11.</u>
I dette eksempel betragtes effektiviteten af en medarbejder i en virksomhed. Medarbejderen fremstiller produktet P.
Vi vil tænke os, at der enten er tale om en ny medarbejder eller et nyt produkt – eller evt. begge dele. Til at begynde med er effektiviteten mindre god, men p.gr.a. indlæring forøges effektiviteten, hvormed den anvendte tid T pr. enhed af P aftager. Ved den optimalt opnåelige effektivitet er tidsforbruget T_{opt} pr. enhed. (Tiderne kan f.eks. måles i minutter)
Almindeligvis vil det være sådan, at jo tættere medarbejderen kommer på den optimale tid, desto vanskeligere bliver det at forbedre effektiviteten. Vi lader nu x betegne det antal enheder af P, som medarbejderen i alt har produceret, og T(x) betegne den tid, der anvendes til produktion af den næste enhed, når medarbejderen har produceret x enheder.
Det må da være rimeligt at antage (overvej !), at tilvæksten ΔT i T(x), der svarer til en <u>lille</u> tilvækst i antallet Δx, tilnærmelsesvist er proportional med såvel $T(x) - T_{opt}$, dvs. med forskellen mellem den faktisk anvendte tid og den optimale tid, som med Δx. Der gælder således:

$$\Delta T \approx -s\cdot(T(x) - T_{opt})\cdot\Delta x$$

hvor s er en positiv konstant, der fortæller noget om indlæringshastigheden. Minusset foran s'et er medtaget, idet ΔT er negativ, idet T(x) aftager. (Bemærk, at $T(x) > T_{opt}$ og $\Delta x > 0$).
Ved at dividere med Δx, og ved at bemærke, at Δx er lille (dvs. ved at lade Δx gå mod 0), får vi:

$$T'(x) = -s\cdot(T(x) - T_{opt})$$

Ved at løse denne ligning kan vi finde et funktionsudtryk for T(x). Vi vender senere tilbage hertil. ♥

<u>Eksempel 2.12.</u>
Virksomheden "Cleanpaper" markedsfører en ny type miljøvenlige køkkenruller. Virksomheden regner med at kunne erobre en vis del af markedet, således at det solgte antal køkkenruller s(t) pr.

dag efter en kortere eller længere indtrængningsperiode når op på værdien M, hvor markedet siges at være mættet. Det er klart, at salget pr. dag vokser mest ”frit” (uhindret) i begyndelsen (i tiden efter lanceringen på markedet), men at væksten i salget pr. dag efterhånden bremses op, jo tættere salget kommer på mætningsværdien M.
Vi kan derfor med rimelighed antage, at hvis Δt er et ”lille” tidsinterval, så er forøgelsen Δs i salget pr. dag tilnærmelsesvist proportional med både det aktuelle salgstal pr. dag, med afstanden til mætningen, og med Δt, dvs.

$$\Delta s \;\approx\; c\cdot s(t)\cdot(M - s(t))\cdot\Delta t$$

hvor c er proportionalitetsfaktoren. (Overvej rimeligheden af disse antagelser !!).
Ved at dividere med Δt på begge sider af lighedstegnet og udnytte, at Δt er lille, får vi i alt, at salgstallet pr. dag opfylder følgende ligning:

$$s'(t) \;=\; c\cdot s(t)\cdot(M - s(t))$$

Vi vender senere tilbage til løsning af denne ligning. ♥

<u>Eksempel 2.13.</u>
En kendt europæisk bilkoncern, (som i dette eksempel gives navnet APF), har målt deres kunders loyalitet som funktion af tilfredsheden med den service, som kunderne oplever i forbindelse med køb og vedligeholdelse af APF-biler.
Loyaliteten defineres som kundernes ønske om igen at købe en APF-bil, hvis de skulle købe en ny bil. Loyaliteten L angives i %. Hvis f.eks. L = 48 % , så betyder det, at 48 % af den nuværende kundemasse på ny ville købe en APF-bil.
Tilfredsheden T måles på en skala fra 0 til 100, (svarende til fra 0 %’s til 100 %’s tilfredshed).

Ved opstilling af en matematisk model til beskrivelse af loyaliteten som funktion af tilfredsheden antages, at der findes en øvre loyalitetsgrænse L_{max} , som ikke kan overskrides uanset hvor sublim en service man fra APF’s side måtte give kunderne. Der er altså en vis procentdel af de nuværende APF-ejere, som under alle omstændigheder vil skifte bilmærke. I øvrigt er det klart, at ved lave tilfredshedsværdier vokser loyaliteten relativt frit, hvis servicen (og dermed tilfredsheden) forøges, hvorimod det er vanskeligere at forøge loyaliteten yderligere (selv med en kraftig forøgelse af serviceniveauet), hvis loyaliteten er relativ tæt på den øvre loyalitetsgrænse.
Om loyaliteten L som funktion af tilfredsheden T kan vi derfor i den matematiske model antage, at tilvæksten ΔL i loyaliteten ved en <u>lille</u> forøgelse ΔT i tilfredsheden tilnærmelsesvist er proportional med ΔT og med såvel den aktuelle loyalitetsværdi L(T) som med afstanden til loyalitetesgrænsen L_{max} . Vi får altså, at der findes en proportionalitetskonstant α, så følgende ligning gælder:

$$\Delta L \;\approx\; \alpha\cdot L(T)\cdot(L_{max} - L(T))\cdot\Delta T$$

Ved at dividere på begge sider af lighedstegnet med ΔT samt anvende, at ΔT er lille, så får vi i alt, at loyalitetsfunktionen L(T) som funktion af tilfredsheden T opfylder følgende ligning:

$$L'(T) \;=\; \alpha\cdot L(T)\cdot(L_{max} - L(T))$$

Vi vender senere tilbage til løsning af denne ligning. ♥

Alle de i dette kapitel omtalte differentialligninger er eksempler på 1.ordens differentialligninger.
Løsningerne vil blive gennemgået i kapitel 4: ”Løsninger mm. til indledende eksempler”.
Men inden da skal teorien bag løsning af sådanne differentialligninger gennemgås via kapitel 3: ”Teori – nogle 1.ordens differentialligninger”. (Se desuden kapitel 1: ”Indledende teori om differentialligninger ”).

Kap. 3: Teori – nogle 1.ordens differentialligninger.

Sætning 3.1.
Hvis en funktion f opfylder, at: $f'(x) = k\cdot f(x)$ for alle x i et interval I, hvor k er en given konstant, så findes der en anden konstant c, så funktionsforskriften for f er givet ved: $f(x) = c\cdot e^{kx}$, $x \in I$.

Dette kan også formuleres således:
Differentialligningen $y' = ky$ har den fuldstændige løsning: $y = c\cdot e^{kx}$, hvor $c \in R$

Bevis:
Vi laver et lille "trick" og betragter funktionen: $f(x)\cdot e^{-kx}$. Om denne funktion gælder:
$(f(x)\cdot e^{-kx})' = f'(x)\cdot e^{-kx} + f(x)\cdot e^{-kx}\cdot(-k) = k\cdot f(x)\cdot e^{-kx} - k\cdot f(x)\cdot e^{-kx} = 0$
hvor vi har anvendt sætningen om differentiation af et produkt samt forudsætningen: $f'(x) = k\cdot f(x)$.
Hvis en funktions differentialkvotient er 0 for alle x, så er funktionen konstant. Der findes altså en konstant c, så $f(x)\cdot e^{-kx} = c$ for alle x. Ved at gange på begge sider af lighedstegnet med e^{kx} får vi , at: $f(x) = c\cdot e^{kx}$, hvormed sætningen er bevist. ♥

Eksempel 3.2.
Hvis det om en funktion H(p) er givet, at $H'(p) = 0{,}5\cdot H(p)$ for alle p, samt at H(5) = 12000, så findes der ifølge sætning 3.1 en konstant c, så $H(p) = c\cdot e^{0,5\cdot p}$. Konstanten c findes ved at benytte oplysningen H(5) = 12000 på følgende måde:

$$H(5) = 12000 \Leftrightarrow c\cdot e^{0,5\cdot 5} = 12000 \Leftrightarrow c = 985{,}02$$

Vi ser dermed i alt, at:

$$H(p) = 985{,}02\cdot e^{0,5\cdot p} \quad , p \in R$$

<u>Øvelse:</u> Tegn grafen for H(p), $p \geq 0$ ♥

Sætning 3.3.
Hvis en funktion f opfylder, at: $f'(x) = b - k\cdot f(x)$ for alle x i et interval I, hvor k og b er givne konstanter ($k \neq 0$), så findes der en anden konstant c, så funktionsforskriften for f er givet ved:

$$f(x) = \frac{b}{k} + c\cdot e^{-k\cdot x} \quad , x \in I$$

Dette kan også formuleres således:
Differentialligningen $y' = b - k\cdot y$ har den fuldstændige løsning: $y = \frac{b}{k} + c\cdot e^{-kx}$, hvor $c \in R$

Bevis:
Funktionen f opfylder "næsten" forudsætningerne i sætning 3.1, hvis det ikke var for konstanten b.
Vi prøver derfor i stedet for at se på funktionen: $b - k\cdot f(x)$. Om den gælder der:
$(b - k\cdot f(x))' = 0 - k\cdot f'(x) = -k\cdot(b - k\cdot f(x))$, hvor vi har brugt forudsætningerne om f. Det ses altså, at funktionen $b - k\cdot f(x)$ opfylder betingelserne i sætning 3.1, hvormed der findes en konstant

c_1 , så: $b - k \cdot f(x) \; = \; c_1 \cdot e^{-kx}$, hvor konstanten kaldes c_1 og ikke c, idet vi om et øjeblik skal omskrive lidt på udtrykket og dér indføre en ny konstant, som så får navnet c. (Bemærk, at der skal stå –k og ikke bare k i udtrykket. Hvorfor ?). Vi omskriver nu:

$$b - k \cdot f(x) \; = \; c_1 \cdot e^{-kx} \quad \Leftrightarrow \quad k \cdot f(x) = b - c_1 \cdot e^{-kx} \quad \Leftrightarrow \quad f(x) \; = \; \frac{b}{k} + \left(\frac{-c_1}{k} \right) \cdot e^{-kx}$$

Brøken $\frac{-c_1}{k}$ er en konstant, som vi kalder c. Hermed er sætningen bevist. ♥

Sætning 3.3 kan undertiden med fordel formuleres således:

Sætning 3.4.
Lad f være en funktion, som er kontinuert i et interval I og differentiabel i det tilsvarende åbne interval I_o , hvor det om I gælder, at $0 \in I$. Hvis funktionen f opfylder, at: $f'(x) = -k \cdot (f(x) - K)$ for alle $x \in I_o$, hvor k og K er givne konstanter ($k \neq 0$), så er funktionsforskriften for f givet ved:

$$f(x) = K + (f(0) - K) \cdot e^{-k \cdot x} , \quad x \in I$$

hvor f(0) er funktionsværdien af f i 0.

Bevis:
Forudsætningen $f'(x) = -k \cdot (f(x) - K)$ kan omskrives til: $f'(x) = k \cdot K - k \cdot f(x)$. Vi ser hermed, at f opfylder forudsætningerne i sætning 3.3, hvor $b = k \cdot K$. Ifølge sætning 3.3 findes derfor en konstant c, så: $f(x) = \frac{kK}{k} + c \cdot e^{-k \cdot x} \; = \; K + c \cdot e^{-kx}$. Ved at indsætte x = 0 får vi: $f(0) = K + c \cdot 1$ og dermed at $c = f(0) - K$. Hermed er sætningen bevist. ♥

Eksempel 3.5:
Om en funktion T gælder, at $T'(x) \; = \; -s \cdot (T(x) - T_{opt})$, $x \geq 0$, hvor s og T_{opt} er givne konstanter (for x = 0 er der tale om: $T'_+(0)$). Ifølge sætning 3.4 har funktionen T derfor funktionsforskriften:

$$T(x) = T_{opt} + (T(0) - T_{opt}) \cdot e^{-sx} \; , \; x \geq 0$$

Øvelse: Tegn grafen for T, hvis T(0) = 200, $T_{opt} = 70$ og s = 0,3. Kommentér resultatet. ♥

Som en generalisering/udvidelse af sætning 3.3 har vi følgende sætning:

Sætning 3.6.
Hvis en funktion f opfylder, at: $f'(x) + g(x) \cdot f(x) \; = \; h(x)$ for alle x i et åbent interval I, hvor g og h er kontinuerte funktioner i I, så findes der en konstant c, så

$$f(x) \; = \; e^{-G(x)} \cdot \left(\int h(x) \cdot e^{G(x)} \, dx \; + \; c \right) \; , \; x \in I$$

hvor G(x) er en stamfunktion til g(x), og hvor $c \in R$ er en vilkårlig konstant.

Dette kan også formuleres således:
Differentialligningen $y' + g(x) \cdot y = h(x)$, hvor g og h er kontinuerte funktioner defineret i et interval, har den fuldstændige løsning:

$$y = \; e^{-G(x)} \cdot \left(\int h(x) \cdot e^{G(x)} \, dx \; + \; c \right) \; , \quad \text{hvor } c \in R.$$

Bevis:

Ved at gange på begge sider af lighedstegnet i udtrykket $f'(x) + g(x)\cdot f(x) = h(x)$ med $e^{G(x)}$ kan vi lave følgende omskrivningerne (læseren bedes nøje overveje/kontrollere hvert skridt):

$$f'(x) + g(x)\cdot f(x) = h(x) \quad\Leftrightarrow\quad e^{G(x)}\cdot f'(x) + e^{G(x)}\cdot g(x)\cdot f(x) = e^{G(x)}\cdot h(x)$$

$$\Leftrightarrow\quad \left(e^{G(x)}\cdot f(x)\right)' = e^{G(x)}\cdot h(x)$$

$$\Leftrightarrow\quad e^{G(x)}\cdot f(x) = \int h(x)\cdot e^{G(x)}\,dx + c$$

$$\Leftrightarrow\quad f(x) = e^{-G(x)}\cdot\left(\int h(x)\cdot e^{G(x)}\,dx + c\right)$$

hvor c er en vilkårlig konstant. Hermed er sætningen bevist. ♥

<u>Eksempel 3.7.</u>

Vi vil bestemme den fuldstændige løsning til differentialligningen: $y' = y - 3x$ (jfr. eksempel 1.1 d)). Ligningen omskrives først til: $y' - y = -3x$, hvoraf vi ser, at den er af den type, der omtales i sætning 3.6, hvor $g(x) = -1$ (altså en konstant funktion) og $h(x) = -3x$. En stamfunktion G(x) til g(x) er givet ved: $G(x) = -x$, hvormed vi ifølge sætning 3.6 ser, at den fuldstændige løsning er givet ved:

$$y = e^{-(-x)}\cdot\left(\int -3x\cdot e^{-x}\,dx + c\right) \Leftrightarrow y = e^{x}\cdot\left(\int -3x\cdot e^{-x}\,dx + c\right) \Leftrightarrow y = c\cdot e^{x} + e^{x}\cdot\int -3x\cdot e^{-x}dx$$

Det sidste integrale i denne omskrivning udregnes ved delvis integration til at give: $3x\cdot e^{-x} + 3e^{-x}$ (kontrollér !!). Alt i alt ses dermed, at den fuldstændige løsning til differentialligningen: $y' = y - 3x$ er givet ved: $\quad y = c\cdot e^{x} + 3x + 3$, $x \in R$, hvor $c \in R$.

<u>Øvelse:</u> Find den fuldstændige løsning til differentialligningen: $y' = 2y - 2x^2 + 1$ ♥

<u>Øvelse 3.8.</u>

Bevis sætning 3.3 ved anvendelse af sætning 3.6. (Vejledning: Sæt $g(x) = k$ og $h(x) = b$). ♥

<u>Logistisk vækst og undersøgelse heraf</u>

<u>Sætning 3.9.</u>

Hvis en positiv funktion f opfylder, at: $f'(x) = k\cdot f(x)\cdot(M - f(x))$ for alle x i et interval I, hvor k og M er positive konstanter, og hvor $M > f(x)$ for alle x, så findes der en anden positiv konstant c, så funktionsforskriften for f er givet ved:

$$f(x) = \frac{M}{1 + c\cdot e^{-kMx}}\ , \quad x \in I$$

Dette kan også formuleres således:

Differentialligningen $y' = ky(M - y)$, hvor $k > 0$ og $0 < y < M$, har den fuldstændige løsning:

$$y = \frac{M}{1 + c\cdot e^{-kMx}}\ , \text{ hvor } c \in R_+ .$$

Hvis vi kun forudsætter, at: $k \neq 0$ og $M \neq 0$, (og ingen specielle forudsætninger om funktionen y), så er løsningen til ligningen $y' = ky(M - y)$ den samme, idet der nu blot gælder, at $c \in R$.

Bevis:

Ifølge forudsætningerne har vi: $f'(x) = k{\cdot}f(x){\cdot}(M - f(x)) = kM{\cdot}f(x){\cdot}\left(1-\frac{f(x)}{M}\right)$

hvor vi i sidste led har sat M udenfor parentesen.

Vi laver nu et lille "trick", idet vi undersøger differentialkvotienten af funktionen: $\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{M}$. (Læseren bedes gennemføre/kontrollere detaljerne i omskrivningen):

$$\left(\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{M}\right)' = \frac{-f'(x)}{(f(x))^2} = \frac{-kM\cdot f(x)\cdot\left(1-\frac{f(x)}{M}\right)}{(f(x))^2} = -kM\cdot\left(\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{M}\right)$$

Vi ser hermed, at funktionen $\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{M}$ opfylder forudsætningerne i sætning 3.1 (idet konstanten denne gang er lig med $-kM$).

Der findes derfor en konstant c_1, så: $\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{M} = c_1{\cdot}e^{-kMx}$. Vi omskriver nu på dette udtryk:

$$\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{M} = c_1{\cdot}e^{-kMx} \Leftrightarrow \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{M} + c_1{\cdot}e^{-kMx}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{f(x)} = \frac{1+M\cdot c_1\cdot e^{-kMx}}{M} \Leftrightarrow f(x) = \frac{M}{1+M\cdot c_1\cdot e^{-kMx}}$$

Hvis vi i dette sidste udtryk sætter $c = M{\cdot}c_1$ (dvs. hvis vi kalder konstanten $M{\cdot}c_1$ for c), så får vi det ønskede udtryk for f. Hvis vi specielt har, at $0 < f(x) < M$, så får vi (overvej !), at $c_1 > 0$ – og dermed også at $c > 0$. Hermed er sætningen bevist. ♥

<u>Eksempel 3.10.</u>

Differentialligningen $y' = 0{,}00004{\cdot}y{\cdot}(500 - y)$, (jfr. eksempel 1.1 f)), hvor $0< y <500$ har løsningen:

$$y = \frac{500}{1+c\cdot e^{-0{,}00004\cdot 500\cdot x}} = \frac{500}{1+c\cdot e^{-0{,}02x}}$$, hvor c er en positiv konstant.

Hvis vi tænker os, at vi leder efter den funktion, der er løsning til differentialligningen og som går igennem punktet (120,400), så kan den tilsvarende konstant c findes på følgende måde:

$$400 = \frac{500}{1+c\cdot e^{-0{,}02\cdot 120}} \Leftrightarrow 1 + c\cdot e^{-2{,}4} = \frac{5}{4} \Leftrightarrow c = \frac{1}{4}\cdot e^{2{,}4} \Leftrightarrow c = 2{,}755794$$

Den søgte funktion f har altså forskriften: $f(x) = \frac{500}{1+2{,}7558\cdot e^{-0{,}02\cdot x}}$, $x \in R$

<u>Øvelse:</u> Tegn grafen for f(x) og kommentér dens udseende. ♥

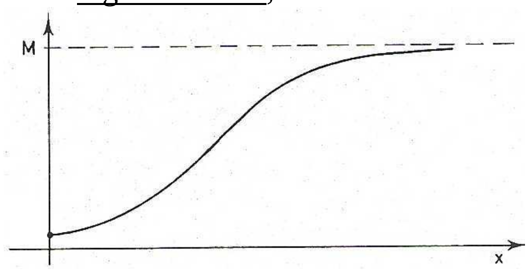
Funktioner af den type, der omtales i starten af sætning 3.9, kaldes <u>positive logistiske vækstfunktioner</u>, og størrelsen M kaldes ofte for <u>mætningsværdien</u> eller <u>bærekapaciteten</u>. En positiv, logistisk vækstmodel benyttes i sammenhænge, hvor der "i begyndelsen" kan foregå en relativt fri (uhindret, uhæmmet) vækst, men hvor der efterhånden forekommer en slags "mætning". Det kan f.eks. være

- alkoholprocenten i en vin under gæringen som funktion af tiden
- graden af solbrændthed som funktion af den tilbragte tid i solen
- det ugentlige salgstal af en ny ikke-sæsonpræget vare som funktion af tiden efter introsuktionen på markedet. (Der er tale om en forgængelig forbrugsvaretype som f.eks. en bestemt slags madvarer. Det forudsættes, at varen er et kvalitetsprodukt, der er i stand til at bevare en bestemt markedsandel, samt at der er tale om en nogenlunde konstant reklameindsats).
- størrelsen af en population i et givet miljø som funktion af tiden, når der ikke er ubegrænsede ressourcer (plads, næring, mv.).
- indlæringsgraden (dvs. den brøkdel, der er indlært af en given vidensmængde (f.eks. indholdet i en given matematikbog)) som funktion af den tid, der er anvendt på at studere stoffet
- udbredelsen, dvs. den samlede bestand på markedet, af en ny vare (en såkaldt ”varig forbrugsgode”, f.eks. videomaskiner eller DVD-maskiner) som funktion af tiden efter introduktionen af varen på markedet.

Øvelse 3.11.
Lad f være en given, postiv logistisk vækstfunktion. Benyt udtrykket: $f'(x) = k\cdot f(x)\cdot(M - f(x)) = kM\cdot f(x)\cdot\left(1-\frac{f(x)}{M}\right)$ til at argumentere for, at når f(x) er meget mindre end M (dvs. ”i begyndelsen” af væksten), så er f næsten givet ved en eksponentiel vækstfunktion, altså en fri/uhæmmet vækst. ♥

Sætning 3.12.
Hvis f er en positiv, logistisk vækstfunktion fra sætning 3.9, så gælder der:

- Konstanten c givet ved: $c = \frac{M}{f(0)} - 1$
- $f(x) \to M$ for $x \to \infty$
- Grafen for f, der kaldes en logistisk kurve, har et udseende som vist på følgende figur:



Figur 3.1

Beviset for og kommentarer til denne sætning overlades til læseren som en øvelse.

I appendix 2 er vist løsninger for logistiske vækstfunktioner, hvor $k < 0$, $M < 0$ og/eller $y > M$.

Forelagt et givet sæt af registrerede data kan det være vanskeligt umiddelbart at afgøre, om de kan beskrives ved en logistisk vækstfunktion. For at hjælpe på dette, kan den følgende sætning 3.13 undertiden anvendes. Problemet er imidlertid, at vi skal kende værdien af M for at kunne bruge sætningen. Som det senere vil fremgå (jfr. øvelse 4.24), kan M undertiden estimeres (dvs. skønnes), blot vi kender f(0), samt f(x) for to værdier af x, hvor den ene giver en funktionsværdi langt fra mætningsværdien og den anden er relativt tæt på mætningen. Desuden kan den efterfølgende sætning 3.14 undertiden anvendes til dette formål.

Sætning 3.13.
Følgende to påstande er ensbetydende:
a) En funktion f er en positiv logistisk vækstfunktion med mætningsværdien M
b) Der findes en positiv konstant M, så værdierne $\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{M}$ indtegnet som funktion af x i et enkeltlogaritmisk koordinatsystem giver en aftagende ret linie.

Bevis:
Hvis f er en positiv logistisk vækstfunktion med forskriften: $f(x) = \frac{M}{1+c\cdot e^{-kMx}}$, og hvis vi sætter $c_1 = \frac{c}{M}$, så fås ifl. den sidste omskrivning i beviset for sætning 3.9, at $\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{M} = c_1 \cdot e^{-kMx}$.
Som bekendt giver $c_1 \cdot e^{-kMx}$ en ret linie, når det indtegnes i et enkeltlogaritmisk koordinatsystem, og da $-kM < 0$ er linien aftagende.

Hvis der omvendt findes en positiv konstant M, så $\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{M}$ giver en aftagende ret linie i et enkeltlogaritmisk koordinatsystem, så findes der som bekendt en positiv konstant b og en negativ konstant a, så: $\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{M} = b\cdot e^{ax}$. Det overlades som en øvelse til læseren at vise, at dette udtryk på samme måde som i beviset for sætning 3.9 kan omskrives til: $f(x) = \frac{M}{1+c\cdot e^{ax}}$, hvor $c = M\cdot b$.
Da a er negativ og M er positiv vil størrelsen $-\frac{a}{M}$ være en positiv konstant. Hvis vi kalder denne størrelse for k, så får vi alt i alt, at: $f(x) = \frac{M}{1+c\cdot e^{-kMx}}$. Hermed er sætningen bevist. ♥

Som omtalt kan vi undertiden bruge den følgende sætning til at finde M – til brug i sætning 3.13:

Sætning 3.14.
Hvis f er en positiv logistisk vækstfunktion med mætningsværdien M, og hvis x_1, x_2 og x_3 er tre givne værdier som opfylder, at $x_1 < x_2 < x_3$ og $x_3 - x_2 = x_2 - x_1$, så kan mætningsværdien M findes af følgende udtryk:

$$M = \frac{\frac{1}{f(x_1)} - \frac{2}{f(x_2)} + \frac{1}{f(x_3)}}{\frac{1}{f(x_1)}\cdot\frac{1}{f(x_3)} - \frac{1}{(f(x_2))^2}}$$

Bevis:

Ifølge sætning 3.13 b) findes der to konstanter a og b, så: $\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{M} = b \cdot e^{ax}$.

