Appendix 1. Nogle egenskaber ved reelle tal.

Som bekendt består de reelle tal R (dvs. alle tal på tallinien) af de rationale tal Q og de irrationale tal I, dvs. $R = Q \cup I$.
De rationale tal Q er mængden af tal, der kan skrives som brøker imellem to hele tal, hvor nævneren er forskellig fra nul, og de irrationale tal I er de tal, som ikke har denne egenskab.
Det første vi skal bevise i dette appendix er, at der overhovedet findes irrationale tal.

Vi bemærker først, at mængden Z af hele tal er en delmængde af de rationale tal, dvs. $Z \subseteq Q$, idet ethvert helt tal kan skrives som en brøk imellem sig selv og tallet 1.

Endvidere gælder det, at Q er afsluttet overfor regningsarterne: addition (+), subtration (–) og multiplikation (·), dvs. at en sum, en differens eller et produkt af to rationale tal giver et nyt rationalt tal. Vi viser dette for addition (+), og overlader argumenterne for subtration (–) og multiplikation (·) til læseren.
Vi skal altså vise, at hvis p og q er rationale tal, så er p + q også er rationalt tal. Da p og q er rationale, findes her hele tal m, n, s og t, så: $p = \frac{m}{n}$ og $q = \frac{s}{t}$. Ud fra dette ser vi, at:

$$p + q = \frac{m}{n} + \frac{s}{t} = \frac{m \cdot t + s \cdot n}{n \cdot t}$$

og da et produkt og en sum af hele tal giver hele tal ser vi, at $m{\cdot}t + s{\cdot}n$ og $n{\cdot}t$ er hele tal. p + q er derfor skrevet som en brøk mellem hele tal, dvs. p + q er et rationalt tal.

Ethvert rationalt tal kan i øvrigt skrives som en uforkortelig brøk mellem to hele tal, idet vi kan forkorte brøken mellem de to hele tal indtil den er uforkortelig.

Om de hele tal Z gælder, at hvis $m \in Z$ er ulige, så er m^2 også ulige.
Dette bevises på følgende måde:
Hvis m er ulige, så findes et helt tal n, så m = 2n + 1 (overvej!), hvormed vi får, at:
$m^2 = (2n + 1)^2 = 4n^2 + 4n + 1$. Da $4n^2$ og 4n er lige tal (de er hele tal ganget med 4), så er $4n^2 + 4n$ også et lige tal. Når vi så lægger 1 til dette, får vi et ulige tal, hvormed vi ser, at m^2 er ulige.

Vi ser dermed også, at hvis der for et helt tal p gælder, at p^2 er lige, så er p selv lige.
Dette skyldes, at hvis p var ulige, så ville p^2 også være ulige, og det er jo ikke tilfældet, idet p^2 er forudsat at være lige.

Vi er nu klar til at bevise følgende berømte sætning (som bl.a. også giver os, at der eksisterer irrationale tal):

Sætning A.1.1.
$\sqrt{2} \notin Q$, dvs. $\sqrt{2}$ er et irrationalt tal.

Bevis:
Vi beviser sætningen ved et indirekte argument. Vi antager altså, at $\sqrt{2} \in Q$, dvs. at $\sqrt{2}$ er et rationalt tal, og vi vil så vise, at dette fører til en modstrid (dvs. noget, de er logisk forkert).

Da $\sqrt{2} \in Q$, kan $\sqrt{2}$ skrives som en <u>uforkortelig</u> brøk mellem to hele tal.
Vi antager altså, at $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, hvor p og q er hele tal, og hvor brøken er uforkortelig.

Af $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ ses, at $(\sqrt{2})^2 = (\frac{p}{q})^2$ og dermed, at $p^2 = 2 \cdot q^2$. Da q^2 er et helt tal, ses det, at p^2 er lige.
Ifølge de indledende kommentarer er p derfor selv lige. Der findes således et helt tal s, så p = 2s, hvilket indsat i $p^2 = 2 \cdot q^2$ giver: $(2s)^2 = 2 \cdot q^2$, hvoraf vi får: $q^2 = 2 \cdot s^2$. Dette betyder, at q^2 er lige, og dermed, at q selv er lige. Vi har således, at både p og q er lige. Men dette er i strid med, at brøken $\frac{p}{q}$ er uforkortelig. Vi er hermed kommet til en modstrid, hvormed den oprindelige antagelse om at $\sqrt{2}$ er et rationalt tal ikke kan gælde. $\sqrt{2}$ er altså et irrationalt tal. Hermed er sætningen bevist. ♥

Om de irrationale tal I gælder bl.a. følgende:

<u>Sætning A.1.2.</u>

For ethvert rationalt tal q og ethvert helt tal n ($n \neq 0$) gælder, at $q + \frac{\sqrt{2}}{n} \in I$

Der findes derfor uendeligt mange irrationale tal , og der findes mindst lige så mange irrationale tal, som der findes rationale tal.

Bevis:

Vi fører et indirekte bevis: Antag altså, at $q + \frac{\sqrt{2}}{n} \in Q$. Da Q er stabil overfor +, – og · , og da q og n er rationale tal, ser vi, at: $q + \frac{\sqrt{2}}{n} \in Q$ giver os, at: $q + \frac{\sqrt{2}}{n} - q \in Q$, dvs. $\frac{\sqrt{2}}{n} \in Q$.