Da $x_3 - x_2 = x_2 - x_1$ har vi også, at $2 \cdot x_2 = x_1 + x_3$, hvilket giver: $b \cdot e^{a \cdot 2 \cdot x_2} = b \cdot e^{a(x_1 + x_3)}$.

Dette udtryk kan omskrives til (kontrollér): $(b \cdot e^{ax_2})^2 = (b \cdot e^{ax_1}) \cdot (b \cdot e^{ax_3})$, hvoraf vi ser, at:

$\left(\frac{1}{f(x_2)} - \frac{1}{M}\right)^2 = \left(\frac{1}{f(x_1)} - \frac{1}{M}\right) \cdot \left(\frac{1}{f(x_3)} - \frac{1}{M}\right)$. Ved at gange disse parenteser ud og isolere M, fremkommer det anførte udtryk for M (kontrollér dette !), hvormed sætningen er bevist. ♥

Når først M er kendt/fundet, kan konstanten k i funktionsforskriften for en logistisk vækstfunktion findes v.hj.a. følgende sætning:

Sætning 3.15.

Hvis f er en positiv logistisk vækstfunktion med mætningsværdien M (dvs. værdien af M er fundet/kendt), så kan konstanten k i funktionsforskriften for f findes af følgende udtryk:

$$k = \frac{\ln\left(\frac{1}{f(x_\alpha)} - \frac{1}{M}\right) - \ln\left(\frac{1}{f(x_\beta)} - \frac{1}{M}\right)}{M \cdot (x_\beta - x_\alpha)}$$

hvor x_α og x_β er to vilkårlige x-værdier ($x_\alpha \neq x_\beta$).

Bevis:

Ifølge beviset for sætning 3.9 gælder der, at: $\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{M} = c_1 \cdot e^{-kMx}$, hvor $c_1 = \frac{c}{M}$.

Dette udtryk gælder specielt for $x = x_\beta$, hvormed vi får: $\frac{1}{f(x_\beta)} - \frac{1}{M} = c_1 \cdot e^{-kMx_\beta}$.

Ved at gange på begge sider af lighedstegnet med e^{kMx_β} får vi, at: $c_1 = \left(\frac{1}{f(x_\beta)} - \frac{1}{M}\right) \cdot e^{kMx_\beta}$

Indsættes dette i udtrykket for $\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{M}$ får vi: $\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{M} = \left(\frac{1}{f(x_\beta)} - \frac{1}{M}\right) \cdot e^{kMx_\beta} \cdot e^{-kMx}$.

Dette gælder for alle x, specielt for $x = x_\alpha$. Det overlades som en øvelse til læseren at indsætte x_α i stedet for x og derefter isolere størrelsen k, for dermed at få det i sætningen omtalte udtryk for k. Hermed er sætningen bevist. ♥

Øvelse 3.16.

Eftervis, at de følgende data med rimelighed kan siges at ligge på en logistisk kurve:

x	20	30	50	60	70	100	110	115	125
f(x)	30800	37800	52200	59500	65200	77800	80000	81100	82700

Bestem en funktionsforskrift for f. ♥

Bemærk, at anvendelsen af sætning 3.14 som grundlag for anvendelsen af sætning 3.13 b) kan føre til besynderligheder som f.eks., at man v.hj.a. sætning 3.14 får en negativ værdi af M. Dette skyldes, at sætning 3.14 bygger på, at de anvendte data præcis ligger på en logistisk vækstfunktion, hvilket i praksis ofte ikke vil være tilfældet p.gr.a. problemer med målenøjagtigheden, målefejl, statistiske udsving i vækstraten, osv. Den bedste metode er da at anvende værdier af x_1, x_2 og x_3 , som ligger så langt fra hinanden som muligt. Herefter kan den fundne værdi af M bruges til at finde konstanten k v.hj.a. sætning 3.15.
Det skal desuden bemærkes, at mange grafregnere (lommeregnere), bl.a. TI-83-serien, har en logistisk regressionsfunktion, hvormed det bedste bud på en logistisk vækstfunktion svarende til givne data kan findes. På TI-83 gøres følgende: De registrerede værdier lægges som ved andre regressionstyper ind i listerne L_1 og L_2, hvorefter der trykkes [STAT] [CALC] og B:Logistic vælges. I displayet står nu Logistic, og man kan hér tilføje diverse parametre. Da der standard vælges L_1 og L_2, hvis ikke andet er anført, kan man nøjes med at tilføje Y_1, hvis man vil gemme funktionsforskriften i Y_1 og bl.a. herudfra vil se grafen i et almindeligt koordinatsystem. Herefter tastes [ENTER] og funktionsforskriften vises i displayet, men desværre uden korrelationskoefficienten r , og dermed uden en vurdering af, hvor tæt de målte data ligger på en logistisk vækstfunktion. V.hj.a. [2nd] [STAT PLOT] sat til ”on” kan man imidlertid ved anvendelse af [GRAPH] og tilpasning af vinduet se, hvordan punkterne ligger i fht. den tilnærmende graf og dermed få en idé herom, ligesom man naturligvis kan bruge sætning 3.13 b) med den nu fundne værdi af M !!

Øvelse 3.17.
Gennemfør v.hj.a. grafregneren en logistisk regression af dataene i øvelse 3.16, og sammenlign med resultatet i øvelse 3.16. ♥

Vi slutter behandlingen af logistisk vækst med at finde en stamfunktion til vækstfunktionen:

Sætning 3.18.
Hvis f er en logistisk vækstfunktion, så er en stamfunktion til f givet ved følgende formel:

$$\int \frac{M}{1+c\cdot e^{-kMx}}dx = \frac{1}{k}\cdot\ln\left|e^{kMx}+c\right| + q = Mx+\frac{1}{k}\cdot\ln\left|1+c\cdot e^{-kMx}\right| + q$$

hvor $q \in R$ er en vilkårlig konstant.

Bevis:

Brøken inde i integraltegnet forlænges med e^{kMx}. Vi får: $\int \frac{M}{1+c\cdot e^{-kMx}}dx = \int \frac{M\cdot e^{kMx}}{e^{kMx}+c}dx$

I dette sidste integral anvender vi substitutionen: $t = e^{kMx}+c$ og $dt = kM\cdot e^{kMx}dx$, hvormed det kan omskrives således: $\int \frac{M\cdot e^{kMx}}{e^{kMx}+c}dx = \frac{1}{k}\int\frac{1}{t}dt = \frac{1}{k}\cdot\ln|t| + q$, hvor q er en vilkårlig konstant .

Hvis vi i dette udtryk indsætter, at $t = e^{kMx}+c$ får vi første del af formlen. Det andet udtryk for stamfunktionen fås ved at konstatere, at $e^{kMx}+c = e^{kMx}\cdot(1+c\cdot e^{-kMx})$ og derefter anvende regneregler for ln og for almindelig reduktion, samt at $e^{kMx}>0$. Detaljerne overlades til læseren. Hermed er sætningen bevist. ♥

Bemærk, at hvis c > 0 (som i første del af sætning 3.9), så kan numerisktegnene fjernes og ændres til almindelige parenteser (idet både e^{kMx} og c da er positive størrelser).

Kap. 4: Løsninger mm. til indledende eksempler.

Radioaktivitet og stråling.

Eksempel 4.1.
I eksempel 2.1 så vi, at funktionen N(t), som beskriver antallet af ikke-henfaldne kerner til tiden t, opfylder ligningen: $N'(t) = -k\cdot N(t)$, hvor k er henfaldskonstanten (som angiver sandsynligheden pr. tidsenhed for, at en given kerne henfalder).
Ifølge sætning 3.1 har vi, at $N(t) = K\cdot e^{-kt}$, hvor K er en konstant.
Hvis antallet af kerner til tiden 0 kaldes N_o, så får vi: $N_o = N(0) = K\cdot e^{-k\cdot 0} = K$, og dermed:

$N(t) = N_o\cdot e^{-kt}$ eller: $N(t) = N_o\cdot \exp(-kt)$
Antallet af ikke-henfaldne kerner er således eksponentielt aftagende.

Som ved andre eksponentielt aftagende funktioner kan vi tale om og regne med halveringskonstanter, i dette tilfælde halveringstiden $T_{½}$, som står for den tid, der for et givet radioaktivt materiale går inden halvdelen af de radioaktive kerne er henfaldet. Der gælder (overvej !), at:

$$T_{½} = \frac{\ln 2}{k} \quad \text{og} \quad k = \frac{\ln 2}{T_{½}} \ . \quad ♥$$

Øvelse 4.2.
Beskrivelsen af radioaktivt henfald i eksempel 4.1 kan bl.a. anvendes til aldersbestemmelse af historiske objekter. En metode bygger på det radioaktive kulstof 14 (skrives: C^{14}). En levende organisme har nemlig et ganske bestemt indhold af dette stof; men når organismen dør, vil dette indhold aftage eksponentielt som beskrevet i eksempel 4.1.
På baggrund af halveringstidsbestemmelser er konstanten k fastlagt til ca. $1{,}22\cdot 10^{-4}$ (med enheden år^{-1}), hvorfor indholdet af C^{14} kan beskrives ved funktionen: $N(t) = N_o\cdot e^{-1{,}22\cdot 10^{-4}\cdot t}$, hvor N_o er det oprindelige indhold af C^{14}, og hvor t måles i år (efter at organismen er død).

a) I nogle knogler er indholdet af C^{14} bestemt til 72,3 % af det oprindelige indhold.
Hvor gamle er disse knogler ?

For at vurdere metodens nøjagtighed kan vi prøve at ændre lidt på værdien af k i udregningerne:

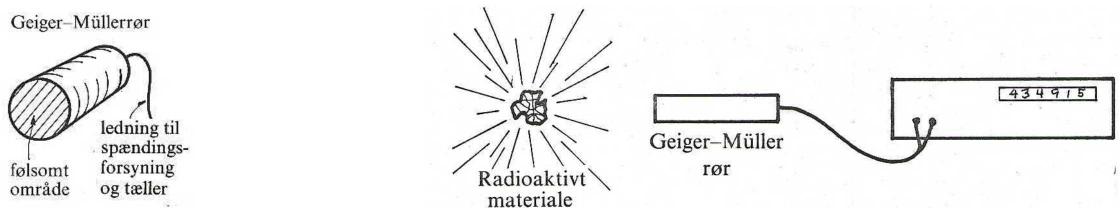
b) Hvilken alder ville vi få for de omtalte knogler, hvis $k = 1{,}24\cdot 10^{-4}$ år^{-1} og hvis $k = 1{,}20\cdot 10^{-4}$ år^{-1}
Kommentér resultatet. ♥

Øvelse 4.3.
Der findes andre radioaktive stoffer, der kan bruges til aldersbestemmelse af forskellig art.

a) Undersøg, hvordan og i hvilken sammenhæng den radioaktive isotop kalium-40 (K^{40}) kan bruges til aldersbestemmelse.
b) Uran har to naturligt forekommende radioaktive isotoper: Uran-235 (U^{235}) med en halveringstid på $7{,}1\cdot 10^{8}$ år, og Uran-238 (U^{238}) med en halveringstid på $4{,}5\cdot 10^{9}$ år.
Vi antager, at der ved dannelse af uranholdigt mineral var lige mange atomer af de to isotoper.
   - Hvor gammelt er mineralet, hvis der i dag er 90 gange så meget U^{238} som U^{235} ?
   - Giv en vurdering af Jordens alder, idet det oplyses, at der i Jordens uranmalm er ca. 140 gange så meget U^{238} som U^{235}. ♥

Øvelse 4.4.
I eksempel 4.1 omtalte vi, at antallet N(t) af radioaktive kerner, som til tiden t er tilbage (dvs. endnu ikke henfaldet) af et givet radioaktivt materiale, kan beskrives ved funktionen $N(t) = N_o \cdot \exp(-kt)$, hvor N_o er antallet af kerner til tiden 0, og hvor k er en for det pågældende radioaktive materiale karakteristisk konstant (henfaldskonstanten).
Dette fremkom, fordi $\Delta N \approx -k \cdot N(t) \cdot \Delta t$, når Δt er lille.

Når radioaktiv stråling registreres, f.eks. af et Geiger-Müller-rør, så måler vi ikke N(t), men derimod de partikler, som udsendes af de henfaldende kerner (og vi registrerer endda kun en bestemt brøkdel af disse partikler, se figur 4.1).



a) b)

Fig. 4.1

Ved at måle (tælle) i relativt små tidsintervaller Δt, kan vi bestemme aktiviteten A(t) (dvs. henfaldshastigheden), som er lig med antal henfaldne kerner pr. tidsenhed.

1) Argumentér for, at $A(t) \approx \dfrac{|\Delta N|}{\Delta t} = \dfrac{-\Delta N}{\Delta t}$ og dermed, at $A(t) = -N'(t)$
2) Vis dernæst, at $A(t) = A_o \cdot \exp(-kt)$, hvor $A_o = N_o \cdot k$ er aktiviteten til tiden 0.
Der gælder altså:

$$A(t) = A_0 \cdot e^{-kt} \qquad \text{eller} \qquad A(t) = A_o \cdot \exp(-kt)$$

Aktiviteten fra et radioaktivt stof er således eksponentielt aftagende – med samme værdi af konstanten k som ved kernernes henfald !

3) Argumentér for, at vi med opstillingen på figur 4.1 i virkeligheden ikke måler A(t), men en bestemt procentdel af A(t), som er fast så længe opstillingen ikke ændres, og at vores måletal derfor hele tiden er proportional med A(t).

I nedenstående tabel ses aktiviteten A(t) af den radioaktive stråling fra et givet radioaktivt materiale som funktion af tiden t. t måles i sekunder og A(t) måles i antal partikler pr. sekund.

t	0	15	30	45	60	75	90	105	120	135	150
A(t)	300	270	253	232	210	200	181	167	149	141	129

4) Indtegn disse værdier i et semilogaritmisk koordinatsystem, og tegn den "bedste" rette linie igennem disse punkter (dvs. tegn den rette linie, som bedst tilnærmer alle punkterne).
At punkterne ikke ligger præcis på en ret linie skyldes statistiske "udsving" (statistiske fluktuationer), som fremkommer p.gr.a. henfaldets tilfældighedsmæssige karaktér – eller mere matematisk udtrykt: idet k står for sandsynligheden pr. tidsenhed for henfald.
5) Find en funktionsforskrift for A(t) på grundlag af den tegnede linie og/eller v.hj.a. en eksponentiel regression på grafregneren eller i Excel.
6) Hvor stor er henfaldskonstanten (husk enheder) ?
7) Beregn på baggrund heraf halveringstiden $T_{½}$, og sammenlign denne med $T_{½}$ bestemt v.hj.a. grafen for A(t), (dvs. den tegnede linie). ♥

Eksempel 4.5.
Ved en måling af aktiviteten fra et radioaktivt materiale (jfr. øvelse 4.4) er fremkommet følgende resultater. Tiden t måles i minutter og aktiviteten A(t) er antal registrerede partikler pr. sekund.

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
A(t)	270	186	132	99	79	65	55	48	44	40	36	33	31	28	27	25

Disse resultater indtegnes i et semilogaritmisk koordinatsystem, hvorved følgende kurve fremkommer (den øverste !):

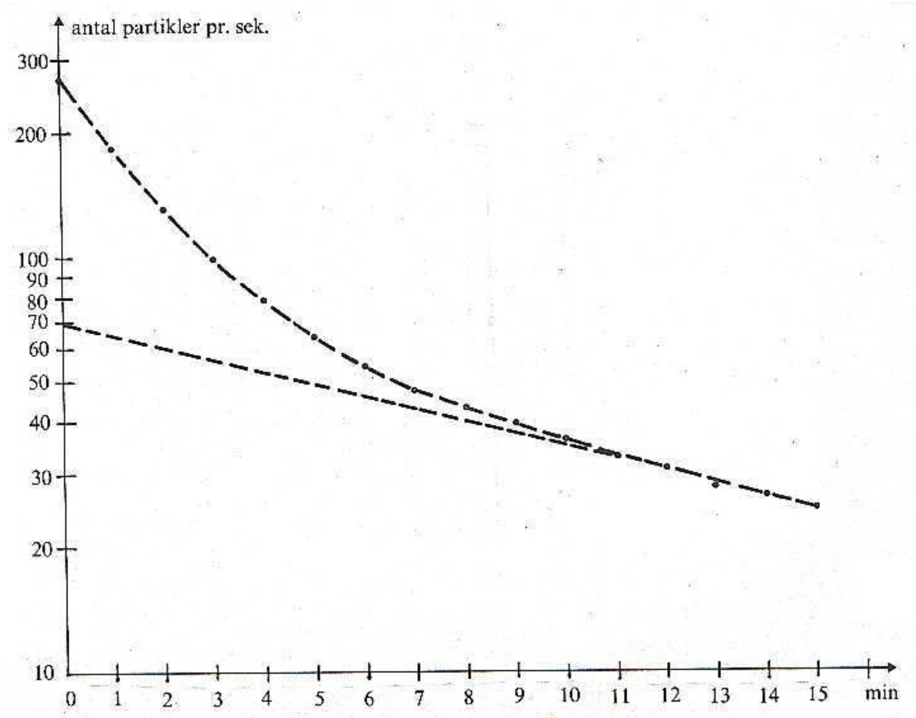


Fig. 4.2

Vi ser, at punkterne <u>ikke</u> ligger på en ret linie. Dette stemmer således ikke med de tidligere erfaringer om radioaktivt henfald.
Men hvis vi kun betragter den "sidste del" af kurven (svarende til $t \geq 10$ min.), så ser vi, at der <u>hér</u> er tale om en eksponentielt aftagende funktion, idet kurven her stort set er retlinet. Hvis vi nu forlænger denne del retlinet tilbage til skæring med andenaksen (se figuren), så svarer denne linie til et radioaktivt henfald med en begyndelsesaktivitet på 70 partikler pr. sekund.
Hvis vi antager, at vi faktisk har et sådant radioaktivt henfald, så må den "overskydende" aktivitet i den første del af kurven fremkomme på en anden måde. Vi vil undersøge denne overskydende aktivitet lidt nærmere. I nedenstående tabel er angivet værdien af den overskydende aktivitet svarende til forskellige tidspunkter. (Disse værdier er fremkommet som $A(t) - A_1(t)$, hvor $A_1(t)$ er aktiviteten svarende til den rette linie):

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$A(t) - A_1(t)$	200	120	71	42	25	15	9	5	3	2

Indtegnes disse resultater i et semilogaritmisk koordinatsystem (se figur 4.3), ser vi, at der er tale om eksponentielt aftagende funktion:

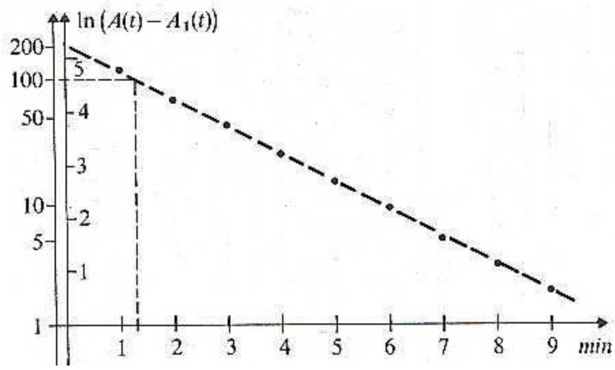


Fig. 4.3

Den overskydende aktivitet kan således stamme fra et andet radioaktivt henfald. Hvis vi kalder denne aktivitet for $A_2(t)$, så har vi, at $A(t) = A_1(t) + A_2(t)$, dvs. vi registrerer to forskellige henfald samtidigt ! Dette kan f.eks. skyldes, at der i vores radioaktive materiale er to uafhængige radioaktive stoffer med hver sin henfaldskonstant.
Vi kan af figur 4.2 se, at halveringstiden for det ene radioaktive stof er 10 minutter, og af figur 4.3 ses, at det andet radioaktive stof har halveringstiden 1,3 minutter.

Da $A_1(t) = A_1(0)\cdot e^{-k_1\cdot t}$ og $A_2(t) = A_2(0)\cdot e^{-k_2 t}$, hvor $A_1(0) = 70$, $A_2(0) = 200$, $k_1 = \frac{\ln 2}{10}$ og $k_2 = \frac{\ln 2}{1,3}$ ser vi, at $A(t) = 70\cdot e^{-0,0693\cdot t} + 200\cdot e^{-0,5332\cdot t}$, hvor tiden t måles i minutter.

Vores oprindelige kurve svarer således til summen af disse to eksponentielt aftagende funktioner. ♥

Eksempel 4.6.

I eksempel 2.2 så vi, at funktionen I(x), der beskriver intensiteten af strålingen i dybden x i et givet materiale, opfylder ligningen: $I'(x) = -\mu\cdot I(x)$, hvor proportionalitetsfaktoren μ kaldes absorptionskoefficienten for det pågældende materiale i relation til den givne stråling. (μ måles i m^{-1}).
Som i eksempel 4.1 ser vi, at

$$\boxed{I(x) = I_o\cdot e^{-\mu x} \quad \text{eller} \quad I(x) = I_o\cdot \exp(-\mu x)}$$

hvor I_o er intensiteten ved overfladen af materialet (dvs. $I_o = I(0)$ = intensiteten inden strålingen begynder at trænge ind i materialet), samt at halveringstykkelsen $x_{½}$ (dvs. den tykkelse materialet skal have for at absorbere halvdelen af den pågældende stråling) er givet ved udtrykket:

$$x_{½} = \frac{\ln 2}{\mu}$$

Det bemærkes, at absorptionskoefficienten (og dermed halveringstykkelsen) afhænger af absorptionsmaterialet, af strålingstypen og af strålingsenergien. ♥

Øvelse 4.7.

Absorptionskoefficienten for bly (jfr. eksempel 4.6) er for en given γ-stråling lig med 0,82 cm^{-1}.
a) Hvor tyk skal en blyplade være for at bremse 80 % af den pågældende stråling ?
b) Hvor stor er halveringstykkelsen for den pågældende stråling ? ♥

<u>Øvelse 4.8.</u>
I hospitalsverdenen mm. anvendes røntgenstråling som bekendt til at tage røntgenbilleder af udvalgte dele af kroppen. Undertiden er der behov for at beskytte andre dele af kroppen eller for at beskytte personale, forældre m.v., der hjælper den person, der skal røntgenfotograferes. Til dette har man udviklet nogle ”bly-forklæder”, som tages på for at beskytte kroppen.
En given røntgenstråling har halveringstykkelsen 0,11 mm for absorption i bly.
Hvor tykt skal et ”bly-forklæde” være for at der højst er 1 % af røntgenstrålingen, som trænger igennem det ? ♥

<u>Eksempel 4.9.</u>
a) I øvelse 4.4 så vi, at aktiviteten fra en radioaktiv kilde (dvs. antal udstrålede partikler pr. tidsenhed) er eksponentielt aftagende, idet der gælder: $A(t) = A_o \cdot e^{-kt}$, hvor k er henfaldskonstanten for det pågældende stof.
Da $kt \to \infty$ for $t \to \infty$, idet $k > 0$, ser vi, at $A(t) \to 0$ for $t \to \infty$. Vi ser derfor, at aktiviteten af f.eks. radioaktivt affald fra et atomkraftværk efterhånden vil forsvinde.
Problemet er bare, hvor længe dette varer (dvs. hvornår aktiviteten er under et ufarligt niveau).
b) I eksempel 4.6 så vi, at intensiteten I af radioaktiv stråling aftager eksponentielt, når strålingen passerer igennem et materiale, idet der gælder, at $I(x) = I_o \cdot e^{-\mu x}$, hvor μ er absorptionskoefficienten for det absorberende materiale i fht. den givne stråling.
Vi ser derfor, at $I(x) \to 0$ for $x \to \infty$.
Vi ser hermed, at det ovenfor omtalte radioaktive affald i princippet kan uskadeliggøres ved at indkapsle det i ”uendeligt” tykke beholdere. Da dette i praksis er umuligt, må man vælge en ”tilstrækkelig” tyk beholder (som så forhåbentlig kan holde i det antal år, det tager inden materialets radioaktivitet er ufarlig). ♥

<u>Eksempel 4.10.</u>
I eksempel 2.3 så vi på moder-datter-henfald, hvor der om antallet M(t) af moderkerner til tiden t gælder, at $\Delta M \approx -k_m \cdot M(t) \cdot \Delta t$, hvor k_m er henfaldskonstanten for moderkernernes henfald og Δt er et lille tidsinterval. Ved at dividere på begge sider af lighedstegnet med Δt og anvende, at Δt er lille, ser vi, at $M'(t) = -k_m \cdot M(t)$. Som i eksempel 4.1 ser vi derefter, at $M(t) = M_o \cdot e^{-k_m \cdot t}$.
I eksempel 2.3 så vi desuden, at funktionen D(t), som beskriver antallet af datterkerner til tiden t, opfylder ligningen:

$$D'(t) + k_d \cdot D(t) = k_m \cdot M_o \cdot e^{-k_m \cdot t}$$

Ved anvendelse af sætning 3.6 får vi, at:

$$\begin{aligned} D(t) &= e^{-\int k_d\,dt} \cdot \left(\int k_m M_o e^{-k_m t} \cdot e^{\int k_d dt} dt + c \right) \\ &= e^{-k_d t} \cdot \left(\int k_m M_o e^{-k_m t} \cdot e^{k_d t} dt + c \right) \\ &= e^{-k_d t} \cdot \left(k_m M_o \cdot \int e^{(k_d - k_m)t} dt + c \right) \end{aligned}$$

$$= \quad e^{-k_d t} \cdot k_m M_o \cdot \frac{1}{k_d - k_m} \cdot e^{(k_d - k_m)t} + c \cdot e^{-k_d t}$$

$$= \quad c \cdot e^{-k_d t} + \frac{k_m \cdot M_o}{k_d - k_m} \cdot e^{-k_m t}$$

(I beregningen af D(t) forudsættes, at $k_d \neq k_m$ - hvilket altid vil være tilfældet i praksis).

Konstanten c fastlægges ved at indsætte t = 0 og D(0) = D_o, hvormed vi får: $c = D_o - \dfrac{k_m \cdot M_o}{k_d - k_m}$

Alt i alt ser vi dermed:

> I et radioaktivt moder-datter-henfald gælder der, at:
>
> $M(t) = M_o \cdot e^{-k_m t}$
>
> $D(t) = \left(D_o - M_o \cdot \dfrac{k_m}{k_d - k_m} \right) \cdot e^{-k_d t} + M_o \cdot \dfrac{k_m}{k_d - k_m} \cdot e^{-k_m t}$
>
> hvor M_o og D_o er antallet af moderkerner hhv. datterkerner til tiden 0, og hvor k_m og k_d er henfaldskonstanterne for de tilsvarende radioaktive processer.

Antallet af datterkerner beskrives altså ved en sum af to eksponentielt aftagende funktioner, hvor de to henfaldskonstanter bestemmer den hastighed, hvormed funktionerne aftager. Bemærk dog, at fortegnet af brøken, der indgår i udtrykket for D(t), afhænger af, om $k_d < k_m$ eller $k_d > k_m$, hvormed udtrykkene foran såvel $e^{-k_d t}$ som $e^{-k_m t}$ kan være positive eller negative – afhængig af situationen.

<u>Øvelse a):</u> Find et udtryk for D(t), hvis D_o = D(0) = 0.

<u>Øvelse b):</u>
Skitsér graferne for D(t) i hvert af følgende tilfælde, idet det forudsættes, at $M_o = 10^8$ og $D_o = 0$.
(Reducér funktionsforskriften for D(t) mest muligt inden grafen tegnes).
Kommentér de forskellige grafer og deres betydning/årsagen til deres udseende.

a) $k_d = 10\ s^{-1}$ og $k_m = 0{,}01\ s^{-1}$ (dvs. k_d er <u>meget</u> større end k_m)
   (Hvad gælder der om halveringstiderne ?)
b) $k_d = 0{,}000001\ s^{-1}$ og $k_m = 0{,}01\ s^{-1}$ (dvs. k_d er <u>meget</u> mindre end k_m)
   (Hvad gælder der om halveringstiderne ?)
c) $k_d = 0{,}005\ s^{-1}$ og $k_m = 0{,}01\ s^{-1}$ (her gælder altså at $k_d = ½ \cdot k_m$)
d) $k_d = 0{,}02\ s^{-1}$ og $k_m = 0{,}01\ s^{-1}$ (her gælder altså at $k_d = 2 \cdot k_m$)

<u>Øvelse c):</u> Løs øvelse b) igen, idet vi nu antager, at: $D_o = ½ \cdot M_o$ ♥

Temperatur-udligning.

Eksempel 4.11.
I eksempel 2.4 undersøgte vi temperaturen T(t) af et legeme A, som er i termisk kontakt med et "stort" legeme B med den konstante temperatur T_o, og vi fandt, at T(t) opfylder ligningen:
$T'(t) \;=\; -a \cdot (T(t) - T_o)$ (Newton's afkølingslov).

Ifølge sætning 3.4 ser vi, at hvis T(t) opfylder Newtons afkølingslov, så gælder der:

$$\boxed{T(t) \;=\; (T(0) - T_o) \cdot e^{-at} + T_o}$$

hvor T(0) er begyndelsestemperaturen af legeme A (det lille legeme).

Øvelse a):
1. Tegn grafen for temperaturfunktionen T(t), hvis $T(0) = 100\ ^oC$, $T_o = 20\ ^oC$ og $a = 0{,}03$
2. Tegn grafen for temperaturfunktionen T(t), hvis $T(0) = 10\ ^oC$, $T_o = 200\ ^oC$ og $a = 0{,}1$

Kommentér udseendet af graferne.

Øvelse b):
Gør rede for, at temperaturfunktionen T(t) opfylder det vi må forvente, nemlig at:
$T(t) \to T_o$ for $t \to \infty$, og at vi dermed får temperaturudligning i modelberegningen. ♥

Øvelse 4.12.
Familien Von Hansen har en del flasker rødvin liggende i deres vinkælder, hvor der næsten konstant året rundt er 8 ^oC. Hr. von Hansen mener, at rødvinen skal op på en temperatur af 17 ^oC, før vinen bør drikkes, og at vinen straks efter at være hentet i vinkælderen skal trækkes op, så den kan stå og ilte, medens den tempereres.
Hr. von Hansen, der er en meget omhyggelig vinentusiast, har konstateret, at det tager 52 minutter for vinen at nå op på de 17 ^oC, når den står til iltning i deres stue, hvor der er 22 ^oC.

a) Bestem konstanten a i Newtons afkølingslov for rødvinsflasken.
b) Beregn den hastighed, hvormed temperaturen aftager til tidspunktet 30 minutter efter ophentning fra vinkælderen.

En dag får Familien von Hansen besøg af deres venner hr. og fru Schlechthausen, som helst vil have vinen ved en temperatur på 19 ^oC.

c) Hvor lang tid før brug skal rødvinen tages op af vinkælderen, hvis Schlechthausens ønske skal imødekommes ? ♥

Øvelse 4.13.
Under opklaringen af et mord kan følgende tænkes anvendt:

Ligets temperatur som funktion af tiden efter dødens indtræden følger med god tilnærmelse Newtons afkølingslov, og proportionalitetsfaktoren a afhænger af påklædningen, legemets størrelse mm. Ved almindelig indendørs påklædning har det erfaringsmæssigt vist sig, at hvis liget af en person af gennemsnitsstørrelse ligger i en 22 °C varm stue, så vil ligets temperatur være ca. 29 °C 100 minutter efter mordet.

a) Bestem konstanten a i Newtons afkølingslov for liget.

I en mordsag blev liget fundet kl. 17.50 i et lokale, hvor temperaturen var 19 °C. Den myrdede var af middelhøjde og klædt i almindeligt indendørs tøj, og ligets temperatur var 26 °C.

b) Beregn, hvornår mordet cirka er foregået. ♥

Øvelse 4.14.

En norsk hytteudlejer har en såkaldt "hyttegrend" med flere hytter i nærheden af hinanden. Hytterne udlejes hele året, og vi ser i denne opgave på en bestemt periode (vinterferien) i den kolde årstid. Som en service overfor gæsterne har ejeren på forskellig måde gjort klar til at modtage dem, bl.a. ved at tænde for varmen, så der er 23 °C inde i hytterne.
Kort efter at gæsterne er ankommet til hytterne sker der en strømafbrydelse, idet en storm i bjergene vælter en ustabil højspændingsmast. Gæsterne får at vide, at det desværre vil tage et par dage at få genetableret strømforsyningen, og temperaturen i hytterne begynder langsomt at aftage.

Familien Hansen har lejet den billige hytte "Istappen", hvor der kun er elvarme, men ingen brændeovn eller pejs. Vi regner med (jfr. det ovenstående), at temperaturen f(t) i huset til tiden t efter strømafbrydelsen er givet ved udtrykket:

$$f(t) = -2 + 25 \cdot e^{-0{,}023 \cdot t}$$

hvor t måles i timer og f(t) måles i °C.

a) Hvor lang tid går der efter strømafbrydelsen inden temperaturen kommer under 13 °C.

b) Med hvilken hastighed ændres temperaturen sig 10 timer efter strømafbrydelsen.

Familien Jensen har lejet den store hytte "Oasen", hvor der er en brændeovn i stuen, og hvor der er rigeligt med brænde i hyttens brændeskur. Ved at tænde op i brændeovnen og konstant tilføre nyt brænde er de i stand til at opvarme størsteparten af stuen til en temperatur på 19 °C og fastholde denne, medens temperaturen i de tilstødende soverum, toilet og køkken følger funktionen:
$g(t) = 5 + 18 \cdot e^{-0{,}014 \cdot t}$.

c) Hvilken temperatur er der i soverummene, når strømmen efter 42 timer kommer igen.

d) Forklar, hvorfor der i funktionsudtrykket (modellen) for temperaturen i soveværelserne står 5 i modsætning til –2 ovenfor, samt hvorfor konstanten i eksponentialfunktionen, dvs. 0,014, er mindre end de 0,023 ovenfor. ♥

Eksempel 4.15.

I Eksempel 2.5 så vi på temperaturudligning imellem to legemer af "sammenlignelig" størrelse, (dvs. at de to legemer har forskellige begyndelsestemperaturer $T_1(0)$ og $T_2(0)$, at de er i termisk kontakt med hinanden, og at en temperaturforandring af det ene legeme vil føre til en målbar temperaturforandring af det andet legeme). De to legemer er i øvrigt isolerede fra omgivelserne.

Vi så, at der findes en positiv konstant q_1, så: $T_1'(t) = -q_1 \cdot (T_1(t) - T_2(t))$, samt at:
$T_2'(t) = -\frac{C_1}{C_2} \cdot T_1'(t)$, hvor $T_1(t)$ og $T_2(t)$ er temperaturerne af de to legemer til tiden t, og hvor C_1 og C_2 er varmekapaciteterne af de to legemer.

Vi så desuden, at: $T_1''(t) = -\alpha \cdot T_1'(t)$, hvor $\alpha = q_1 \cdot (1 + \frac{C_1}{C_2})$ er en positiv konstant.

Ud fra sætning 3.1 anvendt på funktionen $T_1'(t)$ ser vi nu, at der findes en konstant k, så:
$T_1'(t) = k \cdot e^{-\alpha \cdot t}$, hvor konstanten k er givet ved: $k = T_1'(0) = -q_1 \cdot (T_1(0) - T_2(0))$.

Ved integration af udtrykket for $T_1'(t)$ får vi et udtryk for $T_1(t)$:

$$T_1(t) = \int T_1'(t)\,dt = \int k \cdot e^{-\alpha t}\,dt = -\frac{k}{\alpha} \cdot e^{-\alpha t} + d \quad \text{, hvor d er en konstant.}$$

Da $\quad T_1(0) = -\frac{k}{\alpha} \cdot e^{-\alpha \cdot 0} + d = -\frac{k}{\alpha} + d \quad$ ses, at $\quad d = T_1(0) + \frac{k}{\alpha}$.

Indsættes dette i udtrykket for $T_1(t)$ får vi, at: $\quad T_1(t) = T_1(0) + \frac{k}{\alpha} \cdot (1 - e^{-\alpha t})$.

Da $\quad k = -q_1 \cdot (T_1(0) - T_2(0))$ og $\alpha = q_1 \cdot (1 + \frac{C_1}{C_2})$ ser vi (kontrollér !), at

$$\frac{k}{\alpha} = (T_2(0) - T_1(0)) \cdot \frac{C_2}{C_1 + C_2} .$$

Ved at indsætte dette i det fundne udtryk for $T_1(t)$, samt ved at anvende, at
$T_1(0) = T_1(0) \cdot 1 = T_1(0) \cdot \frac{C_1 + C_2}{C_1 + C_2}$, får vi alt i alt (efter lidt omskrivninger – gennemfør dem !):

$$\boxed{T_1(t) = \frac{T_1(0) \cdot C_1 + T_2(0) \cdot C_2}{C_1 + C_2} + (T_1(0) - T_2(0)) \cdot \frac{C_2}{C_1 + C_2} \cdot e^{-\alpha t}}$$

Det ses altså, at $T_1(t)$ er på formen: $T_1(t) = a + b \cdot e^{-\alpha t}$, hvor a og b er konstanter.

Det fremgår heraf, at $T_1(t) \to \frac{T_1(0) \cdot C_1 + T_2(0) \cdot C_2}{C_1 + C_2}$ for $t \to \infty$,

samt at $T_1(t)$ er voksende eller aftagende, alt efter om $b < 0$ eller $b > 0$, dvs. om $T_1(0) < T_2(0)$ eller $T_1(0) > T_2(0)$ (Overvej rimeligheden af dette !).

Ved anvendelse af: $T_2'(t) = -\frac{C_1}{C_2} \cdot T_1'(t)$ ses ved integration, at: $T_2(t) = -\frac{C_1}{C_2} \cdot T_1(t) + r$,

hvor r er en konstant.

r findes som k ovenfor ved indsættelse af t = 0: $\quad r = T_2(0) + \frac{C_1}{C_2} \cdot T_1(0)$

Indsættes udtrykket for r og udtrykket for $T_1(t)$ i udtrykket for $T_2(t)$ får vi efter en del omskrivninger (gennemfør dem !) :

$$\boxed{T_2(t) = \frac{T_1(0) \cdot C_1 + T_2(0) \cdot C_2}{C_1 + C_2} + (T_2(0) - T_1(0)) \cdot \frac{C_1}{C_1 + C_2} \cdot e^{-\alpha t}}$$

Det overlades til læseren at anføre egenskaber ved forskriften for $T_2(t)$, at sammenligne den med forskriften for $T_1(t)$, samt at drage forskellige konklusioner heraf.

Øvelse:
Tegn i samme koordinatsystem graferne for $T_1(t)$ og $T_2(t)$ for to legemer med starttemperaturen $T_1(0) = 128\ ^oC$ og $T_2(0) = 23\ ^oC$, og med varmekapaciteterne $C_1 = 3400$ J/^oC og $C_2 = 2300$ J/^oC, idet det vides, at $T_1(2 \text{ min.}) = 99\ ^oC$. Kommentér resultatet – og angiv den fælles sluttemperatur. ♥

Biologi og medicin

Eksempel 4.16.
I eksempel 2.6 betragtede vi en gærcellepopulation, som vokser ved celledeling under optimale vilkår (fastlagt ved korrekt temperatur, rigelig næringsmængde og plads, o.lign.). Og vi fandt frem til, at funktionen N(t), som beskriver antallet af gærceller pr. ml til tiden t, opfylder ligningen:

$$N'(t) = r \cdot N(t)$$

hvilket ifølge sætning 3.1 giver, at der findes en konstant K, så $N(t) = K \cdot e^{rt}$. Hvis antallet af gærceller pr. ml til tiden 0 kaldes N_o, så får vi: $N_o = N(0) = K \cdot e^{r \cdot 0} = K$, og dermed:

$$N(t) = N_o \cdot e^{rt} \quad (\text{eller: } N(t) = N_o \cdot \exp(rt)\ )$$

Antallet af gærceller vokser altså eksponentielt. ♥

Øvelse 4.17.
Størrelsen af en given bakteriekultur er eksponentielt voksende og kan på samme måde som gærcellerne i eksempel 4.16 beskrives ved en funktion af typen $N(t) = N_o \cdot e^{rt}$.

- Bestem r, idet $N_o = 2{,}5$ millioner (pr. ml) og $N(50 \text{ min.}) = 3$ millioner (pr. ml).
- Hvor lang tid går der, før $N(t) = 4{,}2$ millioner (pr. ml) ? Og før $N(t) = 5$ millioner (pr. ml) ? ♥

Eksempel 4.18.
I eksempel 2.7 så vi på koncentrationen c(t) af et stof i en celle, efterhånden som stoffet diffunderer ind (eller ud) af cellen. Og vi gjorde rede for, at c(t) opfylder følgende ligning:

$$c'(t) = -k(c(t) - c_o)$$

hvor c_o er koncentrationen af det pågældende stof udenfor cellen, og hvor k er en positiv konstant, som bestemmes af cellemembranens "gennemtrængelighed" for det givne stof.
Ifølge sætning 3.4 ser vi, at funktionsforskriften for c(t) er givet ved:

$$\boxed{c(t) = (c(0) - c_o) \cdot e^{-kt} + c_o}$$

Øvelse a):
Find $\lim\limits_{t \to \infty} c(t)$, og kommentér/fortolk resultatet.

Øvelse b):
Skitsér grafen for c(t) og kommentér dens udseende og betydningen heraf, idet $c(0) = 20$ µg pr. ml, $c_o = 38$ µg pr. ml og $k = 0{,}082$ timer^{-1}. ♥

<u>Eksempel 4.19.</u>
I eksempel 2.8 så vi på en model for diffusion af et stof imellem to "afdelinger" i en organisme (f.eks. et menneskes krop), og vi fandt, at koncentrationen c_1 af stoffet i afdeling 1 opfylder følgende ligning:

$$c_1'(t) = -\beta\cdot(c_1(t) - \frac{m}{V})$$

hvor β er en positiv konstant, som fortæller noget om forholdet imellem de to afdelingers rumfang og om "gennemtrængelighed" for det pågældende stof imellem de to afdelinger.
Ifølge sætning 3.4 ser vi, at:

$$\boxed{c_1(t) = \left(c_1(0) - \frac{m}{V}\right)\cdot e^{-\beta\cdot t} + \frac{m}{V}}$$

<u>Øvelse a):</u>

Hvilken betydning har størrelserne $c_1(0)$ og $\frac{m}{V}$?

Find $\lim\limits_{t\to\infty} c_1(t)$ og kommentér resultatet.

På helt samme måde som med $c_1(t)$ (jfr. eksempel 2.8) får vi:

$$c_2'(t) = -\gamma\cdot(c_2(t) - c_1(t)),$$

hvor γ er en positiv konstant (som ikke nødvendigvis er den samme som α), samt at

$$c_1(t) = \frac{m}{V_1} - \frac{V_2}{V_1}\cdot c_2(t)$$

Indsættes udtrykket for $c_1(t)$ i udtrykket for $c_2'(t)$, får vi efter den samme type omskrivninger som i eksempel 2.8 (gennemfør dem !), at:

$$c_2'(t) = -\psi\cdot(c_2(t) - \frac{m}{V}) \quad , \quad \text{hvor} \quad \psi = \gamma\cdot(1+\frac{V_2}{V_1}).$$

Ved hjælp af sætning 3.4 får vi herefter:

$$c_2(t) = \left(c_2(0) - \frac{m}{V}\right)\cdot e^{-\psi\cdot t} + \frac{m}{V}$$

Vi har hermed alt i alt fundet et udtryk for både $c_1(t)$ og $c_2(t)$ – og kunne dermed være "glade og tilfredse". Men det viser sig faktisk, at $\psi = \beta$, hvilket ikke umiddelbart ser ud til at være tilfældet, når vi tænker på, at $\beta = \alpha\cdot(1+\frac{V_1}{V_2})$ og $\psi = \gamma\cdot(1+\frac{V_2}{V_1})$.

Vi vil derfor nu **bevise, at $\psi = \beta$.**
<u>Argumentet er ikke helt simpelt, men det forløber således:</u>

Vi ved, at den samlede masse m af stoffet opfylder ligningen: $V_1\cdot c_1(t) + V_2\cdot c_2(t) = m$.
Hvis vi heri indsætter udtrykkene for $c_1(t)$ og $c_2(t)$ får vi (idet: $V_1 + V_2 = V$):

$$m = V_1\cdot(\left(c_1(0) - \frac{m}{V}\right)\cdot e^{-\beta\cdot t} + \frac{m}{V}) + V_2\cdot(\left(c_2(0) - \frac{m}{V}\right)\cdot e^{-\psi\cdot t} + \frac{m}{V}) \quad \Leftrightarrow$$

$$m = V_1 \cdot \left(c_1(0) - \frac{m}{V}\right) \cdot e^{-\beta \cdot t} + V_2 \cdot \left(c_2(0) - \frac{m}{V}\right) \cdot e^{-\psi \cdot t} + V_1 \cdot \frac{m}{V} + V_2 \cdot \frac{m}{V} \Leftrightarrow$$

$$0 = V_1 \cdot \left(c_1(0) - \frac{m}{V}\right) \cdot e^{-\beta \cdot t} + V_2 \cdot \left(c_2(0) - \frac{m}{V}\right) \cdot e^{-\psi \cdot t} \Leftrightarrow$$

$$V_1 \cdot \left(\frac{m}{V} - c_1(0)\right) \cdot e^{-\beta \cdot t} = V_2 \cdot \left(c_2(0) - \frac{m}{V}\right) \cdot e^{-\psi \cdot t} \Leftrightarrow$$

$$\frac{V_1 \cdot \left(\frac{m}{V} - c_1(0)\right)}{V_2 \cdot \left(c_2(0) - \frac{m}{V}\right)} = \frac{e^{-\psi \cdot t}}{e^{-\beta \cdot t}} \Leftrightarrow \frac{V_1 \cdot \left(\frac{m}{V} - c_1(0)\right)}{V_2 \cdot \left(c_2(0) - \frac{m}{V}\right)} = e^{(\beta - \psi) \cdot t}$$

Da brøken på venstresiden af lighedstegnet kun indeholder konstanter, er den selv en konstant. Heraf ses, at udtrykket $e^{(\beta-\psi)\cdot t}$ også må være konstant, uanset værdien af t. Dette er kun muligt, hvis $\beta - \psi = 0$. Vi ser dermed, at $\beta = \psi$. Q.e.d.

Vi ser dermed, at det endelige udtryk for $c_2(t)$ er givet ved:

$$\boxed{c_2(t) = \left(c_2(0) - \frac{m}{V}\right) \cdot e^{-\beta \cdot t} + \frac{m}{V}}$$

dvs. at $c_2(t)$ ser fuldstændig ud som $c_1(t)$ – bortset fra værdien af konstanten foran leddet $e^{-\beta \cdot t}$.

Øvelse b):

Find $\lim\limits_{t\to\infty} c_2(t)$ og sammenlign med $\lim\limits_{t\to\infty} c_1(t)$

Overvej, om denne sammenlignings resultat synes rimeligt, når modellens forudsætninger tages i betragtning.

Ud fra resultatet $\beta = \psi$ får vi: $\alpha \cdot (1 + \frac{V_1}{V_2}) = \gamma \cdot (1 + \frac{V_2}{V_1})$, og dermed: $\alpha \cdot \frac{V_2 + V_1}{V_2} = \gamma \cdot \frac{V_1 + V_2}{V_1}$,

dvs. $$\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{V_2}{V_1}.$$

Forholdet mellem de to proportionalitetskonstanter α og γ fra differentialligningerne for $c_1(t)$ og $c_2(t)$ er altså lig med det "omvendte" forhold af de to afdelingers rumfang.

Den gennemgåede model kan relativt let udvides til at omfatte den situation, hvor der tages højde for, at det aktuelle stof relativt hurtigt udskilles af organismen (typisk via nyrerne). Dette fører til en ret kompliceret andenordens differentialligning, som vil blive omtalt og bearbejdet i kapitel 6. ♥

Øvelse 4.20.
Et legeme med et intracellulært volumen på 33 liter og et extracellulært volumen på 24 liter gives en injektion af stoffet QPW17, som kun meget langsomt udskilles igennem nyrerne. Injektionen, som er på 200 mg, gives i det extracellulære volumen, medens startkoncentrationen i det intracellulære volumen er 0 mg/liter. Efter 50 minutter måles koncentrationen af QPW17 i det extracellulære volumen til at være: 6,1 mg/liter.

- Bestem værdien af konstanten β (jfr. eksempel 4.19)
- Opskriv funktionsudtryk for koncentrationerne af QPW17 i såvel det intracellulære som det extracellulære volumen.
- Tegn graferne for disse to funktioner i samme koordinatsystem og kommentér resultatet. ♥

Øvelse 4.21.
Salgschefen for et eksportfirma skal på en forretningsrejse til det centrale Afrika. Før afrejsen vaccineres salgschefen mod forskellige sygdomme. Det injicerede stofs mængde i kroppen aftager eksponentielt med tiden, idet det nedbrydes og udskilles.
Halveringstiden i organismen er ca. 9 dage, og der injiceres 5 ml af stoffet før afrejsen.

- Angiv et funktionsudtryk for kroppens indhold af vaccine som funktion af tiden målt i dage.
- Lægerne regner med, at vaccinen giver beskyttelse, så længe legemet indeholder mindst ½ ml. Hvor lang tid kan forretningsrejsen højst vare, hvis salgschefen skal være beskyttet mod sygdommene ? ♥

Eksempel 4.22.
I eksempel 2.9 så vi på optagelse af bly i organismen. Vi så, at hvis en person i en kortere periode har været udsat for blyforgiftning og hvis personen ikke optager yderligere bly, så vil blyindholdet langsomt udskilles, idet der gælder følgende ligning: $B'(t) = -U_{Pb}\cdot B(t)$, hvor B(t) er blymængden i organismen til tiden t og U_{Pb} er udskillelseskoefficienten for bly. Ifølge sætning 3.1 ser vi dermed, at blymængden i organismen er eksponentielt aftagende, og at $B(t) = B(0)\cdot e^{-U_{Pb}\cdot t}$

Man ved erfaringsmæssigt, at halveringstiden for blyindholdet er ca. 8 år i et voksent menneske.

Øvelse a):

Vis at udskillelseskoefficienten U_{Pb} ca. er lig med: $2{,}374\cdot 10^{-4}$ døgn^{-1}

Hvis den betragtede person i blyforgiftningsperioden i alt har optaget 72 mg bly i organismen, og hvis vi sætter tiden t = 0 ved blyforgiftningsperiodens ophør, så har vi med meget god tilnærmelse, at: $B(t) = 72\cdot e^{-2{,}374\cdot 10^{-4}\cdot t}$

Øvelse b):

Hvor lang tid går der inden blyindholdet i organismen er nede på 10 mg ?

Som omtalt i eksempel 2.9 forholder det sig ofte således, at man jævnligt optager en smule bly, hvormed ændringshastigheden B′(t) (målt i mg pr. døgn) af organismens blyindhold kan udtrykkes ved følgende ligning:

$$B'(t) = O_{Pb} - U_{Pb}\cdot B(t)$$

hvor O_{Pb} angiver den optagene blymængde pr. døgn.

Øvelse c):

Find en funktionsforskrift for B(t), (dvs. løs denne sidstnævnte differentialligning). Som ved alle andre differentialligninger optræder der en vilkårlig konstant i løsningen B(t). Udtryk denne konstant ved hjælp af værdierne O_{Pb} , U_{Pb} og B(0), og indsæt resultatet i udtrykket for B(t).

Øvelse d):

Vi ser på den samme person som ovenfor og antager, at vedkommende efter blyforgiftningsperioden optager 0,01 mg bly pr. døgn.

1) Opskriv en funktionsforskrift for blyindholdet B(t) i personen.
2) Skitsér grafen for B(t) og kommentér resultatet.
3) Bestem $\lim_{t\to\infty} B(t)$ og forklar, hvad denne værdi står for.
4) Løs pkt. 1)-3) igen, idet vi nu antager, at vedkommende efter blyforgiftningsperioden optager 0,03 mg bly pr. døgn. ♥

Eksempel 4.23.

I eksempel 2.10 beskrev vi en tæthedsafhængig model for populationsvækst, hvori der indgår en given bærekapacitet K, (dvs. en øvre grænse for antallet af individer, der kan eksistere i miljøet). Vi fandt, at udviklingen i antallet af individer N(t) i det betragtede miljø kan beskrives ved følgende ligning: $N'(t) = s\cdot N(t)\cdot(K - N(t))$.

Ifølge sætning 3.9 findes der derfor en konstant c, så: $N(t) = \dfrac{K}{1+c\cdot e^{-sKt}}$

Det grafiske billede af N(t), der som omtalt kaldes en logistisk kurve, er skitseret på følgende figur:

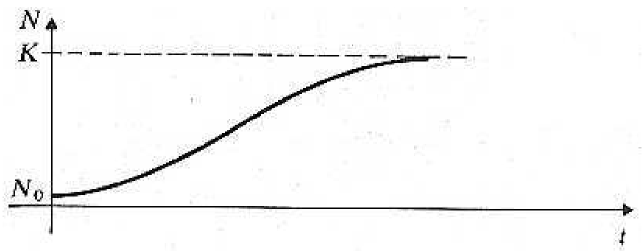


Fig. 4.4

Øvelse a):

1) Argumentér for, at $N(t) \to K$ for $t \to \infty$. Kommentér resultatet.
2) Argumentér for, at konstanten c er givet ved: $c = \dfrac{K}{N_o} - 1$, hvor $N_o = N(0)$

Vi kan opsummere resultaterne til, at den logistiske vækstmodel for populationer med bærekapacitet K og begyndelsesantal $N_o = N(0)$ i et afgrænset, veldefineret miljø er givet ved formlen:

$$\boxed{N(t) = \frac{K}{1+c\cdot e^{-sKt}} \quad , \quad \text{hvor } c = \frac{K}{N_o} - 1}$$

Øvelse b):

Tegn grafen for N(t), hvis K = 5600, $N_o = 700$ og $s = 1{,}78\cdot 10^{-5}$ og kommentér resultatet. ♥

Øvelse 4.24.
I et givet miljø (på en større øde ø) udsættes 500 får. Størrelsen N(t) af fårepopulationen kan tilnærmelsesvist beskrives ved en logistisk vækstfunktion

$$N(t) \;=\; \frac{K}{1+c\cdot e^{-sKt}}$$

hvor K er miljøets bærekapacitet for får.

a) Fem år senere tælles der 800 får på øen. Find en tilnærmet værdi af størrelsen s·K, idet vi antager, at 800 er væsentlig mindre end miljøets bærekapacitet.
(Vejledning: N(t) opfylder forudsætningen $N'(t) = s\cdot N(t)\cdot(K - N(t))$ for den logistiske vækstmodel. Dette udtryk kan omskrives til $N'(t) = s\cdot K\cdot N(t)\cdot \frac{K-N(t)}{K}$, hvor vi bemærker, at brøken $\frac{K-N(t)}{K}$ er relativt tæt på 1, dvs. $N'(t) \approx s\cdot K\cdot N(t)$)

b) Efter 40 år er der ca. 4900 får på øen.
Beregn værdien af bærekapaciteten og bestem en funktionsforskrift for N(t).
(Vejledning: Benyt værdien af s·K fundet under pkt. a) samt at konstanten c kan udtrykkes ved: $c = \frac{K}{500} - 1$ (hvorfor ?), hvorefter der kan opstilles en ligning med K som eneste ubekendte). ♥

Øvelse 4.25.
For en bestemt ”laverestående” dyreart er der under kontrollerede forhold (dvs. i et laboratorieeksperiment) målt følgende populationsstørrelser:

tid (dage)	6	9	12	15	18	21	24	27	30	34	37
antal	6	12	25	49	70	102	160	221	262	286	324

Opstil en logistisk model (altså en logistisk vækstfunktion) tilpasset disse data. ♥

Økonomiske, behavioristiske og lign. emner.

Eksempel 4.26.
I eksempel 2.11 så vi på effektiviteten af en medarbejder i en virksomhed. Medarbejderen fremstiller produktet P – og der var enten tale om en ny medarbejder eller et nyt produkt – eller evt. begge dele. Vi fandt frem til, at den tid T(x), som medarbejderen anvender til produktion af den næste enhed, når medarbejderen allerede har produceret x enheder, opfylder følgende ligning:

$$T'(x) = -s\cdot(\,T(x) - T_{opt})$$

hvor T_{opt} er tidsforbruget pr. enhed ved den optimalt opnåelige effektivitet ved produktion af P og hvor s fortæller noget om medarbejderens indlæringshastighed.

Ifølge eksempel 3.5 (sætning 3.4) har vi nu, at: $T(x) = T_{opt} + (T(0) - T_{opt})\cdot e^{-sx}$
T(0) er den tid medarbejderen bruger ved produktionen af den første enhed. Grafen for T(x) ser ud som vist på følgende figur 4.5:

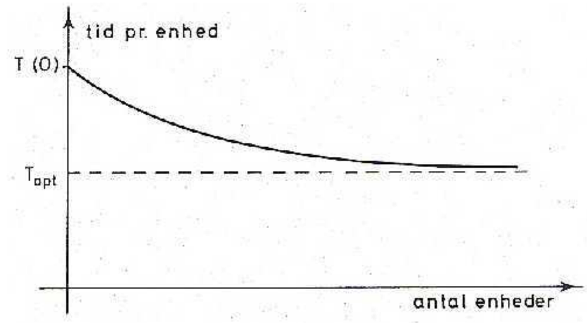


Fig. 4.5

Af såvel funktionsforskriften som grafen for T(x) fremgår, at $T(x) \to T_{opt}$ for $x \to \infty$.
(Kommentér dette !)

Det har for en gennemsnitssyerske på en tøjfabrik, der laver kvaliteteskjorter, vist sig, at T(0) = 45 minutter pr. enhed, at T(20) = 38 minutter pr. enhed samt at T_{opt} = 30 minutter pr. enhed.
Herud fra finder vi, at: $T(x) = 30 + 15 \cdot e^{-0,03143 \cdot x}$

Øvelse: Eftervis (Kontrollér) denne udregning, og tegn grafen for T(x).

Hvis vi vil beregne den samlede tid anvendt til produktionen af de 25 første skjorter, så kan beregningen gennemføres således (idet vi – som på figur 4.5 - betragter T(x) som en kontinuert model):

$$T_{ialt,25\ stk.} = \int_0^{25} T(x)\,dx = \int_0^{25} (30 + 15 \cdot e^{-0,03143 \cdot x})\,dx$$

$$= \left[30x + 15 \cdot e^{-0,03143x} \cdot \frac{1}{-0,03143} \right]_0^{25} = 1010$$

(Kontrollér !). Den samlede tid ved produktion af de 25 første skjorter er altså ca. 1010 minutter. ♥

Eksempel 4.27.

I eksempel 2.12 så vi på virksomheden Cleanpaper's afsætning af en ny type køkkenruller. Og vi fandt, at salget (afsætningen) s(t) pr. dag efter introduktionen på markedet opfylder ligningen:

$$s'(t) = c \cdot s(t) \cdot (M - s(t))$$

hvor M er den forventede mætningsværdi for produktet på markedet og hvor c er en konstant, som fortæller noget om indtrængningshastigheden på markedet.

Ifølge sætning 3.9 findes der en konstant, som vi hér kalder b, da c er "optaget", således at:

$$s(t) = \frac{M}{1 + b \cdot e^{-cMt}}$$

Salgstallet pr. dag kan altså beskrives ved en logistisk vækstfunktion. I en sådan model taler man ofte om en introduktionsfase, en vækstfase og en mætningsfase svarende til hhv. den første, den midterste og den sidste del af kurven.

Belært af erfaringer med indtrængningshastigheder på markedet for andre produkter estimerer virksomheden, at cM = 0,04. Det viste sig desuden, at der i begyndelsen blev solgt 1000 stk. pr. dag, samt at der efter 50 dage blev solgt ca. 3300 stk. pr. dag.

Øvelse a): Bestem værdierne af konstanterne M og b i modellen.
Skitsér grafen for s(t), $t \in [0;150]$

Cleanpaper definerer deres introduktionsfase til at vare indtil det daglige salg er forøget med 50% af begyndelsesværdien, og de definerer deres mætningsfase til at starte, når det daglige salg er oppe på 90 % af mætningsværdien.

Øvelse b) :
Beregn hvor lang tid introduktionsfasen og vækstfasen varer for de betragtede køkkenruller.♥

Eksempel 4.28.
En virksomhed markedsfører en ny type vaskepulver og regner med, at det solgte antal kg S(t) pr. dag tilnærmelsesvist kan beskrives ved en logistisk vækstfunktion:

$$S(t) = \frac{a}{1+b\cdot e^{ct}}$$

hvor a, b og c er de konstanter, der fastlægger modellen. (Bemærk, at a = M, b = c og c = – kM i sætning 3.9, men som bekendt kan man navngive sine konstanter og variable, som man vil).

Virksomheden estimerer på baggrund af en markedsanalyse og tidligere erfaringer, at det nye produkt efterhånden kan erobre en markedsandel, som svarer til en afsætning på ca. 5000 kg pr. dag.
I begyndelsen blev der solgt ca. 1000 kg pr. dag, og efter 40 dage blev der solgt ca. 2100 kg pr. dag.
Ud fra disse informationer kan parametrene a, b og c fastlægges på følgende måde:
Da S(t) er en logistisk vækstfunktion har vi (jfr. sætning 3.12), at $S(t) \to a$ for $t \to \infty$. Dette giver os, at a = 5000. Og da S(0) = 1000 ser vi (jfr. sætning 3.12), at b = 4. Endelig kan c bestemmes af s(40) = 2100, idet c er den eneste ubekendte i ligningen: $2100 = \dfrac{5000}{1+4\cdot e^{c\cdot 40}}$. Vi finder (kontrollér), at c = – 0,02659, hvormed vi i alt ser, at:

$$S(t) = \frac{5000}{1+4\cdot e^{-0,02659\cdot t}}$$

Grafen for S er vist på følgende figur:

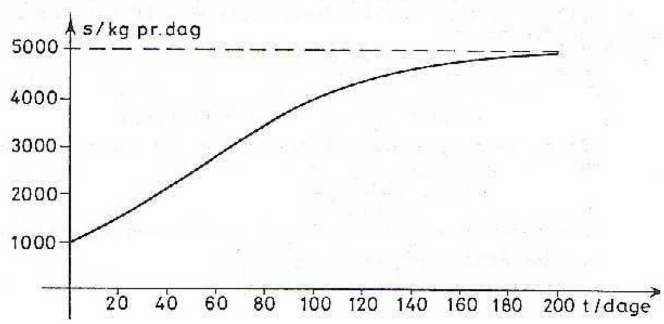


Fig. 4.6

Hvis vi ønsker at finde det samlede salg i løbet af de første 60 dage, så beregner vi:

$$\int_0^{60} S(t)\,dt = \int_0^{60} \frac{5000}{1+4\cdot e^{-0,02659\cdot t}}\,dt$$

For at udregne dette integrale anvendes sætning 3.17. Vi skal imidlertid først bestemme størrelsen k, som indgår i sætning 3.17. Men da kM = 0,02659 og M = a = 5000 ser vi, at $k = 5{,}318 \cdot 10^{-6}$. Ifølge sætning 3.17 får vi nu (kontrollér):

$$\int_0^{60} S(t)\,dt \;=\; \int_0^{60} \frac{5000}{1+4\cdot e^{-0{,}02659\cdot t}}\,dt \;=\; \left[\frac{1}{5{,}318\cdot 10^{-6}}\cdot \ln(e^{0{,}02659\cdot t}+4)\right]_0^{60} \;=\; 109.066$$

Ifølge modellen sælges der altså ca. 109.000 kg i løbet af de første 60 dage.

<u>Øvelse:</u> Argumentér for, at $S'(t)$ er den hastighed, hvormed det daglige salg forøges.
Vis, at efter 40 dage forøges det daglige salg med ca. 32,4 kg pr. dag ♥

<u>Øvelse 4.29.</u>
Bestem det samlede salg i løbet af de første 80 dage i eksempel 4.27 (Jfr. eksempel 4.28). ♥

<u>Eksempel 4.30.</u>
I eksempel 2.13 så vi på bilkunders loyalitet som funktion af tilfredsheden med den service, som kunderne oplever i forbindelse med køb og vedligeholdelse af APF-biler. Vi argumenterede for, at loyalitetsfunktionen L(T) som funktion af tilfredsheden T opfylder følgende ligning:

$$L'(T) \;=\; \alpha \cdot L(T)\cdot(L_{max} - L(T))$$

hvor L_{max} er en øvre loyalitetsgrænse, som ikke kan overskrides uanset hvor sublim en service man fra APF's side måtte give kunderne.

Ifølge sætning 3.9 findes der en konstant c, så: $L(T) = \dfrac{L_{max}}{1+c\cdot e^{-\alpha L_{max}\cdot T}}$

Loyaliteten som funktion af tilfredsheden med servicen følger altså en logistisk vækstmodel.

Det har vist sig, at 25 % af kundemassen er så "inkarnerede APF-fans", at de vil købe en APF-bil igen, også selv om de ikke oplever nogen service. Det har desuden vist sig, at hvis tilfredsheden er 40, så er loyaliteten 75 %. Endelig skønnes, at L_{max} = 90 %.

<u>Øvelse:</u> Vis, at konstanterne c og α er givet ved: $c = 2{,}6$ og $\alpha = 7{,}1249\cdot 10^{-4}$
Beregn "loyalitetspotentialet for service", dvs. L(100) – L(0), og giv en kortfattet forklaring på, hvad dette tal betyder (dvs. hvordan dette tal kan fortolkes).
Beregn: 100% - L(100), og giv en kortfattet forklaring på, hvad dette tal betyder.
Kommentér forskellen på L_{max} og L(100). ♥

Kap. 5: Separation af de variable.

I dette kapitel skal vi gennemgå en metode til omskrivning og dermed løsning af visse 1.ordens differentialligninger, nemlig ligninger der kan skrives på formen:

$$y' = h(x) \cdot g(y)$$

hvor h er en kontinuert funktion af den uafhængige variable x, og hvor g er en kontinuert funktion af den afhængige variable y.
Vi starter med et par eksempler for at illustrere princippet i metoden og i beviset herfor, inden vi formulerer og beviser den gældende sætning. I det første eksempel foretager vi nogle omskrivninger, hvis bevismæssige grundlag altså først fastlægges senere, og i det andet eksempel gennemføres beregningerne, så de ligger så tæt op af det efterfølgende bevis som muligt.

Eksempel 5.1.

Vi vil løse differentialligningen $y' = -\frac{x}{y}$. Vi bemærker først, at ligningen kan skrives som:

$y' = -x \cdot \frac{1}{y}$, hvormed differentialligningen er på den ønskede form, hvor $h(x) = -x$ og $g(y) = \frac{1}{y}$.

Vi ser desuden, at vi må forudsætte, at $y \neq 0$. Da y står for en ubekendt, differentiabel funktion, og dermed for en kontinuert funktion, må vi derfor forlange, at $y > 0$ eller at $y < 0$, idet hvis $y = f(x)$ er en løsning defineret i et interval I_f, og hvis y både skulle antage positive og negative værdier, så måtte y også antage værdien 0, hvormed udsagnet i differentialligningen ikke ville være defineret. Det følgende er altså under forudsætning af, at $y > 0$ <u>eller</u> $y < 0$.

Hvis vi skriver differentialligningen på formen: $\frac{dy}{dx} = -x \cdot \frac{1}{y}$ og opfatter differentialkvotienten som en brøk imellem to differentialer dy og dx, så kan differentialligningen omskrives til:

$y\,dy = -x\,dx$ og ved integration på begge sider af lighedstegnet får vi dermed: $\int y\,dy = \int -x\,dx$

Vi samler de gennemførte beregninger og argumenter i følgende udsagn:

$$\text{For } y > 0 \text{ eller } y < 0: \quad \frac{dy}{dx} = -x \cdot \frac{1}{y} \quad \Leftrightarrow \quad \int y\,dy = \int -x\,dx$$

og ved udregning af integralerne får vi: $\frac{1}{2}y^2 = -\frac{1}{2}x^2 + k$, hvor k er en vilkårlig konstant.

Inden vi isolerer y – og dermed finder en forskrift for løsningerne – bemærker vi, at

$$\tfrac{1}{2}y^2 = -\tfrac{1}{2}x^2 + k \;\Leftrightarrow\; x^2 + y^2 = 2k \;\Leftrightarrow\; (x-0)^2 + (y-0)^2 = 2k$$

Hvis $k < 0$, er der ingen løsning. Hvis $k = 0$, kan kun punktet : (0,0) bruges, men da $y \neq 0$ giver det ingen løsning. Hvis endelig $k > 0$, så er løsningskurven en del af en cirkel med centrum i (0,0). (Da $y < 0$ eller $y > 0$, er løsningskurverne halvcirkler). Da

$$\tfrac{1}{2}y^2 = -\tfrac{1}{2}x^2 + k \quad \Leftrightarrow \quad y = \pm\sqrt{2k - x^2}$$

ser vi i alt, at løsningerne er givet ved:

$$f(x) = \sqrt{2k - x^2} \quad (\text{for } y > 0) \qquad \text{eller} \qquad f(x) = -\sqrt{2k - x^2} \quad (\text{for } y < 0)$$

I begge tilfælde er definitionsmængden: $\left]-\sqrt{2k}\,;\sqrt{2k}\right[$

Bemærk, at intervalendepunkterne ikke er med, idet $y = 0$ i disse punkter. ♥

<u>Eksempel 5.2.</u>

Vi ser i dette eksempel på differentialligningen: $y' = (2x+3)\cdot e^{y}$, (jfr. eksempel 1.1 h)).
Vi bemærker først, at der ikke er noget i <u>denne</u> differentialligning, som <u>på forhånd</u> lægger begrænsninger på x eller y.
Lad nu G(y) være en stamfunktion til $\frac{1}{e^{y}}$, dvs. $G'(y) = \frac{1}{e^{y}}$ og $G(y) = \int \frac{1}{e^{y}}dy$, og lad H(x) være en stamfunktion til 2x + 3, dvs. $H'(x) = 2x+3$ og $H(x) = \int(2x+3)\,dx$.
Der gælder da følgende (overvej nøje de enkelte skridt, og hvorfor der gælder "ensbetydende"):

f er en løsning til $y' = (2x+3)\cdot e^{y} \quad\Leftrightarrow$

$$\forall\, x \in I_f: \; f'(x) = (2x+3)\cdot e^{f(x)} \quad\Leftrightarrow$$

$$\forall\, x \in I_f: \; \frac{1}{e^{f(x)}}\cdot f'(x) = 2x+3 \quad\Leftrightarrow$$

$$\forall\, x \in I_f: \; G'(f(x))\cdot f'(x) = 2x+3 \quad\Leftrightarrow$$

$$\forall\, x \in I_f: \; (G(f(x)))' = H'(x) \quad\Leftrightarrow$$

$$\forall\, x \in I_f: \; G(f(x)) = H(x)+k \quad\Leftrightarrow$$

f er en løsning til ligningen: $G(y) = H(x) + k \quad\Leftrightarrow$

f er en løsning til ligningen: $\int \frac{1}{e^{y}}dy = \int(2x+3)\,dx + k$

hvor k er en vilkårlig konstant, og hvor I_f som tidligere er det til løsningen f hørende definitionsinterval, som endnu er ukendt.
Den oprindelige differentialligning løses herefter ved at bestemme y udtrykt ved x ud fra den sidste ligning, hvilket i det konkrete tilfælde forløber således:

$$(*) \qquad \int \frac{1}{e^{y}}dy = \int(2x+3)\,dx + k \;\Leftrightarrow\; -e^{-y} = x^2+3x+k \;\Leftrightarrow\; y = -\ln(-x^2-3x-k)$$

Det ses heraf, at løsningerne er givet ved:

$$f(x) = -\ln(-x^2-3x-k) \;,\; x \in I_f \;,$$

hvor I_f er fastlagt som et interval, hvor udtrykket for f er defineret, dvs. hvor $-x^2-3x-k > 0$.
I_f kan altså først bestemmes, når k kendes – og dette er typisk knyttet til kendskab om, at løsningskurven skal gå igennem et bestemt punkt i koordinatsystemet.

Vi vil derfor nu bestemme en løsning, som går igennem punktet (–2 , 0). Der skal altså gælde, at:
$0 = -\ln(-(-2)^2-3(-2)-k) \;\Leftrightarrow\; 0 = \ln(-4+6-k) \;\Leftrightarrow\; 1 = 2-k \;\Leftrightarrow\; k = 1.$
Der er altså kun én løsning, der går igennem punktet (–2 , 0), nemlig: $f(x) = -\ln(-x^2-3x-1)$.
Vi mangler nu blot at bestemme I_f , hvilket som omtalt sker ved at løse uligheden: $-x^2-3x-1 > 0$

Denne løses på sædvanlig måde, og løsningsmængden er $]-2{,}618;-0{,}382[$. Da denne er ét interval, og da –2 er indeholdt i intervallet, kan vi i alt konkludere, at der er én løsning, som går igennem punktet (–2 , 0), nemlig:

$$f(x) = -\ln(-x^2-3x-1) \ , \ x \in \ ]-2{,}618;-0{,}382[$$

Dels af hensyn til beviset for den følgende sætning, dels for at gå lidt mere i dybden med, hvad den ovenstående beregning egentlig betyder, vil vi til slut i eksemplet vende tilbage og se lidt på G(y).
Da $G'(y) = \frac{1}{e^y} > 0$ for alle y, ser vi, at G er voksende. Specielt er G da monoton og har en omvendt funktion, som vi nu vil finde.
Først finder vi et udtryk for G: $G(y) = \int \frac{1}{e^y}dy = \int e^{-y}dy = -e^{-y}$. Dernæst minder vi om, at en omvendt funktion er givet ved: $G(y) = t \Leftrightarrow y = G^{-1}(t)$, hvor t er en variabel (bemærk: benævnelsen x er allerede "optaget"). Endelig finder vi et udtryk for $G^{-1}(t)$ på følgende måde:

$$G(y) = t \Leftrightarrow -e^{-y} = t \Leftrightarrow -y = \ln(-t) \Leftrightarrow y = -\ln(-t)$$

hvormed vi ser, at: $G^{-1}(t) = -\ln(-t)$.
Hvis vi sammenligner denne beregning med omskrivningerne i linien markeret med (∗), så ser vi, at dette at bestemme et udtryk for y (altså en vilkårlig løsning til differentialligningen) svarer til at bestemme et udtryk for G^{-1}, samt at $y = G^{-1}(x^2+3x+k)$ idet t hér svarer til x^2+3x+k .
Hvis vi samtidig husker på, at $H(x) = x^2+3x$, så ser vi, at y er givet ved: $y = G^{-1}(H(x)+k)$, hvilket i øvrigt også fås direkte af udtrykket G(y) = H(x) + k. ♥

Vi kan nu formulere og bevise sætningen om separation af de variable, hvis navn naturligvis skyldes, at de variable x og y adskilles på hver sin side af lighedstegnet:

Sætning 5.3.

Hvis h er en funktion, der er kontinuert i et interval I, og g er en funktion, der er kontinuert og forskellig fra 0 i et interval J, så er følgende to udsagn ensbetydende:

1) f er en løsning til ligningen: $\frac{dy}{dx} = h(x)\cdot g(y)$

2) f er en løsning til ligningen : $\int \frac{1}{g(y)}dy = \int h(x)dx + k$

hvor k er en vilkårlig konstant.

Hvis $a \in I$ er et indre tal i I, og hvis $b \in J$ er et indre tal i J, så går der netop én løsning (integralkurve) til differentialligningen igennem punktet (a , b).

Sætningen bruges i praksis – som anført i eksempel 5.1 og 5.2 – ved at "omskrive" $\frac{dy}{dx} = h(x)\cdot g(y)$ til $\int \frac{1}{g(y)}dy = \int h(x)dx + k$, og så regne videre på denne ligning indtil y (= f(x)) er isoleret.

Bevis for sætning 5.3:

Da g er kontinuert og forskellig fra 0 i intervallet J, er 1/g også kontinuert i J. Funktionen 1/g har derfor en stamfunktion, som vi vil kalde G, altså: $G'(y) = \dfrac{1}{g(y)}$ og $G(y) = \int \dfrac{1}{g(y)}dy$ for alle $y \in J$.
Da h(x) er kontinuert i intervallet I, har h en stamfunktion i I, som vi vil kalde H. Der gælder altså: $H'(x) = h(x)$ og $H(x) = \int h(x)dx$ for alle $x \in I$.
Der gælder da følgende (overvej nøje de enkelte skridt, og hvorfor der gælder "ensbetydende"):

$$\text{f er en løsning til } \frac{dy}{dx} = h(x)\cdot g(y) \quad \Leftrightarrow$$

$$\forall\, x \in I_f : \; f'(x) = h(x)\cdot g(f(x)) \quad \Leftrightarrow$$

$$\forall\, x \in I_f : \; \frac{1}{g(f(x))}\cdot f'(x) = h(x) \quad \Leftrightarrow$$

$$\forall\, x \in I_f : \; G'(f(x))\cdot f'(x) = h(x) \quad \Leftrightarrow$$

$$\forall\, x \in I_f : \; (G(f(x)))' = H'(x) \quad \Leftrightarrow$$

$$\forall\, x \in I_f : \; G(f(x)) = H(x) + k \quad \Leftrightarrow$$

$$\text{f er en løsning til ligningen: } G(y) = H(x) + k \quad \Leftrightarrow$$

$$\text{f er en løsning til ligningen: } \int \frac{1}{g(y)}dy = \int h(x)dx + k$$

hvor k er en konstant, og hvor I_f som tidligere er det til løsningen f hørende definitionsinterval, som endnu er ukendt, men som vi dog ved er en delmængde af intervallet I. (Se mere herom i den næste del af beviset).
Den oprindelige differentialligning løses herefter ved at bestemme y udtrykt ved x og k ud fra den sidste ligning. Hermed er første del af sætningen bevist.

Anden del af sætningen (og indirekte dette at bestemme y udtrykt ved x og k) fremgår af følgende:

Da funktionen 1/g som omtalt er kontinuert i intervallet J, og da 1/g aldrig giver nul, ser vi, at 1/g har konstant fortegn i J (altså enten: $1/g(y) > 0$ for alle $y \in J$, <u>eller</u> $1/g(y) < 0$ for alle $y \in J$).
Da $G'(y) = \dfrac{1}{g(y)}$ ser vi hermed, at $G(y)$ enten er voksende i hele J eller aftagende i hele J.
G er altså monoton og har derfor en omvendt funktion G^{-1}, hvormed det er muligt at isolere y:

$$G(y) = H(x) + k \quad \Leftrightarrow \quad y = G^{-1}(H(x) + k)$$

En løsning f til den oprindelige differentialligning opfylder altså, at: $f(x) = G^{-1}(H(x) + k), \quad x \in I_f$

For at kunne udtale os om I_f , må vi først se på Dm(f), idet $I_f \subseteq$ Dm(f). Da I = Dm(h) = Dm(H) , gælder der (overvej !), at :

$$\mathrm{Dm}(f) \;=\; \left\{x \in I \,\middle|\, H(x)+k \in \mathrm{Dm}(G^{-1})\right\} \;=\; \left\{x \in I \,\middle|\, H(x)+k \in \mathrm{Vm}(G)\right\}$$

Vi ser hermed (som også antydet ovenfor), at f ikke nødvendigvis er defineret i hele intervallet I. Afhængig af Vm(G) og værdien af konstanten k kan det endda forekomme, at Dm(f) = Ø og dermed, at I_f = Ø.

Lad nu (a , b) være et vilkårligt valgt punkt, hvor a ∈ I og b ∈ J, således at a og b er indre tal i hhv. I og J, (dvs. at a og b ikke er endepunkter for intervallerne). Vi skal nu bevise, at der går netop én løsning igennem punktet (a , b). Dette gøres ved at vise, at der <u>findes</u> en løsning, samt at der <u>højst</u> kan være én løsning med de ønskede egenskaber.
Da a ∈ I og b ∈ J, og da Dm(H) = I og Dm(G) = J , ser vi, at H(a) og G(b) er defineret. Hermed kan tallet G(b) – H(a) udregnes. Vi sætter k_o lig med dette tal, altså: k_o = G(b) – H(a). Heraf ses, at H(a) + k_o = G(b) ∈ Vm(G). Hvis vi sætter $f_o(x) = G^{-1}(H(x)+k_o)$, så har vi dels, at f_o er en løsning til differentialligningen, dels (jfr. de ovenstående beregninger vedr. Dm(f)), at a ∈ Dm(f_o), samt at $f_o(a) = G^{-1}(H(a)+k_o) = G^{-1}(G(b)) = b$.
Da a og b ikke er intervalendepunkter kan det bevises, at der findes en omegn ω(a) om a, således at ω(a) ⊆ Dm(f_o), hvormed det altså er muligt at finde et interval I_f omkring a, hvor f_o er defineret. Dette bevis medtages ikke hér. Interesserede læsere henvises til nedenstående øvelse 5.4.
Alt i alt ser vi dermed, at der altså <u>findes</u> en løsning med de ønskede egenskaber.
Omvendt ser vi, at hvis $f(x) = G^{-1}(H(x)+k)$ er en løsning som opfylder, at f(a) = b, så får vi:

$$f(a) = b \quad \Leftrightarrow \quad G^{-1}(H(a)+k) = b \quad \Leftrightarrow \quad H(a)+k = G(b) \quad \Leftrightarrow \quad k = G(b)-H(a)$$

Der er altså kun én værdi af konstanten k, der kan bruges, og dermed <u>højst</u> er én løsning, som opfylder det ønskede.

Intervallet I_f for denne entydige løsning er ifølge konvention 1.12 givet som det største delinterval af Dm(f), som indeholder a. Hermed er anden del af sætningen bevist. ♥

<u>Øvelse 5.4.</u>

Besvar de følgende spørgsmål og bevis dermed udsagnet: ”Da a og b ikke er intervalendepunkter, findes der en omegn ω(a) om a, således at ω(a) ⊆ Dm(f_o)” fra beviset for sætning 5.3:

a) Gør indledningsvist rede for, at I = Dm(H) og J = Dm(G), samt at da b er indre i J, så findes der en omegn ω(b) om b, så ω(b) ⊆ J = Dm(G).

b) G er enten voksende eller aftagende. Vi vil her antage, at G er voksende. (Hvis G er aftagende forløbet argumentationen helt analogt). Gennemgå minutiøst de enkelte skridt i den følgende argumentation, herunder lav figurer, der illustrerer situationerne:
Lad δ være ”radius” i ω(b) , dvs. ω(b) = $]b-\delta\,;b+\delta[$. Da G er voksende, har vi: $G(b-\frac{1}{2}\delta) < G(b) < G(b+\frac{1}{2}\delta)$.
Da en kontinuert funktion afbilder et lukket begrænset interval på et lukket begrænset interval, og da G er kontinuert, har vi i alt, at: $G(\left[b-\frac{1}{2}\delta\,;b+\frac{1}{2}\delta\right]) = \left[G(b-\frac{1}{2}\delta);G(b+\frac{1}{2}\delta)\right] \subseteq \mathrm{Vm}(G)$.

c) Lad ε være den mindste af afstandene fra G(b) til $G(b-\frac{1}{2}\delta)$ hhv. til $G(b+\frac{1}{2}\delta)$, og betragt omegnen ω(G(b),ε) om G(b) med ”radius” ε. Gør rede for, at ω(G(b),ε) ⊆ Vm(G).

d) Gør rede for, at da H(a) + k_o = G(b), og da funktionen H(x) + k_o er kontinuert i a (idet a er et indre punkt i I), findes der en omegn ω(a), som opfylder, at: x ∈ ω(a) ⇒ H(x) + k_o ∈ Vm(G).

e) Gør rede for, at ω(a) ⊆ Dm(f_o), og at beviset dermed er tilendebragt. ♥

Øvelse 5.5.

a) Bestem den løsning til differentialligningen i eksempel 5.1, som går igennem punktet (– 8 ,– 6).

b) Bestem den løsning til differentialligningen i eksempel 5.2, som går igennem punktet (5 , 3). Sammenlign resultatet med den fundne løsning igennem punktet (–2 , 0). ♥

Indholdet i sætning 5.3 skrives ofte kort på følgende måde:

$$\frac{dy}{dx} = h(x)\cdot g(y) \quad \Leftrightarrow \quad \int \frac{1}{g(y)}\,dy = \int h(x)\,dx + k$$

idet dette med, at f er løsning til den ene eller den anden af disse to ligninger udelades. Undertiden udelades også konstanten k i opskrivningen, da den implicit ligger i begrebet: et ubestemt integrale. Det er da vigtigt at huske konstanten, når integralet udregnes, da løsningen ellers bliver forkert !!

Husk altid – inden omskrivningsformlen i ”separation af variable” tages i brug – at fastlægge (bestemme og opskrive !) de begrænsninger/forudsætninger for x og y, som selve differentialligningen og sætningen kræver ! Hvis der endvidere kun ønskes en bestemt løsning igennem et bestemt punkt, kan de heraf følgende ”tillægskrav” enten fastlægges inden beregningerne gennemføres, eller ”tillægskravene” kan introduceres i beregningerne efter at den fuldstændige løsning er fundet.

Eksempel 5.6.

Vi vil finde den fuldstændige løsning til differentialligningen: $y' = \frac{1}{xy}$ dvs. $y' = \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{y}$. Vi ser, at ligningen er på den ønskede form til metoden separation af variable, samt at: $h(x) = \frac{1}{x}$ og $g(y) = \frac{1}{y}$

Inden vi går i gang med løsningen/omskrivningen, må vi forudsætte, at $x \neq 0$ og $y \neq 0$. Da h og g skal være defineret i et interval ser vi, at vi må opdele i x > 0 og x < 0 og tilsvarende y > 0 og y < 0. Dette svarer til, at vi finder løsninger indenfor hvert af de fire kvadranter i koordinatsystemet. Under disse forudsætninger forløber udregningen herefter på følgende måde:

$$y' = \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{y} \quad \Leftrightarrow \quad \int \frac{1}{\frac{1}{y}}\,dy = \int \frac{1}{x}\,dx + k \quad \Leftrightarrow \quad \int y\,dy = \ln|x| + k \quad \Leftrightarrow \quad \tfrac{1}{2}y^2 = \ln|x| + k$$

Alt i alt får vi hermed: $y = \pm\sqrt{2\ln|x| + 2k}$, hvor + eller – bruges afhængig af y’s fortegn.

Den fuldstændige løsning kan også opskrives på følgende måde, idet det overlades til læseren at kontrollere definitionsmængderne:

For x > 0 og y > 0: $y = \sqrt{2\ln(x) + 2k}$, $x > e^{-k}$

For x > 0 og y < 0: $y = -\sqrt{2\ln(x) + 2k}$, $x > e^{-k}$

For x < 0 og y > 0: $y = \sqrt{2\ln(-x) + 2k}$, $x < -e^{-k}$

For x < 0 og y < 0: $y = -\sqrt{2\ln(-x) + 2k}$, $x < -e^{-k}$ ♥

Øvelse 5.7.

Bestem de to løsninger til differentialligningen i eksempel 5.6, som går igennem hhv. punktet (–3 , 8) og punktet (5, –4). (Husk definitionsmængden). ♥

I appendix 3 findes to eksempler på separation af variable, hvor de konkrete opgaver er gennemregnet i alle detaljer – inkl. fuldstændig løsning med tilhørende definitionsmængder og begrænsninger.

Øvelse 5.8.

Bestem den fuldstændige løsning til hver af differentialligningerne: $y' = y^2\cdot\sin(x)$ og $x^2y^2 + xy' = 0$ (Jfr. b) og c) i eksempel 1.1. Jfr. desuden øvelse 1.3).

Bestem den løsning til $y' = y^2\cdot\sin(x)$, som går igennem punktet $(\pi, -4)$.

Bestem den løsning til $x^2y^2 + xy' = 0$, som går igennem punktet $(10, 10)$. ♥

Separation af de variable kan også bruges til at vise flere af sætningerne fra kapitel 3. Vi vil her indskrænke os til at vise sætning 3.3:

Differentialligningen $y' = b - k\cdot y$ har den fuldstændige løsning: $y = \frac{b}{k} + c\cdot e^{-kx}$, hvor $c \in R$.

Bevis:

Først bemærkes, at den konstante funktion $y = \frac{b}{k}$ er en løsning til $y' = b - k\cdot y$ (Kontrollér !)

For $y \neq \frac{b}{k}$ har vi: $y' = b - k\cdot y \Leftrightarrow y' = -k\cdot(y - \frac{b}{k}) \Leftrightarrow \int \frac{1}{y - \frac{b}{k}}\,dy = \int -k\,dx + q$

hvor q er en vilkårlig konstant.

Ved substitutionen $t = y - \frac{b}{k}$ ses, at $\int \frac{1}{y-\frac{b}{k}}\,dy = \ln\left|y - \frac{b}{k}\right|$, hvormed vi får:

$$\int \frac{1}{y-\frac{b}{k}}\,dy = \int -k\,dx + q \quad\Leftrightarrow\quad \ln\left|y - \frac{b}{k}\right| = -kx + q \quad\Leftrightarrow\quad \left|y - \frac{b}{k}\right| = e^{-kx+q}$$

Da $e^{-kx+q} = e^{-kx}\cdot e^q = s\cdot e^{-kx}$, hvor $s = e^q$ er en vilkårlig positiv konstant, ser vi (kontrollér !):

Hvis $y > \frac{b}{k}$: $y = \frac{b}{k} + s\cdot e^{-kx}$, hvis $y = \frac{b}{k}$: $y = \frac{b}{k} + 0\cdot e^{-kx}$, og hvis $y < \frac{b}{k}$: $y = \frac{b}{k} - s\cdot e^{-kx}$.

Da s er et vilkårligt positivt tal, kan disse tre udsagn samles til ét: $y = \frac{b}{k} + c\cdot e^{-kx}$, hvor $c \in R$. ♥

Vi slutter med at bemærke, at vi har en speciel version af ligningen: $\frac{dy}{dx} = h(x)\cdot g(y)$, hvis g(y) er lig med 1 (eller en konstant, som så kan indregnes i h(x)). Denne situation er behandlet i kapitel 1. Vi har også en speciel situation, hvis h(x) er lig 1 (eller en konstant, som kan indregnes i g(y)).

I dette tilfælde har vi altså ligningen: $\frac{dy}{dx} = g(y)$, som i forbindelse med separation af de variable opfattes som: $\frac{dy}{dx} = 1\cdot g(y)$, hvormed løsningerne findes ud fra ligningen: $\int \frac{1}{g(y)}\,dy = x + k$

Øvelse 5.9.

Find den fuldstændige løsning til differentialligningen: $\frac{dy}{dx} = y^2$

Bestem en forskrift for den løsning, som går igennem punktet $(5, -8)$. ♥

Kap. 6: Teori og eksempler – Nogle 2.ordens differentialligninger.

I første del af dette kapitel skal vi gennemgå teorien for nogle udvalgte 2.ordens differentialligninger, og i anden del af kapitlet gives eksempler på modeller, hvori disse differentialligninger indgår.
Vi skal se på differentialligninger af typen:

- $y'' = h(x)$, hvor h er en kontinuert funktion defineret i et interval I,
- $y'' = ay$, hvor a er en konstant,
- $y'' + p \cdot y' + q \cdot y = 0$, hvor p og q er konstanter.

(Vedr. betydningen af y'': Se Appendix 1).

Differentialligninger af typen: $y'' = h(x)$.

Sætning 6.1.

Den fuldstændige løsning til differentialligningen: $y'' = h(x)$, hvor h er en kontinuert funktion defineret i et interval I, er givet ved:

$$y = \int H(x)dx + c_1 x + c_2$$

hvor H(x) er en stamfunktion til h(x), og hvor c_1 og c_2 er vilkårlige konstanter.

Hvis (x_o,y_o) er et givet punkt, hvor $x_o \in I$, og hvis α er et givet tal, så findes der netop én løsning f til differentialligningen, som går igennem (x_o,y_o) **og** opfylder, at $f'(x_o) = \alpha$.

Bevis:
Hvis vi sætter $u = y'$, så kan differentialligningen skrives som: $u' = h(x)$. Ifølge sætning 1.9 er den fuldstændige løsning til denne ligning givet ved: $u = H(x) + c_1$, hvor c_1 er en vilkårlig konstant.
Vi ser derfor på ligningen: $y' = H(x) + c_1$. Ifølge sætning 1.9, hvor h(x) erstattes af $H(x) + c_1$, er den fuldstændige løsning til denne ligning givet ved:

$$y = \int (H(x) + c_1)dx + c_2 = \int H(x)dx + c_1 x + c_2$$

hvor c_2 er en vilkårlig konstant. Hermed er første del af sætningen bevist.

Hvis vi igen ser på ligningen $u' = h(x)$, så gælder ifølge sætning 1.9 2), at der gennem punktet (x_o, α) går netop én løsning $u = H(x) + c_1$, hvor H er en vilkårlig valgt, men herefter fastholdt stamfunktion til h, og hvor c_1 er fastlagt ved, at: $\alpha = H(x_o) + c_1$, dvs. $c_1 = \alpha - H(x_o)$.
Hvis vi herefter ser på ligningen: $y' = H(x) + c_1$, så gælder der ifølge sætning 1.9. 2) (hvor h(x) nu svarer til $H(x) + c_1$), at der igennem punktet (x_o,y_o) går netop én løsning til denne ligning. Denne løsning er fastlagt ved: $f(x) = Q(x) + c_1 x + c_2$, hvor Q er en vilkårlig valgt, men herefter fastholdt stamfunktion til H ($Q(x) = \int H(x)dx$), og hvor c_2 er fastlagt ved, at: $y_o = f(x_o) = Q(x_o) + c_1 x_o + c_2$, dvs. $c_2 = y_o - Q(x_o) - c_1 x_o$.
Vi ser dermed, at hvis en løsning f skal opfylde både at gå igennem punktet (x_o,y_o) **og** at $f'(x_o) = \alpha$, så er der kun ét sæt af konstanterne c_1 og c_2, der kan bruges – svarende til en valgt stamfunktion H til h og en valgt stamfunktion Q til H. Hermed er sætningen bevist. ♥

Hvis vi anvender begrebet linieelement fra kapitel 1, så kan sidste del af sætning 6.1 udtrykkes ved, at der gennem et givet linieelement (x_o, y_o; α) går netop én løsning til ligningen (overvej dette!).

Eksempel 6.2.
Vi vil løse differentialligningen $y'' = 9x$. Ifølge sætning 6.1 (dvs. ved at integrere to gange) ser vi, (kontrollér !), at den fuldstændige løsning er givet ved funktioner på formen: $y = \frac{3}{2}x^3 + c_1x + c_2$, hvor c_1 og c_2 er vilkårlige konstanter.
Hvis vi vil finde den løsning, som går igennem punktet (2, 5) og i dette punkt har en tangent med hældningen –3 , så ser vi, idet $y' = \frac{9}{2}x^2 + c_1$, at følgende to ligninger skal være opfyldt:
$-3 = \frac{9}{2}\cdot 2^2 + c_1$ og $5 = \frac{3}{2}\cdot 2^3 + c_1\cdot 2 + c_2$. Af den første ligning findes: $c_1 = -21$. Indsættes dette i den anden ligning, får vi (kontrollér): $c_2 = 35$, hvormed den søgte funktion er givet ved:

$$f(x) = \frac{3}{2}x^3 - 21x + 35 , \quad x \in R$$ ♥

Øvelse 6.3.
a) Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen: $y'' = 4e^{2x}$
b) Bestem tre løsninger, hvis grafer alle går gennem punktet $(1, e^2)$
c) Bestem den løsning, som går igennem punkterne $(1, e^2)$ og (5, 0)
d) Bestem den løsning, som går igennem punktet $(1, e^2)$ og har en tangent med hældningen 2 i dette punkt.
Bemærk flertydigheden i punkt b) og entydigheden i punkt c) og d). ♥

Differentialligninger af typen: $y'' = ay$.

Den gældende sætning om denne type af differentialligninger lyder således:

Sætning 6.4.

Den fuldstændige løsning til differentialligningen $y'' = ay$ afhænger af a's fortegn:

1) Hvis $a < 0$, så er den fuldstændige løsning givet ved: $y = c_1 \cdot \cos(\sqrt{-a}\cdot x) + c_2 \cdot \sin(\sqrt{-a}\cdot x)$
2) Hvis $a > 0$, så er den fuldstændige løsning givet ved: $y = c_1 \cdot e^{\sqrt{a}\cdot x} + c_2 \cdot e^{-\sqrt{a}\cdot x}$
3) Hvis $a = 0$, så er den fuldstændige løsning givet ved: $y = c_1x + c_2$
I alle tre tilfælde gælder udtrykket for alle $x \in R$, og c_1 og c_2 er vilkårlige konstanter.

Beviset for denne sætning er relativt langt, og gives derfor i mindre dele i form af en række definitioner og sætninger, som så til sidst opsummeres til et bevis for sætningen. Først lige en øvelse:

Øvelse 6.5.
a) Bestem den fuldstændige løsning til ligningen: $y'' = 9y$.
Bestem den løsning f der opfylder, at $f(2) = 12$ og $f'(2) = 1$
b) Bestem den fuldstændige løsning til ligningen: $y'' + 25y = 0$. ♥

Bemærk/overvej, at punkt 1) og 2) i sætning 6.4 kan formuleres som i den følgende sætning, hvor: $k = \sqrt{-a}$, hvis $a < 0$, og $k = \sqrt{a}$, hvis $a > 0$.

<u>Sætning 6.6.</u>

Den fuldstændige løsning til differentialligningen: $y'' = -k^2 \cdot y$, hvor k er et positivt tal, er givet ved:

$$y = c_1 \cdot \cos(k \cdot x) + c_2 \cdot \sin(k \cdot x)$$

Den fuldstændige løsning til differentialligningen: $y'' = k^2 \cdot y$, hvor k er et positivt tal, er givet ved:

$$y = c_1 \cdot e^{k \cdot x} + c_2 \cdot e^{-k \cdot x}$$

I begge tilfælde gælder udtrykket for alle $x \in R$, og c_1 og c_2 er vilkårlige konstanter.

Vi går nu i gang med at bevise sætning 6.4 (og dermed sætning 6.6). Vi starter med en definition (jfr. appendix 5 vedr. begrebet determinant):

<u>Definition 6.7.</u>

Hvis f_1 og f_2 er differentiable funktioner defineret i et åbent interval I, så er Wronski-determinanten for funktionsparret (f_1 , f_2) for alle $x \in I$ givet ved:

$$W(f_1(x),f_2(x)) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) \end{vmatrix} = f_1(x) \cdot f_2'(x) - f_1'(x) \cdot f_2(x)$$

Det skal straks bemærkes, at Wronski-determinantens værdi afhænger af x'et. Wronski-determinanten er altså <u>en funktion af x</u>.

<u>Øvelse 6.8.</u>

Vis, at Wronski-determinanten af funktionsparret $(x^2 , \cos x)$ er givet ved:

$$W(x^2 , \cos x) = -x^2 \sin x - 2x \cos x \qquad \heartsuit$$

Hvis vi har to løsninger til differentialligningen $y'' = ay$, så er Wronski-determinanten for dette funktionspar imidlertid en konstant funktion, idet der gælder følgende sætning:

<u>Sætning 6.9.</u>

Hvis f_1 og f_2 er løsninger til differentialligningen $y'' = ay$, så er $W(f_1(x),f_2(x))$ konstant

Bevis:

Vi vil vise, at differentialkvotienten af $W(f_1(x),f_2(x))$ er nul, hvormed det ønskede er opnået. Vi har:

$$\begin{aligned} (W(f_1(x),f_2(x)))' &= (f_1(x) \cdot f_2'(x) - f_1'(x) \cdot f_2(x))' \\ &= f_1'(x) \cdot f_2'(x) + f_1(x) \cdot f_2''(x) - f_1''(x) \cdot f_2(x) - f_1'(x) \cdot f_2'(x) \\ &= f_1(x) \cdot f_2''(x) - f_1''(x) \cdot f_2(x) \end{aligned}$$

Da f_1 og f_2 er løsninger til differentialligningen $y'' = ay$, gælder der, at: $f''_1(x) = a \cdot f_1(x)$ og $f''_2(x) = a \cdot f_2(x)$. Indsættes dette i det sidste udtryk får vi:

$$(W(f_1(x),f_2(x)))' = f_1(x) \cdot a \cdot f_2(x) - a \cdot f_1(x) \cdot f_2(x) = 0. \quad ♥$$

Det bemærkes, at Wronski-determinanten godt kan være konstant, selvom funktionsparret ikke er løsninger til $y'' = ay$. F.eks. er $W(x^3 , 7x^3) = 0$, men hverken x^3 eller $7x^3$ er løsning til $y'' = ay$.

Sætning 6.10.

Hvis f_1 og f_2 er løsninger til differentialligningen $y'' = ay$, så er funktionen $f(x) = c_1 \cdot f_1(x) + c_2 \cdot f_2(x)$, hvor c_1 og c_2 er vilkårlige konstanter, også en løsning til $y'' = ay$.
Funktionen f givet ved: $f(x) = c_1 \cdot f_1(x) + c_2 \cdot f_2(x)$ kaldes en linearkombination af f_1 og f_2.

Bevis:
Vi har ifølge de almindelige differentiationsregneregler, at:
$f''(x) = (c_1 \cdot f_1(x) + c_2 \cdot f_2(x))'' = c_1 \cdot f_1''(x) + c_2 \cdot f_2''(x) = c_1 \cdot a \cdot f_1(x) + c_2 \cdot a \cdot f_2(x) = a \cdot (c_1 \cdot f_1(x) + c_2 \cdot f_2(x))$
dvs. $f''(x) = a \cdot f(x)$, hvormed det ønskede er bevist. ♥

Den ”omvendte” sætning gælder også, hvis $W(f_1(x),f_2(x)) \neq 0$, idet vi har følgende sætning:

Sætning 6.11.

Hvis f_1 og f_2 er givne løsninger til differentialligningen $y'' = ay$, hvis $W(f_1(x),f_2(x)) \neq 0$, og hvis f er en vilkårlig løsning til $y'' = ay$, så findes der to konstanter c_1 og c_2, så der for alle x gælder, at

$$f(x) = c_1 \cdot f_1(x) + c_2 \cdot f_2(x)$$

Der gælder altså, at en vilkårlig løsning til $y'' = ay$ er en linearkombination af to givne løsninger f_1 og f_2, under forudsætning af, at $W(f_1(x),f_2(x)) \neq 0$.

Bevis:
Vi forudsætter altså, at vi har givet to løsninger f_1 og f_2 til differentialligningen $y'' = ay$. Ifølge sætning 6.9 ved vi, at deres Wronski-determinant $W(f_1(x),f_2(x))$ er konstant, og vi forudsætter altså, at denne konstant ikke er 0.
Lad nu f være en vilkårlig valgt, men herefter fastholdt, løsning til $y'' = ay$. Vi skal da vise, at der findes to konstanter c_1 og c_2, så der for alle x gælder, at $f(x) = c_1 \cdot f_1(x) + c_2 \cdot f_2(x)$, hvormed der også må skulle gælde, at $f'(x) = c_1 \cdot f_1'(x) + c_2 \cdot f_2'(x)$ for alle x.
Vi opskriver derfor disse to udtryk på følgende måde:

$$\begin{aligned} c_1 \cdot f_1(x) + c_2 \cdot f_2(x) &= f(x) \\ c_1 \cdot f_1'(x) + c_2 \cdot f_2'(x) &= f'(x) \end{aligned}$$

og vil herefter forsøge at finde størrelser c_1 og c_2, som opfylder dette ligningssystem.
Lad nu $x \in R$ være vilkårligt valgt – og midlertidigt fastholdt. Da f, f_1 og f_2 teoretisk set (ifølge forudsætningerne) er kendte funktioner, kan $f(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f'(x)$, $f_1'(x)$ og $f_2'(x)$ alle opfattes som kendte tal, hvormed de eneste ubekendte i det opskrevne ligningssystem er størrelserne c_1 og c_2.

Ifølge sætning A.5.3 (i Appendix 5) ser vi dermed, at c_1 og c_2 er givet ved:

$$c_1 = \frac{\begin{vmatrix} f(x) & f_2(x) \\ f'(x) & f'_2(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) \\ f'_1(x) & f'_2(x) \end{vmatrix}} \quad \text{og} \quad c_2 = \frac{\begin{vmatrix} f_1(x) & f(x) \\ f'_1(x) & f'(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) \\ f'_1(x) & f'_2(x) \end{vmatrix}}$$

idet nævneren er $W(f_1(x),f_2(x))$, som er forskellig fra 0.

Dette resultat (denne måde at finde c_1 og c_2 på) gælder for et <u>vilkårligt valgt</u> x, og dermed for <u>alle</u> x. Umiddelbart ser det derfor ud til, at størrelserne c_1 og c_2 afhænger af x. Men da f, f_1 og f_2 alle er løsninger til $y'' = ay$, får vi imidlertid ifølge sætning 6.9, at alle fire determinanter, der indgår i udregningen af c_1 og c_2, er konstanter, hvormed c_1 og c_2 selv er konstanter (overvej dette !).
Ved at vælge disse to værdier af c_1 og c_2 ser vi altså, at f kan skrives som: $f(x) = c_1 \cdot f_1(x) + c_2 \cdot f_2(x)$ for alle x. Hermed er sætningen bevist. ♥

Hvis vi kan bestemme to funktioner f_1 og f_2 , som er løsninger til differentialligningen $y'' = ay$, og som opfylder, at $W(f_1(x),f_2(x)) \neq 0$, så kan den fuldstændige løsning til differentialligningen $y'' = ay$ ifølge sætning 6.11 altså bestemmes som samtlige linearkombinationer af f_1 og f_2.
Vi vil derfor nu lede efter sådanne funktioner f_1 og f_2. Da de skal være løsninger til $y'' = ay$, skal de bl.a. have den egenskab, at når vi differentierer dem to gange, så skal vi (på nær en konstant) få de samme funktioner igen. Efter lidt søgning kommer man nok i tanke om funktionerne sinus, cosinus, exp o.lign. Der gælder følgende sætning:

<u>Sætning 6.12.</u>

1) Hvis $a < 0$, så er funktionerne: $f_1(x) = \cos(\sqrt{-a} \cdot x)$ og $f_2(x) = \sin(\sqrt{-a} \cdot x)$ begge løsninger til differentialligningen $y'' = ay$, og $W(f_1(x),f_2(x)) \neq 0$.
2) Hvis $a > 0$, så er funktionerne: $f_1(x) = e^{\sqrt{a} \cdot x}$ og $f_2(x) = e^{-\sqrt{a} \cdot x}$ begge løsninger til differentialligningen $y'' = ay$, og $W(f_1(x),f_2(x)) \neq 0$.

Bevis:
<u>Ad 1):</u> Sæt $k = \sqrt{-a}$, hvormed vi får, at $a = -k^2$. Vi ser altså på differentialligningen: $y'' = -k^2 y$.
At f_1 og f_2 er løsninger til denne ligning, ses ved simpel indsætning. Vi gennemfører beregningerne for f_1 og overlader beregningerne for f_2 til læseren:

$$f_1(x) = \cos(k \cdot x) \quad \Rightarrow \quad f'_1(x) = -k \cdot \sin(k \cdot x) \quad \Rightarrow \quad f''_1(x) = -k^2 \cdot \cos(k \cdot x)$$

dvs. $f''_1(x) = -k^2 \cdot f_1(x)$, hvormed f_1 altså er en løsning til ligningen.
Vi har desuden, at:

$$W(f_1(x),f_2(x)) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) \\ f'_1(x) & f'_2(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos(kx) & \sin(kx) \\ -k\sin(kx) & k\cos(kx) \end{vmatrix} = k \cdot \cos^2(kx) + k \cdot \sin^2(kx) = k$$

hvor vi til sidst anvendte formlen: $\cos^2(v) + \sin^2(v) = 1$. Da $k = \sqrt{-a}$ og $a < 0$ ses, at $k > 0$, og dermed specielt, at $k \neq 0$. Hermed er det ønskede bevist.
Ad 2): Sæt $k = \sqrt{a}$, hvormed vi får, at $a = k^2$. Vi ser altså på differentialligningen: $y'' = k^2y$.
Herefter forløber beviset helt analogt til "Ad 1)" – og det overlades til læseren som en øvelse.
Hermed er sætning 6.12 bevist. ♥

Beviset for sætning 6.4 (og dermed sætning 6.6) fås nu ved at kombinere sætning 6.11 og 6.12 !

Vedrørende entydighed af løsning til differentialligningen $y'' = ay$ gælder der følgende sætning:

Sætning 6.13.

Hvis (x_o,y_o) er et givet punkt og α er et givet tal, så findes der netop én løsning f til differentialligningen $y'' = ay$, som går igennem punktet (x_o,y_o) **og** opfylder, at $f'(x_o) = \alpha$.

Bevis:
Ifølge sætning 6.11 og 6.12 kan den fuldstændige løsning til $y'' = ay$ skrives på formen:
$y = c_1 \cdot f_1(x) + c_2 \cdot f_2(x)$, hvor f_1 og f_2 er to løsninger, hvis Wronski-determinant er forskellig fra nul.
Da løsningen f skal gå igennem punktet (x_o,y_o), skal der gælde: $f(x_o) = y_o$, og dermed:
$c_1 \cdot f_1(x_o) + c_2 \cdot f_2(x_o) = y_o$, hvor vi endnu ikke kender konstanterne c_1 og c_2.
Da $f'(x_o) = \alpha$ må vi tilsvarende kræve, at: $c_1 \cdot f_1'(x_o) + c_2 \cdot f_2'(x_o) = \alpha$.
Vi har derfor følgende ligningssystem for de ubekendte størrelser c_1 og c_2:

$$\begin{aligned} c_1 \cdot f_1(x_o) + c_2 \cdot f_2(x_o) &= y_o \\ c_1 \cdot f_1'(x_o) + c_2 \cdot f_2'(x_o) &= \alpha \end{aligned}$$

Ifølge sætning A.5.3 i Appendix 5 har dette ligningssystem netop én løsning (c_1 , c_2), idet ligningssystemets determinant er Wronski-determinanten $W(f_1(x_o),f_2(x_o))$, som er forskellig fra 0.
Der findes altså netop ét talsæt (c_1 , c_2) – og dermed netop én løsning – som opfylder de stillede krav. Hermed er sætningen bevist. ♥

Hvis vi anvender begrebet linieelement fra kapitel 1, så kan sætning 6.13 udtrykkes ved, at der gennem et givet linieelement $(x_o, y_o; \alpha)$ går netop én løsning til differentialligningen $y'' = ay$.

Øvelse 6.14.
a) Bestem den løsning til differentialligningen $y'' = 4y$, som går igennem punktet (2,10) og som i dette punkt har en tangent med hældningen – 4.
b) Bestem den løsning til differentialligningen $y'' = -100y$, som går igennem punktet $(\pi,2)$ og som i dette punkt har en tangent, der er parallel med linien: $y = 0{,}5x + 17$. ♥

Differentialligninger af typen: $y'' + py' + qy = 0$.

Teoretisk set findes der uendeligt mange forskellige slags differentialligninger. Kun fantasien sætter grænserne. Vi vil imidlertid slutte med den næstsimpleste type andenordens differentialligninger, nemlig ligninger af typen: $y'' + py' + qy = 0$, hvor p og q er konstanter. Beviset for denne sætning findes i appendix 6.
Vi bemærker, at differentialligninger af typen $y'' = ay$ er et specialtilfælde af $y'' + py' + qy = 0$, svarende til $p = 0$ og $q = -a$.

Definition 6.15.

Ved karaktérpolynomiet for differentialligningen $y'' + py' + qy = 0$ forstås andengradspolynomiet $\xi^2 + p\cdot\xi + q$, hvor vi har kaldt den variable ξ for at undgå sammenblanding med den uafhængige variable x i differentialligningen.

Det viser sig, at karaktérpolynomiets diskriminant og evt. rødder spiller en afgørende rolle for løsning af den tilsvarende differentialligning. Hvis vi f.eks. ser på ligningen: $y'' + 3y' - 4y = 0$, så er karaktérpolynomiet givet ved: $\xi^2 + 3\xi - 4$. Diskriminanten d er da lig med $3^2 - 4\cdot1\cdot(-4) = 25$ og karaktérpolynomiets rødder er 1 og -4 - altså helt klassisk !

Sætning 6.16.

Betragt differentialligningen $y'' + py' + qy = 0$, og lad $d = p^2 - 4q$ være diskriminanten for det tilsvarende karaktérpolynomium. Der gælder da følgende:

1) Hvis $d > 0$, så har karaktérpolynomiet to rødder λ og μ, og den fuldstændige løsning til differentialligningen er mængden af funktioner på formen:
$$y = c_1 \cdot e^{\lambda x} + c_2 \cdot e^{\mu x}$$
hvor c_1 og c_2 er vilkårlige konstanter.

2) Hvis $d = 0$, så har karaktérpolynomiet én rod λ, og den fuldstændige løsning til differentialligningen er mængden af funktioner på formen:
$$y = c_1 \cdot e^{\lambda x} + c_2 \cdot x \cdot e^{\lambda x}$$
hvor c_1 og c_2 er vilkårlige konstanter.

3) Hvis $d < 0$, så er den fuldstændige løsning til differentialligningen mængden af funktioner på formen:
$$y = c_1 \cdot e^{-\frac{1}{2}px} \cdot \cos(\tfrac{1}{2}\sqrt{-d} \cdot x) + c_2 \cdot e^{-\frac{1}{2}px} \cdot \sin(\tfrac{1}{2}\sqrt{-d} \cdot x)$$
hvor c_1 og c_2 er vilkårlige konstanter.

I forbindelse med entydighed af løsninger til differentialligningen $y'' + py' + qy = 0$ gælder sætning 6.13 ordret (naturligvis med $y'' + py' + qy = 0$ indsat i stedet for $y'' = ay$) (Se appendix 6).

Eksempel 6.17:
Vi vil bestemme den fuldstændige løsning til differentialligningen: $y'' + 3y' - 4y = 0$.
Karaktérpolynomiet er givet ved: $\xi^2 + 3\xi - 4$, diskriminanten $d = 25 > 0$, og karaktérpolynomiets rødder er 1 og – 4.
Ifølge sætning 6.16 1) ser vi, at den fuldstændige løsning er givet ved:

$$y = c_1 \cdot e^x + c_2 \cdot e^{-4x},$$

hvor c_1 og c_2 er vilkårlige konstanter.
Vi vil nu bestemme den løsning, som går igennem punktet (–1 , 7) og som i dette punkt har en tangent med hældningen 2.
Vi finder først $y' = c_1 \cdot e^x - 4c_2 \cdot e^{-4x}$. Følgende ligningssystem skal altså være opfyldt:

$$\begin{aligned} c_1 \cdot e^{-1} + c_2 \cdot e^{-4\cdot(-1)} &= 7 \\ c_1 \cdot e^{-1} + c_2 \cdot (-4 \cdot e^{-4\cdot(-1)}) &= 2 \end{aligned}$$

Ifølge sætning A2.3 i Appendix A2 ser vi dermed, at c_1 og c_2 er givet ved:

$$c_1 = \frac{\begin{vmatrix} 7 & e^4 \\ 2 & -4e^4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{-1} & e^4 \\ e^{-1} & -4e^4 \end{vmatrix}} = \frac{-28e^4 - 2e^4}{-4e^3 - e^3} = 6e \quad \text{og} \quad c_2 = \frac{\begin{vmatrix} e^{-1} & 7 \\ e^{-1} & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{-1} & e^4 \\ e^{-1} & -4e^4 \end{vmatrix}} = \frac{2e^{-1} - 7e^{-1}}{-4e^3 - e^3} = e^{-4}$$

Den søgte løsning hedder altså: $f(x) = 6e \cdot e^x + e^{-4} \cdot e^{-4x}$ for alle x.

Bemærk, at løsningen også kan skrives således: : $f(x) = 6e^{x+1} + e^{-4(x+1)}$. ♥

Øvelse 6.18.

a) Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen: $2y'' = 4y' - 10y$
Bestem den løsning f, som opfylder, at $f(\frac{\pi}{2}) = 0$ og $f'(\frac{\pi}{2}) = 2$

b) Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen: $4y'' + 20y' + 25y = 0$.
Bestem den løsning, som går igennem (0, 8) og som i dette punkt har en tangent, der er vinkelret på linien med ligningen: $x + 3y + 6 = 0$. ♥

Nogle udvalgte modeleksempler.

Eksempel 6.19. (Newton's 2. lov).
Newtons 2. lov er en af den klassiske fysiks fundamentale love. Den siger, at hvis et legeme bliver udsat for en samlet kraftpåvirkning $\vec{F}_{res}$ (den resulterende kraft), og hvis legemets masse m er konstant, så vil accelerationen $\vec{a}$ i legemets bevægelse være givet ved: $\vec{F}_{res} = m \cdot \vec{a}$.
Vi har her formuleret loven v.hj.a. vektorer, idet dette er den mest generelle form, hvor der tages højde for, at kræfterne kan komme fra mange retninger ligesom bevægelsen kan foregå i rummet.

Hvis vi imidlertid indskrænker os til at se på bevægelser langs en ret linie, (og dermed en resulterende kraft langs denne samme linie), så kan loven formuleres på følgende måde: $F_{res} = ma$.

Som bekendt (ellers se Appendix 1) gælder der, at: $a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d^2s(t)}{dt^2}$, hvor tiden t er den variable, v(t) er hastighedsfunktionen og s(t) er stedfunktionen.

Newton's 2.lov kan i dette tilfælde derfor udtrykkes ved: $F_{res} = m \cdot \frac{d^2s(t)}{dt^2}$, dvs. $F_{res} = m \cdot s''$.

Vi ser altså, at hvis vi kan bestemme et udtryk for den resulterende kraft i en given situation, så kan legemets bevægelse beskrives som løsningen til denne 2.ordens differentialligning, og dette er netop tilfældet i mange sammenhænge. F.eks. er den elektriske kraft mellem to ladninger givet ved:

$k_c \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2}$, hvor k_c er en naturkonstant kaldet Coulomb-konstanten, q_1 og q_2 er de to ladningers størrelse og r er afstanden imellem dem. Og på tilsvarende måde kan man finde udtryk for kraften på en ladet partikel, der bevæger sig i et magnetfelt, gravitationskraften (massetiltrækningen) mellem to legemer (f.eks. to kloder), tyngdekraften og luftmodstanden i et frit fald og i et skråt kast, kraften fra en spændt fjeder osv. I de følgende eksempler skal vi se på lodret bevægelse i tyngdefeltet (med og uden luftmodstand), og på bevægelsen af et legeme under påvirkning af en fjederkraft (med eller uden gnidningsmodstand). ♥

Eksempel 6.20. (Lodret bevægelse – uden og med luftmodstand).

Et legeme kastes lodret op og efter et stykke tid falder det nedad igen, et legeme kastes lodret nedad, eller et legeme slippes og falder lodret nedad (et såkaldt frit fald). Vi har altså her en bevægelse, som foregår langs en lodret akse og dermed langs en ret linie. Vi vil regne retningen opad for positiv, og vi vil i første omgang se bort fra luftmodstanden.

Efter legemet er sluppet, er tyngdekraften den eneste kraft, der virker på legemet, dvs. $F_{res} = F_{ty}$.
Da denne kraft er nedad rettet, er den givet ved: $F_{ty} = -m \cdot g$, (hvor g er den såkaldte tyngdeacceleration, som i Danmark er ca. 9,82 m/s^2). Ifølge eksempel 6.19 får vi hermed, at: $-m \cdot g = m \cdot s''$, og ved at forkorte m væk ses: $s'' = -g$ dvs. $\frac{d^2s(t)}{dt^2} = -g$.

Ifølge sætning 6.1 er den fuldstændige løsning til denne ligning givet ved: $s = \int H(t)dt + c_1 t + c_2$
hvor H(t) er en stamfunktion til $-g$, og hvor c_1 og c_2 er vilkårlige konstanter. Da $H(t) = -g \cdot t$ ses, at $s(t) = -\frac{1}{2} g \cdot t^2 + c_1 t + c_2$. Konstanterne c_1 og c_2 findes på følgende måde: Hvis t = 0 indsættes i udtrykket for s(t) fås: $s(0) = c_2$, dvs. at c_2 er legemets position på aksen til tiden 0. Vi kalder denne position s_o. Ved at differentiere s(t) fås hastighedsfunktionen $v(t) = -g\,t + c_1$. Hvis vi i dette udtryk indsætter t = 0 , fås: $v(0) = c_1$, dvs. at c_1 er hastigheden til tiden nul ("begyndelseshastigheden"), som vi vil benævne v_o. Alt i alt får vi dermed, at:

$$\boxed{s(t) = -\tfrac{1}{2} g \cdot t^2 + v_o \cdot t + s_o \quad , \quad v(t) = -g \cdot t + v_o \quad \text{og} \quad a(t) = -g}$$

Bemærk, at både s_o og v_o regnes med fortegn, (s_o afhængig af hvor på aksen vi starter, og v_o afhængig af begyndelseshastighedens retning).

<u>Øvelse a):</u> En bold kastes lodret opad med en fart på 20 m/s. Den slippes i begyndelsespositionen 2 m over aksens nulpunkt. Hvor lang tid tager det inden den når sit højeste punkt, og hvornår passerer den aksens nulpunkt på vej nedad ?

Vi ser igen på den samme slags bevægelse, men denne gang vil vi tage højde for luftmodstanden. Luftmodstand er en såkaldt viskøs gnidningskraft, som optræder, når legemer trænger igennem væsker og gasser. Den viskøse gnidningskraft afhænger af legemets hastighed, samt af legemets facon, størrelse, overfladetype mm., og naturligvis af gassen eller væsken.
Teoretisk set kan den viskøse gnidningskraft for et givet legeme, som i en bestemt stilling i fht. bevægelsesretningen forsøger at trænge igennem en given gas eller væske, beskrives på formen:
$\tau \cdot h(v)$, hvor τ er en konstant, der afhænger af gassen/væsken, samt af legemets facon, størrelse og overfladetype i bevægelsesretningen, og hvor $h(v)$ er en voksende funktion af hastigheden v.
Ofte kan man med god tilnærmelse regne med, at ved relativt lave hastigheder er $h(v) = v$, medens der ved større hastigheder kan regnes med $h(v) = v^2$. Vi vil her kun se på tilfældet $h(v) = v$.

Efter at legemet er sluppet, er luftmodstanden (den viskøse gnidning) og tyngdekraften de eneste kræfter, der virker på legemet. Newton's 2.lov (jfr. eksempel 6.19) får i dette tilfælde udseendet:
$-\tau \cdot v - m \cdot g = m \cdot s''$. Minusset foran $\tau \cdot v$ skyldes, at luftmodstanden er modsat rettet bevægelsen, altså hvis hastigheden v er positiv (dvs. bevægelsen foregår opad), så er luftmodstanden nedadrettet (den virker altså i den negative retning), og hvis v er negativ (dvs. bevægelsen foregår nedad), så er luftmodstanden opad rettet (den virker altså i den positive retning).
Ligningen $-\tau \cdot v - m \cdot g = m \cdot s''$ kan omskrives til $s'' + \frac{\tau}{m} \cdot s' = -g$. Denne andenordens differentialligning kan ikke løses direkte med de sætninger, vi har til rådighed (der findes en sætning, men ....!).
I stedet for anvender vi, at $s' = v$, hvormed ligningen bliver til: $v' + \frac{\tau}{m} \cdot v = -g$, hvilket også kan skrives: $v' = -g - \frac{\tau}{m} \cdot v$. Ifølge sætning 3.3 får vi derfor (kontrollér !), at: $v(t) = -\frac{mg}{\tau} + c \cdot e^{-\frac{\tau}{m} \cdot t}$

Konstanten c kan findes ud fra hastigheden v_o til tiden 0: $v_o = v(0) = -\frac{mg}{\tau} + c \Rightarrow c = v_o + \frac{mg}{\tau}$

Indsættes dette i udtrykket for v(t) får vi :

$$\boxed{v(t) = -\frac{mg}{\tau} + \left(v_o + \frac{mg}{\tau}\right) \cdot e^{-\frac{\tau}{m} \cdot t}}$$

Øvelse b):

1) Argumentér for, at $v(t) \to -\frac{mg}{\tau}$ for $t \to \infty$, og udtryk i ord, hvad dette betyder.
2) Hvad har resultatet med "sky diving" og faldskærmsudspring at gøre, og i hvilken af disse to sammenhænge er τ størst ?
3) Opskriv, reducér og kommentér formlen for v(t) i det tilfælde, hvor $v_o = 0$.

Da $s' = v(t)$, kan vi finde et udtryk for s(t) ved at integrere udtrykket for v(t). Vi får:

$$s(t) = \int v(t)\,dt = \int \left(-\frac{mg}{\tau} + \left(v_o + \frac{mg}{\tau}\right) \cdot e^{-\frac{\tau}{m} \cdot t}\right) dt \Rightarrow$$

$$s(t) = -\frac{mg}{\tau} \cdot t - \frac{m}{\tau}\left(v_o + \frac{mg}{\tau}\right) \cdot e^{-\frac{\tau}{m} \cdot t} + k$$

hvor konstanten k kan findes udtrykt ved startpositionen $s_o = s(0)$, hvilket overlades til den interesserede læser. Som forventet (overvej !) ser vi, at $s(t) \to -\infty$ for $t \to \infty$, samt at s(t) nærmer sig asymptotisk til formlen for en jævn retlinet bevægelse. Men vi vil ikke gøre mere ved emnet. ♥

Øvelse 6.21.
En faldskærmsudspringer opnår efter et stykke tid med åben skærm den konstante hastighed –9 m/s. Faldskærmsudspringeren med udstyr vejer 93 kg. Hvor stor er størrelsen τ i denne bevægelse ? (Husk enhederne !). ♥

Eksempel 6.22. (Fjederkraft – uden og med gnidningsmodstand).
Vi ser på et legeme (f.eks. en klods) med massen m, som ligger på et bord, og som er fastgjort i enden af en vandret fastspændt fjeder (lav en figur, der illustrerer situationen !). Legemet trækkes – i fjederens længderetning – et stykke ud fra fjederens ligevægtsstilling, hvorefter det slippes. Legemet vi da bevæge sig på en ret linie ind mod ligevægtspositionen og på grund af sin bevægelsesenergi fortsætte bevægelsen, så fjederen trykkes sammen. Efter et stykke tid bremses legemet op, og den sammenpressede fjeder sender nu legemet tilbage mod ligevægtsstillingen osv. osv.
Vi har altså en bevægelse, som foregår langs en vandret akse (en ret linie). Vi vil regne retningen udad (dvs. hvor fjederen strækkes) for positiv, og vi placerer aksens nulpunkt i ligevægtsstillingen. Hvis fjederen ikke strækkes for kraftigt, gælder Hookes lov: $F_{fj}(t) = -k\cdot s(t)$, hvor $F_{fj}(t)$ er fjederkraftens størrelse til tiden t, hvor k er den såkaldte fjederkonstant, der siger noget om fjederens styrke, og hvor s(t) er legemets position på aksen til tiden t. Minusset skyldes, at hvis s er positiv, så er fjederen strukket, og kraften peger ind mod ligevægtsstillingen (altså i negativ retning), og hvis s er negativ, så er fjederen skubbet sammen, og kraften peger ind mod ligevægtsstillingen, altså i positiv retning.
Vi ser i første omgang bort fra gnidningsmodstanden mellem legemet og underlaget. Newton's 2. lov siger da: $-k\cdot s = m\cdot s''$, idet fjederkraften er den resulterende kraft på legemet, når først det er sluppet. Der gælder altså: $s'' = -\frac{k}{m}\cdot s$. Hvis vi sætter $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$, så har vi altså: $s'' = -\omega^2\cdot s$
Ifølge sætning 6.6 får vi da, at $s = c_1\cdot\cos(\omega\cdot t) + c_2\cdot\sin(\omega\cdot t)$, hvor c_1 og c_2 er vilkårlige konstanter, som fastlægges ud fra legemets position og hastighed til et givet tidspunkt.
Hvis vi f.eks. ved, at legemet passerer ligevægtsstillingen til tiden 0, så får vi: $0 = s(0) = c_1$, og dermed: $s(t) = c_2\cdot\sin(\omega\cdot t)$. Bevægelsen følger altså en sinusfunktion, hvilket passer pænt med den ovenfor anførte beskrivelse af bevægelsen. Da $\sin(\omega\cdot t)$ højst bliver 1 og mindst –1, ser vi, at størrelsen c_2 angiver det maksimale udsving i bevægelsen. Dette kaldes svingningens amplitude og benævnes med A, hvormed vi i alt får:

$$\boxed{s(t) = A\cdot\sin(\omega\cdot t)}$$

En bevægelse af denne type kaldes en harmonisk svingning.
Det er klart, at bevægelsens struktur (men måske nok dens matematiske formel) ikke kan afhænge af, hvad klokken er, når legemet passerer ligevægtsstillingen. Det er da også således, at vi i alle tilfælde får en harmonisk svingning, idet det kan bevises (se appendix 7), at der findes et tal φ_o, så

$$s(t) = c_1\cdot\cos(\omega\cdot t) + c_2\cdot\sin(\omega\cdot t) = \sqrt{c_1{}^2 + c_2{}^2}\cdot\sin(\omega t - \varphi_o).$$

Øvelse a): Argumentér for, at svingningstiden T i bevægelsen er givet ved: $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

Vi vil herefter undersøge den samme situation, idet der nu tage højde for en gnidningsmodstand fra underlaget. Vi må her skelne mellem tør gnidning og viskøs gnidning (jfr. eksempel 6.20).
Ved tør gnidning gælder der stort set, at gnidningskraftens størrelse er konstant – dvs. uafhængig af legemets hastighed –, hvorimod dens retning afhænger af hastighedens retning/fortegn, idet gnidningskraften er modsat rettet bevægelsesretningen. Ved tør gnidning får Newton's 2. lov derfor ud-

seendet: $-\Psi \cdot \frac{s'}{|s'|} - k \cdot s = m \cdot s''$, hvor ψ er gnidningskraftens størrelse, og hvor leddet $\frac{s'}{|s'|}$ (hvis numeriske værdi er lig med 1) medtages for at sikre, at gnidningskraftens retning hele tiden er modsat rettet bevægelsen. Da $|s'|$, dvs. den numeriske værdi af hastigheden, afhænger af tiden, har vi altså en differentialligning på formen: $s'' + g(t) \cdot s' + \frac{k}{m} \cdot s = 0$, hvor g(t) er en funktion af t. Løsning af en sådan ligning ligger langt udenfor rammerne af denne bog, og vi vil forlade emnet !

Ved viskøs gnidning får vi som i eksempel 6.20, at Newton's 2. lov kan skrives på formen:
$-\tau \cdot v - k \cdot s = m \cdot s''$, dvs. $s'' + \frac{\tau}{m} \cdot s' + \frac{k}{m} \cdot s = 0$. Denne ligning passer nøjagtigt på sætning 6.16, så vi går straks videre med at bestemme diskriminanten d for det tilhørende karaktérpolynomium. Vi får:
$d = \left(\frac{\tau}{m}\right)^2 - 4 \cdot \frac{k}{m} = \frac{\tau^2 - 4km}{m^2}$. Da $m^2 > 0$, afhænger d's fortegn af størrelsen: $\tau^2 - 4km$, som enten kan være positiv, nul eller negativ, svarende til de tre omtalte situationer i sætning 6.16.
Vi vil her indskrænke os til at se på sidstnævnte tilfælde, hvor $d < 0$, altså $\tau^2 < 4km$. Ifølge sætning 6.16 3) får vi, at: $s(t) = c_1 \cdot e^{-\frac{1}{2}pt} \cdot \cos(\frac{1}{2}\sqrt{-d} \cdot t) + c_2 \cdot e^{-\frac{1}{2}pt} \cdot \sin(\frac{1}{2}\sqrt{-d} \cdot t)$, hvor $p = \frac{\tau}{m}$.
Hvis vi nu sætter $\omega = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{-\frac{\tau^2 - 4km}{m^2}}$, så kan løsningen skrives på formen:

$$s(t) = c_1 \cdot e^{-\frac{\tau}{2m} \cdot t} \cdot \cos(\omega \cdot t) + c_2 \cdot e^{-\frac{\tau}{2m} \cdot t} \cdot \sin(\omega \cdot t) \Leftrightarrow$$

$$s(t) = e^{-\frac{\tau}{2m} \cdot t}(c_1 \cdot \cos(\omega \cdot t) + c_2 \cdot \sin(\omega \cdot t))$$

hvor c_1 og c_2 er vilkårlige konstanter, som fastlægges ud fra legemets position og hastighed til et givet tidspunkt. Som ved svingningerne uden gnidningsmodstand kan vi også her omskrive det generelle udtryk for s(t) til : $s(t) = e^{-\frac{\tau}{2m} \cdot t} \cdot \sqrt{c_1^2 + c_2^2} \cdot \sin(\omega t - \varphi_o)$, hvor φ_o er et passende valgt tal, men vi vil ikke komme yderligere ind på dette. Vi vil i stedet for se på den situation, hvor legemet passerer ligevægtsstillingen til tiden 0. Vi får hér, at: $0 = s(0) = c_1$, og dermed:

$$\boxed{s(t) = e^{-\frac{\tau}{2m} \cdot t} \cdot A \cdot \sin(\omega \cdot t)}$$

hvor vi som ovenfor har erstattet c_2 med benævnelsen A, som ville være det maksimale udsving, hvis ikke bevægelsen var dæmpet p.gr.a. gnidningsmodstanden.
Vi ser, at bevægelsen (en dæmpet svingning) kan beskrives ved en sinusfunktion gange med størrelsen $e^{-\frac{\tau}{2m} \cdot t} \cdot A$. Denne størrelse kan opfattes som svingningens amplitude, som altså bliver mindre og mindre efterhånden som tiden går (og gnidningsmodstanden får energien ud af bevægelsen).

Øvelse b):

1) Gør rede for, at $-e^{-\frac{\tau}{2m} \cdot t} \cdot A \le s(t) \le e^{-\frac{\tau}{2m} \cdot t} \cdot A$ for alle $t \in R$
2) I en bevægelse som den betragtede er A = 0,2 m, m = 2 kg, k = 8,08 kg/s^2 og τ = 0,8 kg/s. Udregn værdien af ω (husk enheder) , og opstil et funktionsudtryk for s(t).
3) Tegn på baggrund af de konkrete værdier graferne for funktionerne: $U_{min}(t) = -e^{-\frac{\tau}{2m} \cdot t} \cdot A$, $U_{max}(t) = e^{-\frac{\tau}{2m} \cdot t} \cdot A$ og s(t), for $t \ge 0$, i samme koordinatsystem – og kommentér resultaterne. ♥

Eksempel 6.23. (Udskillelse af stof fra organisme).
Dette eksempel er en fortsættelse/udvidelse af eksempel 2.8 og 4.19, idet vi her vil udvide modellen til at tage højde for, at det betragtede stof udskilles af organismen.
Eksemplet bygges op over stoffet creatinin, som er et affaldsstof fra stofskifteprocesserne i et legeme. Creatinin findes normalt i en bestemt koncentration i både blodet, lymfen, vævsvæsken og cellevæsken, og det udskilles via blodet gennem nyrerne.

For at undersøge: 1) nyrernes evne til at rense blodet for creatinin, 2) cellemembranernes gennemtrængelighed for creatinin og 3) udbredelsesvoluminet for creatinin, gives et ”forsøgslegeme” (i dette tilfælde en hund) en indsprøjtning med creatinin.
Creatininet vil hurtigt efter indsprøjtningen fordele sig i blod, lymfe og vævsvæske (altså i det såkaldte extracellulære volumen (dvs. området udenfor cellerne)). Herefter vil der dels foregå en udskillelse gennem nyrerne, dels en gennemtrængning af cellemembranerne (diffusion ind i cellerne), hvormed creatininet trænger ind i en del af det såkaldte intracellulære volumen.

Forsøget udføres på følgende måde: Hunden bedøves, og der udtages en ”startblodprøve”. Herefter indsprøjtes 2,0 gram creatinin i forbensvenen, hvorefter der med 5 minutters mellemrum udtages en blodprøve fra lårarterien. V.hj.a. startblodprøven findes den ”overskydende” mængde af creatinin i de enkelte blodprøver, og man kan herefter følge koncentrationen af dette stof efterhånden som tiden går. I nedenstående skema ses resultaterne af sådan en undersøgelse:

Tiden t (min.)	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60
Koncentration c(t) (mg/liter)	344	255	200	163	139	120	107	96	87	79	71	65

Indtegnes resultaterne i et semilogaritmisk koordinatsystem, fås den tykke kurve på figur 6.1.

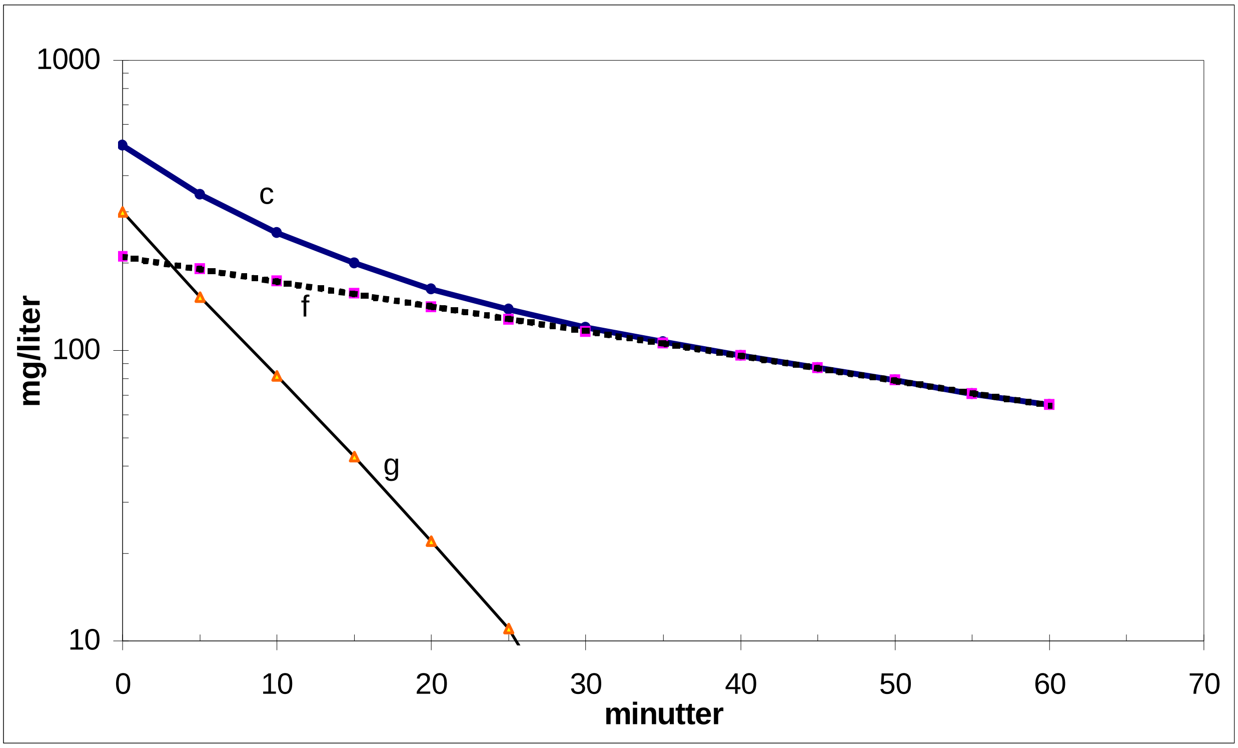


Fig. 6.1

Vi ser, at der fremkommer en krum kurve, som dog efterhånden bliver retlinet. Det kunne derfor tyde på, at koncentrationen c(t) kan beskrives ved en eksponentielt aftagende funktion f(t) plus et led, som går hurtigere mod nul end f(t). Dette ekstra led , som er lig c(t) – f(t), kan bestemmes ved beregning ud fra kurven og den stiplede linie (som er grafen for f). Vi finder følgende tal:

Tiden t (min.)	5	10	15	20	25
c(t) – f(t) mg/L	153	82	43	22	11

Indtegnes disse værdier i det semilogaritmiske koordinatsystem, ser vi, at de tilsvarende punkter ligger pænt på en ret linie (den tynde linie). Funktionen g(t) = c(t) – f(t) ser således ud til at være en eksponentielt aftagende funktion.
Vi ser derfor, at c(t) er en sum af to eksponentielt aftegnede funktioner f og g, hvor g aftager noget hurtigere end f. Hvis vi sætter $g(t) = A \cdot e^{-at}$ og $f(t) = B \cdot e^{-bt}$, så ser vi, at

$$\boxed{c(t) = A \cdot e^{-at} + B \cdot e^{-bt}}$$

hvor a > b. Af figuren ses, at $A \approx 300$ mg/L og $B \approx 210$ mg/L .
(Af tegnetekniske årsager er disse værdier blevet brugt ved udformningen af figur 6.1.)

Vi vil nu <u>opstille en model til beskrivelse og forklaring af de fundne resultater</u>.
Vi forestiller os forsøgslegemet opdelt i to ”afdelinger” 1 og 2 med rumfangene V_1 og V_2.
(V_1 er stort set lig med det extracellulære volumen, og V_2 er en del af det intracellulære volumen).
I afdeling 1 indsprøjtes K mg creatinin (dvs. K = 2000 i det ovenfor betragtede tilfælde). Denne creatinin kan dels diffundere gennem cellemembranerne ind i afdeling 2, dels renses bort fra ”sy-stemet” v.hj.a. nyrerne. Desuden kan den creatinin, som er kommet ind i afdeling 2, naturligvis dif-fundere tilbage igen til afdeling 1.
Den beskrevne situation kan illustreres skematisk på følgende måde:

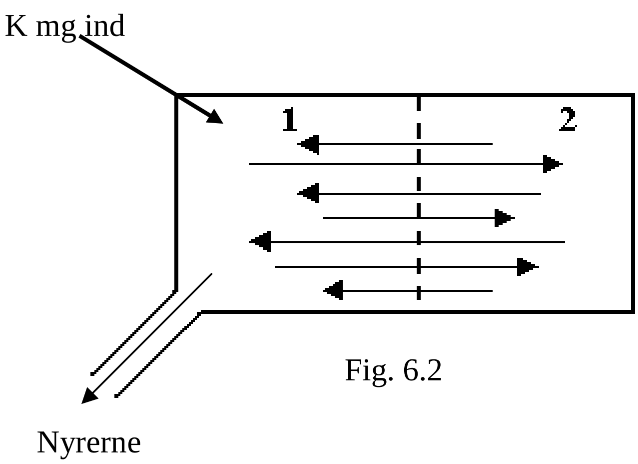


Fig. 6.2

Vi indfører benævnelserne $c_1(t)$ og $c_2(t)$ for koncentrationen af creatinin til tiden t i hhv. afd. 1 og afd. 2. ($c_1(t)$ og $c_2(t)$ måles i mg/liter). Til et givet tidspunkt t er mængderne $m_1(t)$ og $m_2(t)$ af creati-nin i de to afdelinger altså givet ved: $m_1(t) = V_1 \cdot c_1(t)$ og $m_2(t) = V_2 \cdot c_2(t)$.
Diffusionshastigheden mellem de to områder (dvs. den hastighed hvormed mængden af creatinin ændres ved diffusion imellem områderne) er proportional med koncentrationsforskellen $c_1(t) – c_2(t)$.

Vi ser først på afd. 2.
Da mængden af creatinin her kun kan ændres ved diffusion gennem cellemembranerne, får vi, at:

$$\frac{d\,m_2(t)}{dt} = \alpha \cdot (c_1(t) - c_2(t))$$

hvor α er en positiv størrelse, som vi kalder cellemembranernes <u>gennemtrængelighedskoefficient</u> for det pågældende stof. (Bemærk, at fortegnene passer, idet m_2 vokser, hvis $c_1(t) > c_2(t)$).
Da $m_2(t) = V_2 \cdot c_2(t)$, og da V_2 er en konstant størrelse, kan udtrykket anføres på følgende måde:

$$(*) \quad V_2 \cdot \frac{d\,c_2(t)}{dt} = \alpha \cdot (c_1(t) - c_2(t))$$

Vi ser dernæst på afd. 1.
Her ændres creatininmængden dels p.gr.a. diffusion mellem afd. 1 og afd. 2, dels p.gr.a. udskillelse i nyrerne. Udskillelseshastigheden gennem nyrerne er proportional med koncentrationen $c_1(t)$, og proportionaliteten beskrives ved en positiv konstant G, som vi kalder <u>udskillelsesgraden</u>.
Ændringshastigheden af creatininmængden i afd. 1 kan hermed angives ved udtrykket:

$$\frac{d\,m_1(t)}{dt} = -\alpha \cdot (c_1(t) - c_2(t)) - G \cdot c_1(t)$$

Det første led, som beskriver diffusionen, er lige så stort som ved afd. 2, men med modsat fortegn, idet den mængde creatinin, som ved diffusion forsvinder fra den ene afdeling trænger ind i den anden afdeling. Minuset foran det sidste led skyldes, at mængden m_1 aftager p.gr.a. udskillelsen i nyrerne (nyrerne fjerner creatinin fra afd. 1). Da $m_1(t) = V_1 \cdot c_1(t)$ og V_1 er en konstant, kan vi skrive:

$$(**) \quad V_1 \cdot \frac{d\,c_1(t)}{dt} = -\alpha \cdot (c_1(t) - c_2(t)) - G \cdot c_1(t)$$

Ligningerne (∗) og (∗∗) er såkaldte ”koblede” differentialligninger (hvilket betyder, at c_1 indgår i differentialligningen for c_2 – og omvendt). <u>Disse ligninger udgør tilsammen den matematiske model for problemstillingen, og vi skal løse dem i det følgende.</u>

Inden vi gør dette, vil vi imidlertid <u>først undersøge de resultater, som løsningen giver:</u>
For koncentrationen $c_1(t)$ i afd. 1 finder vi, at den kan skrives på formen:

$$c_1(t) = A \cdot e^{-at} + B \cdot e^{-bt}$$

hvilket netop er det tidligere omtalte udtryk, som resultatkurven på figur 6.1 gav anledning til at formode. (Bemærk, at c_1 hér svarer til c på resultatkurven).
Desuden finder vi følgende udtryk for de fire størrelser α, G, V_1 og V_2:

$$V_1 = \frac{K}{A+B} \quad , \quad G = \frac{a \cdot b \cdot K}{b \cdot A + a \cdot B} \quad , \quad \alpha = \frac{V_1 \cdot (Aa + Bb)}{A+B} - G \quad , \quad V_2 = \frac{\alpha \cdot G}{V_1 \cdot a \cdot b}$$

Da A og B direkte kan aflæses på figur 6.1 og da K er fastlagt ved den indsprøjtede mængde creatinin, kan V_1 bestemmes. Idet $A \approx 300$ mg/L, $B \approx 210$ mg/L og $K = 2000$ mg, ser vi, at:

$$V_1 = \frac{2000\text{mg}}{(300+210)\text{mg/L}} = 3{,}92 \text{ liter}$$

Ved aflæsning af endnu et punkt på hver af de to linier på figur 6.1 (eller ved eksponentiel regression på regnemaskinen) kan vi finde en funktionsforskrift for hver af de to eksponentielt aftagende funktioner $A \cdot e^{-at}$ og $B \cdot e^{-bt}$. Det overlades til læseren at kontrollere, at $a = 0{,}131 \text{ min}^{-1}$ og $b = 0{,}019 \text{ min}^{-1}$ (bemærk enheden $\text{min}^{-1} = \text{minut}^{-1}$. Den fremkommer, idet t måles i minutter og $a \cdot t$ hhv. $b \cdot t$ skal være ubenævnte). I alt får vi da, at

$$\boxed{c_1(t) = 300 \cdot e^{-0{,}131 \cdot t} + 210 \cdot e^{-0{,}019 \cdot t}}$$

Herefter kan de øvrige størrelser G , α og V_2 findes (i nævnte rækkefølge, jfr. formlerne herfor !). Vi får, at

$$G \;=\; \frac{0{,}131\,\mathrm{min}^{-1}\cdot 0{,}019\,\mathrm{min}^{-1}\cdot 2000\mathrm{mg}}{300\,\mathrm{mg/L}\cdot 0{,}019\,\mathrm{min}^{-1}+210\,\mathrm{mg/L}\cdot 0{,}131\,\mathrm{min}^{-1}} \;=\; 0{,}150\ \ \mathrm{L/min.}$$

samt at (kontrollér !): $\alpha \;=\; 0{,}183$ L/min. og $V_2 \;=\; 2{,}81$ liter.

Vi har hermed fundet:

- et mål for nyrernes evne til at rense blodet for creatinin, idet dette beskrives ved udskillelsesgraden G, som vi fandt til: 0,150 L/min.
- cellemembranernes gennemtrængelighed for creatinin, idet denne beskrives ved gennemtrængelighedskoefficienten α, som vi fandt til: 0,183 L/min.
- udbredelsesvoluminet for creatinin, idet dette er givet ved de to størrelser V_1 og V_2, som vi fandt til $V_1 = 3{,}92$ L og $V_2 = 2{,}81$ L.

Hermed er de tre opgaver, som blev opstillet i begyndelsen af eksemplet, blevet løst.

Vi bemærker, at den undersøgte hund vejede 19,3 kg. Da massefylden af vævsvæskerne er tæt på 1 kg/L (idet størstedelen er vand), har vi altså fundet ud af, at det extracellulære volumen – som stort set svarer til V_1 i modellen – udgør ca. $\frac{3{,}92}{19{,}3}$ af hundens kropsvægt, dvs. ca. 20 % af kropsvægten.
Bemærk også det overraskende/fascinerende i, at det extracellulære volumen kan bestemmes blot ud fra nogle koncentrationer i nogle blodprøver !!

Vi vil nu gå over til at løse den opstillede matematiske model (jfr. (*) og (**) side 67), som siger:

(1) $V_2\cdot\dfrac{dc_2(t)}{dt} \;=\; \alpha\cdot(c_1(t)-c_2(t))$ og **(2)** $V_1\cdot\dfrac{dc_1(t)}{dt} \;=\; -\alpha\cdot(c_1(t)-c_2(t)) \;-\; G\cdot c_1(t)$

Ved addition af (1) og (2) får vi: $V_1\cdot\dfrac{dc_1(t)}{dt} + V_2\cdot\dfrac{dc_2(t)}{dt} \;=\; -G\cdot c_1(t)$, og dermed:

$$\textbf{(3)}\qquad \frac{dc_2(t)}{dt} \;=\; -\frac{V_1}{V_2}\cdot\frac{dc_1(t)}{dt} \;-\; \frac{G}{V_2}\cdot c_1(t)$$

Ved differentiation af (2) får vi:

$$\textbf{(4)}\qquad V_1\cdot\frac{d^2c_1(t)}{dt^2} \;=\; -\alpha\cdot\Big(\frac{dc_1(t)}{dt}-\frac{dc_2(t)}{dt}\Big) \;-\; G\cdot\frac{dc_1(t)}{dt}$$

og indsættes (3) i (4) får vi efter reduktion (kontrollér):

$$\textbf{(5)}\qquad \frac{d^2c_1(t)}{dt^2} + \left(\frac{G+\alpha}{V_1}+\frac{\alpha}{V_2}\right)\cdot\frac{dc_1(t)}{dt} \;+\; \frac{\alpha G}{V_1V_2}\cdot c_1(t) \;=\; 0$$

Dette er en differentialligning af typen: $y'' + py' + qy = 0$, hvor konstanterne p og q er givet ved:

$$p = \frac{G+\alpha}{V_1}+\frac{\alpha}{V_2} \qquad \text{og} \qquad q = \frac{\alpha G}{V_1V_2}$$

Ifølge sætning 6.16 løses ligningen ved først at betragte diskriminanten d for karaktérpolynomiet.

Vi har: $d \;=\; p^2 - 4q \;=\; \left(\dfrac{G+\alpha}{V_1}+\dfrac{\alpha}{V_2}\right)^2 \;-\; \dfrac{4\alpha G}{V_1V_2}$

Det overlades til læseren at kontrollere, at udtrykket for d kan skrives på formen:

$$d = \frac{(GV_2 - \alpha V_1)^2 + \alpha^2(V_2{}^2 + 2V_2V_1) + 2\alpha GV_2{}^2}{V_1{}^2V_2{}^2}$$

hvoraf vi ser, at d > 0. Karaktérpolynomiet har da to rødder: $\lambda = \dfrac{-p-\sqrt{d}}{2}$ og $\mu = \dfrac{-p+\sqrt{d}}{2}$

Da $d = p^2 - 4q$ ses det (kontrollér !), at $\lambda + \mu = -p$ og $\lambda \cdot \mu = q$.
Ifølge sætning 6.16 1) er løsningen til (5) hermed på formen: $c_1(t) = A \cdot e^{\lambda t} + B \cdot e^{\mu t}$, hvor A og B er to konstanter. Hvis vi nu sætter $a = -\lambda$ og $b = -\mu$, har vi alt i alt har opnået følgende resultat: Om koncentrationen $c_1(t)$ gælder, at:

$$\textbf{(6)} \quad c_1(t) = A \cdot e^{-at} + B \cdot e^{-bt}$$

hvor $a + b = \dfrac{G+\alpha}{V_1} + \dfrac{\alpha}{V_2}$ og $a \cdot b = \dfrac{\alpha G}{V_1V_2}$.

Da der indsprøjtes K mg creatinin, som hurtigt fordeles i V_1, ser vi, at $c_1(0) = \frac{K}{V_1}$. Og da vi ifølge (6) også har, at $c_1(0) = A + B$, ser vi, at $\frac{K}{V_1} = A + B$, og dermed, at

$$\textbf{(7)} \quad V_1 = \frac{K}{A+B}$$

Idet den indsprøjtede creatinin først gradvist trænger ind i V_2, har vi, at $c_2(0) = 0$. Indsættes dette i (2) får vi:

$$V_1 \cdot \frac{d\,c_1(0)}{dt} = -\alpha \cdot c_1(0) - G \cdot c_1(0) = -(\alpha + G) \cdot c_1(0)$$

og da $c_1(0) = A + B$ ser vi hermed, at:

$$\textbf{(8)} \quad V_1 \cdot \frac{d\,c_1(0)}{dt} = -(\alpha + G) \cdot (A + B)$$

Ved differentiation af (6) ses, at

$$\textbf{(9)} \quad \frac{d\,c_1(0)}{dt} = -aA - bB$$

og kombineres (8) og (9), får vi: $V_1 \cdot (aA + bB) = (\alpha+G) \cdot (A+B)$, hvilket omskrives til:

$$\textbf{(10)} \quad \alpha = \frac{V_1 \cdot (aA + bB)}{A+B} - G$$

Af udtrykket: $a \cdot b = \dfrac{\alpha G}{V_1V_2}$ ser vi, at

$$\textbf{(11)} \quad V_2 = \frac{\alpha \cdot G}{V_1 \cdot a \cdot b}$$

Indsættes (11) og (10) i udtrykket: $a + b = \dfrac{G+\alpha}{V_1} + \dfrac{\alpha}{V_2}$ får vi efter reduktion (kontrollér), at:

$G = \dfrac{V_1 ab(A+B)}{bA + aB}$, og da $K = V_1 \cdot (A + B)$ får vi slutteligt, at

$$\textbf{(12)} \quad G = \frac{abK}{bA + aB}$$

Vi har hermed løst den opstillede ligning, samt fundet de omtalte udtryk for V_1, V_2, α og G.

Hvis man ønsker at bestemme et udtryk for $c_2(t)$, skal man herefter ifl. (1) og (6) løse ligningen:

$$\textbf{(13)}\qquad \frac{dc_2(t)}{dt} + \frac{\alpha}{V_2}\cdot c_2(t) = \frac{\alpha}{V_2}\cdot(Ae^{-at} + Be^{-bt})$$

Da $c_2(t)$ ikke indgår i de målte værdier, vil vi imidlertid ikke komme nærmere ind herpå. Løsningen overlades til interesserede læsere (man skal anvende sætning 3.6).

Øvelse 6.24

Ved en anden hund er der målt følgende værdier (hvor K = 2000 mg):

Tiden t (min.)	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60
Koncentration (mg/liter)	447	334	267	224	196	175	159	144	134	126	117	109

Bestem V_1 , V_2 , α og G for den pågældende hund.

Kap. 7: Noget om matematik og matematiske modeller

Som helhed betragtet kan matematikken groft taget inddeles i tre kategorier, selv om grænserne imellem disse kategorier er ret flydende:

Kat. 1 : Matematik, som har umiddelbar "brugsværdi" i andre fag. Denne matematik benyttes ved beskrivelsen af de matematiske modeller.

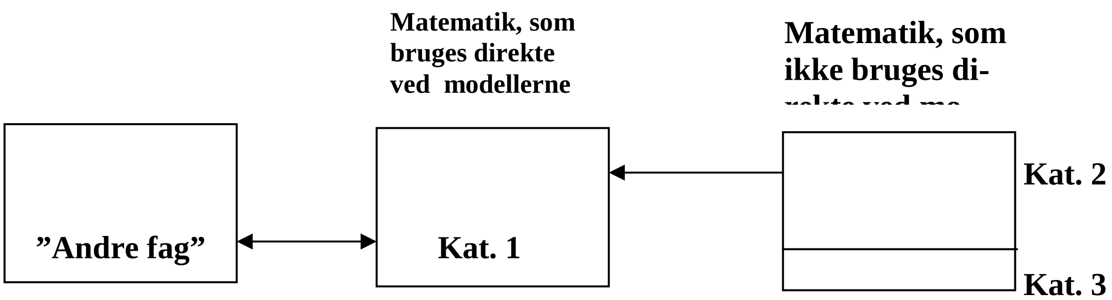
Kat. 2 : Matematik, som ikke har umiddelbar "brugsværdi" i andre fag, men som er forudsætningen for den matematik, der er omtalt i Kat. 1.
Kat. 2 kan således siges at udgøre fundamentet for Kat.1-matematikken.

Kat. 3 : Matematik, som i særlig grad har teoretisk, filosofisk og erkendelsesmæssig interesse.

Det skal bemærkes, at de under Kat. 1 og Kat. 2 omtalte "andre fag" omfatter fysik, kemi, astronomi, datalogi, "teknik", medicin, biologi, geologi, geografi, økonomi, osv. osv. Ved "andre fag" forstås altså emneområder, som i vor tid almindeligvis ligger udenfor matematikkens område.

Indplaceringen af et matematisk emne i en af de tre kategorier er en ret kompliceret affære, idet en korrekt indplacering ikke alene kræver fyldestgørende matematiske kundskaber, men også en omfattende indsigt i andre fag. I øvrigt kan et matematisk emnes indplacering i Kat. 2 eller i Kat. 3 udmærket tænkes at være midlertidig, idet der blot endnu ikke er nogen, der har fundet direkte tilknytning for det pågældende emne til andre fag.
Det kan derfor konkluderes, at den omtalte inddeling af matematikken i de tre kategorier mere er af principiel karaktér, og at den således nærmest skal opfattes som et forsøg på en vis systematisering.

Der kan anføres følgende skematiske oversigt til beskrivelse af det ovenstående:



Det samspil, der foregår mellem et emne fra Kat. 1 og det tilknyttede fagområde, kan principielt opdeles i to typer:

a) En "fagmand" (med kendskab til matematik) søger eller henter hjælp i et matematisk emne.

b) En matematiker (med kendskab til et fag) tilbyder eller giver hjælp til det givne fagområde.

Der kan i begge tilfælde enten være tale om, at det i faget viser sig givtigt at anvende allerede eksisterende matematiske teorier, eller at der opstår ny matematik specielt beregnet på løsning af et fagligt problem.

Den netop omtalte opdeling er imidlertid uden betydning for det principielle i en matematisk models indplacering i et fag, og jeg vil ikke komme yderligere ind på den. Men i forlængelse heraf skal det bemærkes, at det første problem, man støder på, når man skal beskæftige sig med matematiske modeller, er manglende faglige forudsætninger hos matematikeren og manglende matematiske forudsætninger hos fagmanden. For at opnå frugtbare matematiske modeller er det derfor af afgørende betydning, at matematikeren sætter sig grundigt ind i fagmandens ”problemer”, og at fagmanden får indgående kendskab til det matematiske begrebsapparat og til matematikkens muligheder og begrænsninger, samt naturligvis at fagmanden og matematikeren arbejder godt sammen om emnet på baggrund af hver deres speciale.

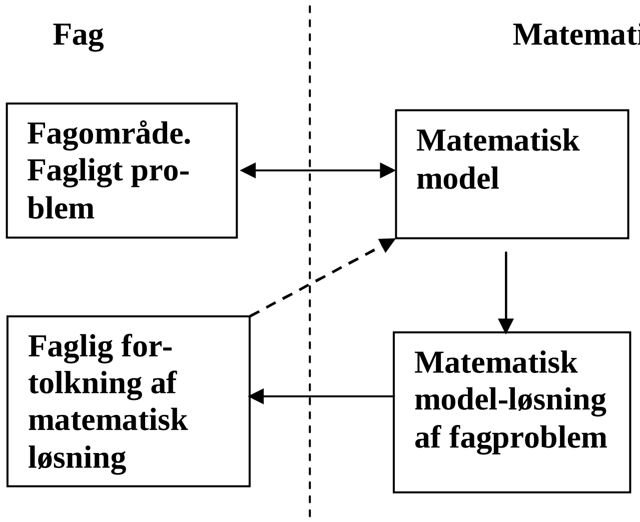
I forbindelse med overvejelser om matematiske emners indplacering i andre fag støder man ofte på begrebet: ”En anvendelse af et matematisk emne i et andet fag”. Jeg vil imidlertid – som det allerede er gjort nogle gange, herunder i denne bogs titel – benytte betegnelsen ”matematisk model” frem for at tale om ”anvendelser”. Dette skyldes bl.a., at visse matematiske teorier kan anvendes i andre matematiske teorier, og det er ikke den type ”anvendelse”, jeg vil beskæftige mig med her.

Hertil kommer, at ordet model er mere beskrivende i forhold til det, man rent faktisk foretager sig, når et matematisk emne ”anvendes” i et andet fag. En model medtager nemlig kun visse ”udvalgte” egenskaber ved den virkelighed (det emne), som modellen skal beskrive. Og denne udvælgelse er fastlagt dels ud fra modelbyggerens muligheder og evner, dels ud fra den ønskede grad af præcision. F.eks. er en globus, et landkort, et modelfly og et marionetteater modeller af hhv. jordkloden, en del af jordkloden, et ”rigtigt” fly og et ”rigtigt” teater. Og det er her i alle tilfælde oplagt, at kun en del af det virkelige objekts egenskaber er medtaget i modellen. (Det overlades til læseren at præcisere, hvilke egenskaber der er medtaget, og hvilke der er udeladt i de omtalte modeller. Læseren bedes ligeledes overveje, hvordan modelbyggerens muligheder og evner, samt den ønskede grad af præcision, har indvirket på modelbygningen).

Som det ses af det ovenstående, forekommer der ved enhver modeldannelse et vist informationstab. Men betydningen af dette informationstab afhænger dels af, hvilke egenskaber ved den betragtede virkelighed, vi ønsker at beskrive, og dels af, hvor stor indflydelse de egenskaber, som ikke medtages i modellen har på de medtagne egenskaber. Det skal i denne forbindelse fremhæves, at informationstabet kan have større eller mindre indflydelse på de konklusioner, man ud fra modellen kan drage om den del af virkeligheden, som modellen beskriver.
Betragt f.eks. et diagram for et givet elektrisk kredsløb, hvori der bl.a. indgår et amperemeter og en resistor (en modstand). Hvis man kun er interesseret i at få at vide, hvordan de i kredsløbet indgående komponenter er forbundet, er resistansens størrelse uden betydning. Hvis man derimod ønsker at foretage beregninger ud fra diagrammet, skal resistansens størrelse naturligvis medtages i den model, som diagrammet udgør. (Det overlades til læseren at overveje, om – og i givet fald under hvilke omstændigheder – tidspunktet, temperaturen, amperemeterets resistans, amperemeterets udseende, barometerstanden eller ledningernes farve skal/bør indgå i forbindelse med diagrammet).

Analogt til de ovenstående betragtninger kan det konkluderes, at der også ved opstilling og behandling af matematiske modeller forekommer et informationstab, samt at der er en heraf følgende indskrænkning i konsekvenserne af modelberegningerne.

Principielt og skematisk kan en matematisk models indplacering i forbindelse med et andet fag beskrives på følgende måde:



Den dobbeltpegende pil mellem ”Fagområde” og ”Matematisk model” angiver ”opstillingen” af den matematiske model, som foregår på baggrund af de tidligere omtalte to typer samspil mellem fag og matematik. Det er altså her, at (en del af) det omtalte informationstabs forekommer. Og informationstabet opstår altså, fordi der foretages en udvælgelse, eller fordi man tillægger det betragtede objekt nogle idealiserede egenskaber, som det måske kun til en vis grad besidder.

Pilen fra ”Matematisk model” til ”Matematisk modelløsning” angiver de matematiske operationer og argumenter. Dels for overhovedet at kunne ”finde” en løsning, dels for måske at opnå en større overskuelighed, kan det undertiden være nødvendigt at foretage forenklinger i en del af forudsætningerne, eller det kan være nødvendigt at anvende tilnærmelser (approksimationer) i beregningerne. I begge tilfælde er der tale om, at der i den matematiske model indbygges et yderligere informationstab.

Den stiplede linie fra ”Faglig fortolkning” til ”Matematisk model” angiver, at den faglige fortolkning af modelløsningen ikke gav tilfredsstillende resultater, og at den matematiske model derfor skal revideres. Dette foregår typisk ved at ”fjerne” nogle af de foretagne idealiseringer og forenklinger – enten i modelopstillingen eller i modelløsningen. Men det skal i forlængelse heraf endnu engang fremhæves, at en matematisk model kun angiver en tilnærmet beskrivelse af ”virkeligheden”, og at der derfor kan forekomme forskellige modeller for det samme fagområde afhængig af den ønskede præcision, samt at der normalt slet ikke findes nogen endegyldig model.
I øvrigt kan det bemærkes, at der findes eksempler på, at samme matematiske model kan bruges i flere forskellige fagligt uafhængige sammenhænge (f.eks. ved beskrivelse af eksponentielt voksende eller aftagende størrelser).

Det må nu være rimeligt at stille følgende spørgsmål:
1. I hvilke sammenhænge kan matematisk modeller indgå ?
2. Hvad kan man forvente at opnå ved en matematisk modelbeskrivelse af et givet fagområde ?

Svaret på spørgsmål 1 må stort set være, at matematiske modeller kan indgå i fagområder, der
a) har (eller kan gives) et kvantitativt indhold, dvs. som indeholder størrelser, der på en eller anden måde kan vejes, måles, tælles osv.
b) indeholder nogle implicit givne lovmæssigheder eller logiske sammenhænge af deterministisk (dvs. forudbestemmelig) eller stokastisk (dvs. tilfældig) natur.

Svaret på spørgsmål 2 må bl.a. være, at man

a) oftest kan opnå en mere præcis, systematisk og samtidig kortere beskrivelse af fagområdet
b) v.hj.a. de matematiske modeller kan udlede resultater, som ellers ikke (eller i hvert fald næppe) lod sig frembringe
c) ofte kan forudsige "begivenheder" (evt. med visse sandsynligheder) eller kan forklare tidligere "hændelsesforløb" (hvorved man kan opnå en bedre forståelse af de pågældende fagområde).

Det skal i denne sammenhæng omtales, at nogle fag eller fagområder – og her nok først og fremmest det, der under en samlende betegnelse kaldes fysik – direkte er opbygget v.hj.a. matematiske begreber, og at matematikken således ofte er uundværlig for fremsættelsen af brugbare teorier indenfor de pågældende fag. (Der tænkes her naturligvis på fagene og fagområderne i "moderne" fremtoning). For disse fagområders vedkommende kan det derfor måske være irrelevant at skelne imellem faget selv og den tilhørende matematik, (selv om det principielt er muligt at gøre i de fleste tilfælde).
Det skal endvidere bemærkes, at hvis matematikken blot bruges som beskrivelsesmiddel i et fag for at opnå en kortere og mere præcis formulering af et givet fagområde, så er der egentlig ikke tale om et fagligt problem med en tilhørende modelløsning, hvormed de to nederste "kasser" i ovenstående figur stort set mister deres betydning.

Når man beskæftiger sig med matematiske modeller, kan man ikke undgå at komme ind på betragtninger om "virkeligheden", og jeg har da også allerede flere gange i det ovenstående benyttet mig af ordet virkelighed.
Begrebet virkelighed kan defineres som alle de emneområder, mennesker på en eller anden måde og i en eller anden sammenhæng beskæftiger sig med. Med denne definition er næsten alt "gjort til" virkelighed, f.eks. også drømmes indhold og trosindhold, og dette kan – naturligvis afhængig af ens livsindstilling – være problematisk.
Som en anden yderlighed ligger den materialistiske virkelighedsopfattelse, hvor virkeligheden kun omfatter materielle objekter, dvs. ting, som kan "måles og vejes". Men hvis denne virkelighedsopfattelse – som til en vis grad (især efter midten af det 19. århundrede) er blevet fremherskende i den vesterlandske kultur – betragtes i sin yderste konsekvens, kan man blive udsat for nogle efter min mening ret absurde anskuelser som f.eks. følgende: Produktion af kunstige blomster er mere virkelig end en biologs overvejelser om vækstforholdene for naturlige blomster.

Som læseren nok har gættet, mener jeg, at sandheden om virkeligheden skal findes "et sted imellem" de to omtalte virkelighedsopfattelser. Dette indebærer således, at det begrebsapparat (teorigrundlag), der ligger bag en given beskrivelse af nogle objekter, er "lige så virkelig" som de materielle faktorer, beskrivelsen omhandler.

I forbindelse med eksemplet vedrørende kunstige og naturlige blomster skal det retfærdigvis omtales, at der bag produktionen af kunstige blomster ligger en lang række teorier og lovmæssigheder af såvel teknisk som økonomisk art. Og samtidig skal det fremhæves, at biologens overvejelser om naturlige blomster kan være medvirkende til en bedre forståelse og dermed bedre bevarelse af den natur, som vi alle er fundamentalt afhængige af, (og uden hvilken vi bl.a. ikke havde behov for (mulighed for) at diskutere, hvordan "virkeligheden" skal opfattes).

En anden synsvinkel på matematiske modeller er indeholdt i den måde, hvorpå de matematiske modeller groft taget kan inddeles, nemlig i følgende tre forskellige typer:

Type A: Matematiske modeller med reelt – men som nævnt muligvis approksimativt – kvantitativt indhold.

Type B: Matematiske modeller med fiktivt – men dog realistisk beskrivende – kvantitativt indhold.

Type C: Matematiske modeller med kvalitativt beskrivende indhold.

Når et givet fag betragtes i en ”praktisk” sammenhæng (det vil f.eks. sige i en ”dagligdags”, ”forskningsundersøgelsesmæssig” eller ”produktionsrelevant” sammenhæng), så er det oftest modeller af type A, som forekommer. Det skal i denne forbindelse omtales, at mange fag har forskellige ”tommelfingerregler”, som benyttes dagligt, og som egentlig har deres oprindelse i matematiske modelløsninger af de relevante faglige problemer.
Når et fag betragtes i en erkendelsesmæssig, uddannelsesmæssig og/eller forståelsesmæssig sammenhæng, optræder der imidlertid modeller af alle tre typer. Man kan f.eks. udmærket lære at forstå et bestemt fagområdes mekanismer ved at betragte modeller af type B. At der i type B er tale om et fiktivt kvantitativt indhold, betyder således kun, at de tal, man benytter sig af i modelundersøgelsen, ikke er registrerede data, men derimod skønnede eller frit opfundne værdier. Det betyder derimod ikke, at de i modellen anførte indre faglige sammenhænge er urealistiske.
Ved modeller af type C er et fagligt kvalitativt indhold blevet kvantificeret. (Der er altså på en eller anden måde ”sat tal på” nogle begrebsstørrelser, der ikke umiddelbart kan ”måles, vejes, tælles osv.”). Det bliver på denne måde undertiden muligt at give en kortere og mere præcis beskrivelse af fagområdet. (Som eksempel kan nævnes anvendelsen af nyttefunktioner i økonomisk-behavoristiske sammenhænge).

Der er en – måske forståelig – tendens til, at når matematikere beskæftiger sig med matematiske modeller, så fokuseres der på den højre del af ovenstående figur, altså på den ”rent” matematiske side af sagen, og i særdeleshed på pilen fra ”Matematisk model” til ”Matematisk modelløsning”, idet netop denne pil som omtalt angiver de matematiske operationer og argumenter, (og denne bog ligger nok også en væsentlig del af sin vægt dér). Der er imidlertid i forbindelse med den omtalte tendens opstået en række konstruerede ”modeller” (”pseudoanvendelser”), som blot er matematisk teori pakket ind i et urealistisk tågeslør af tilsyneladende fagrelevante begreber. (Der er altså i denne sammenhæng heller ikke tale om modeller af type B).
Jeg vil her anføre to eksempler (opgaver) til belysning af synspunktet.

Opgave 1: Et fysikhold på en skole har bygget en raket. Denne raket har til tiden t efter affyringen tilbagelagt strækningen $s(t)$ givet ved: $s(t) = t^3 + 0{,}5 \cdot t^2$, $0 \le t \le 20$
hvor t måles i sekunder og s i meter.
Angiv den tilbagelagte strækning, samt hastigheden og accelerationen, når $t = 5$ sek.

Den matematisk ”model” i denne opgave siger, at i begyndelsen (de første 20 sekunder) kan rakettens tilbagelagte strækning beskrives ved udtrykket: $s(t) = t^3 + 0{,}5 \cdot t^2$, men der er ingen begrundelse for denne model (dvs. ingen udledning af udtrykket for s(t)). Og selv om det måske er rigtigt, (hvilket jeg betvivler), at s(t) er af formen: $a \cdot t^3 + b \cdot t^2 + c \cdot t$, er det næppe sandsynligt, at koefficienterne a, b og c er hhv. 1, 0,5 og 0.

Opgave 1 må derfor blot betegnes som en opgave i differentiation, idet $s'(t)$ angiver hastigheden $v(t)$, og idet $s''(t)$ angiver accelerationen $a(t)$, (hvormed der indirekte bruges en matematisk model fra faget fysik).

Opgave 2: En indendørsarkitekt har designet nogle dørgreb, der har form som et omdrejnings-legeme. Dette legeme fremkommer ved at rotere grafen for funktionen

$$f(x) = \tfrac{1}{6} \cdot (\tfrac{1}{2}x + 2) \cdot \sqrt{36 - x^2} \quad , \quad 0 \le x \le 6$$

omkring førsteaksen, hvor enheden på aksen måles i cm.

a) Tegn v.hj.a. en funktionsundersøgelse grafen for f. (Herved får man et indtryk af, hvorfor netop den anførte funktion er brugt til formålet).

b) Hvor stor er dørgrebets største diameter ?

c) Dørgrebet fremstilles på en drejebænk af en messingcylinder. Hvor meget vejer det, når messings massefylde er på 8,3 g/cm^3 , (dvs. 1 cm^3 vejer 8,3 gram) ?

Selv om omdrejningslegemet måske ligner et dørgreb, hvilket fremgår af spørgsmål a) i opgaven, så vil en indendørsarkitekt (eller andre, der beskæftiger sig med formgivning), almindeligvis ikke konstruere en matematisk model som den omtalte for at designe et dørgreb eller lignende. (Der findes naturligvis undtagelser fra denne påstand. Et kendt eksempel herpå er Piet Hein's konstruktion af superellipsen). I øvrigt vil materialeforbruget nemt kunne bestemmes ved at veje et prøveeksemplar, som indendørsarkitekten formodentlig alligevel laver. Opgave 2 er derfor blot at betragte som en opgave i funktionsundersøgelse og integralregning.

Jeg vil afslutte dette kapitel med i forlængelse af dets indhold at formulere følgende to aforismer om matematik og matematiske modeller:

1. En matematisk model er en eksplicit præcisering af implicit givne præcise sammenhænge i et fag.

2. Matematik har ikke kun værdi som et redskab, men også som et filosofisk livsindhold og værdigrundlag baseret på logisk erkendelse.