Og dermed får vi, at: $\frac{\sqrt{2}}{n} \cdot n \in Q$, dvs. $\sqrt{2} \in Q$. Dette er imidlertid i strid med sætning A.1.1, hvormed første del af sætning A.1.2 er bevist.
Hvis n = 1 ser vi specielt, at $q + \sqrt{2} \in I$. Heraf fås de to sidste påstande i sætningen: Dels ses, at da der er uendelig mange rationale tal (de rationale tal indeholder bl.a. de hele tal), er der uendeligt mange irrationale tal, og dels ses, at for ethvert rationalt tal q findes der et irrationalt tal $q + \sqrt{2}$
Hermed er sætningen bevist. ♥

<u>Øvelse A.1.3.</u>

Opskriv de 15 irrationale tal $q + \frac{\sqrt{2}}{n}$, der fremkommer, når q = 5, q = – 265,89 hhv. $q = \frac{213}{17}$ og n = –3, n = 2, n = 18, n = 54 hhv. n = – 2000. Udregn en tilnærmet værdi på regnemaskinen. ♥

Vi nævner uden bevis, at for ethvert primtal p gælder, at $\sqrt{p} \in I$, samt at der findes mange andre irrationale tal end kvadratroden af et visse hele tal. Et af de berømteste er tallet π (som er fastlagt ved forholdet mellem omkredsen og diameteren i en cirkel).

Vi vil nu gå over til at se på andre særlige egenskaber ved de rationale og de irrationale tal. Der gælder nemlig om dem begge, at de ligger tæt i R, dvs. uanset hvilke to reelle tal man tager (og underforstået: uanset hvor tæt de to valgte reelle tal ligger på hinanden), så findes der både et rationalt og et irrationalt tal imellem disse to tal. Der gælder altså følgende sætning:

Sætning A.1.4.
1) De rationale tal Q ligger tæt i de reelle tal R, dvs. uanset hvor tæt to forskellige reelle tal ligger på hinanden, så findes der et rationalt tal imellem dem.
2) De irrationale tal I ligger tæt i de reelle tal R, dvs. uanset hvor tæt to forskellige reelle tal ligger på hinanden, så findes der et irrationalt tal imellem dem.

Bevis:
Ad 1): Lad r_1 og r_2 være to vilkårligt valgte reelle tal, hvor $r_1 < r_2$. Vi skal da bevise, at der findes et rationalt tal q, som ligger imellem r_1 og r_2, dvs. som opfylder: $r_1 < q < r_2$

Lad $n \in N$ være valgt, så $n > \frac{1}{r_2 - r_1}$. (N er mængden af de naturlige tal, dvs. de positive hele tal).

Dette er muligt, da N fortsætter i det uendelige. Lad herefter m være det mindste hele tal, som opfylder, at: $m \geq n \cdot r_2$. Vi vil nu bevise, at hvis vi sætter $q = \frac{m-1}{n}$, så opfylder q det ønskede.

Da q er en brøk mellem to hele tal, er q et rationalt tal. Vi skal derfor undersøge størrelsen af q. Først bevises, at $q < r_2$:
Ifølge definitionen af m har vi, at $m - 1 < n \cdot r_2$, og da n er positiv, kan vi dividere med n uden at vende ulighedstegnet, hvormed vi får: $\frac{m-1}{n} < r_2$.

Dernæst bevises, at $r_1 < q$. Vi benytter et indirekte bevis, og antager altså, $q \leq r_1$, dvs. at $\frac{m-1}{n} \leq r_1$.
Vi vil så argumentere for, at dette fører til en modstrid, hvormed der må gælde, at $r_1 < q$.
Hvis $\frac{m-1}{n} \leq r_1$ får vi ved multiplikation med n, at $m - 1 \leq n \cdot r_1$ og dermed, at $m \leq n \cdot r_1 + 1$

Af $n > \frac{1}{r_2 - r_1}$ får vi, idet $r_2 - r_1$ er et positivt tal, at $n \cdot (r_2 - r_1) > 1$ og dermed: $n \cdot r_2 - n \cdot r_1 > 1$, hvilket giver os: $n \cdot r_2 > n \cdot r_1 + 1$. Kombineres dette med $m \leq n \cdot r_1 + 1$, ser vi, at $m < n \cdot r_2$, hvilket er i strid med, at m er valgt, så $m \geq n \cdot r_2$. Hermed er sætningens 1. del bevist.

Ad 2): Lad r_1 og r_2 være to vilkårligt valgte reelle tal, hvor $r_1 < r_2$. Vi skal da bevise, at der findes et irrationalt tal s, som ligger imellem r_1 og r_2, dvs. som opfylder: $r_1 < s < r_2$
Da de rationale tal Q ifølge 1. del af sætningen ligger tæt i R, findes et tal $q \in Q$, så $r_1 < q < r_2$

Lad n være et positivt helt tal som opfylder, at $n > \frac{\sqrt{2}}{r_2 - q}$. Da $r_2 - q$ er positivt, får vi hermed, at

$n \cdot (r_2 - q) > \sqrt{2}$ og dermed, at: $r_2 - q > \frac{\sqrt{2}}{n}$. Dette giver os endeligt, at $q + \frac{\sqrt{2}}{n} < r_2$.

Da $\frac{\sqrt{2}}{n} > 0$ har vi desuden, at $r_1 < q < q + \frac{\sqrt{2}}{n}$. Hvis vi sætter $s = q + \frac{\sqrt{2}}{n}$, så ser vi altså, at $r_1 < s < r_2$, og da s ifølge sætning A.1.2 er et irrationalt tal, er sætningen bevist. ♥

Øvelse A.1.5.

a) Bestem et rationalt og et irrationalt tal imellem 3,123456788 og 3,123456789

b) Bestem et rationalt og et irrationalt tal imellem $\sqrt{5}$ og 2,236068

c) Bestem et rationalt og et irrationalt tal imellem $-2000{,}0000000001$ og -2000 ♥

Sætning A.1.4 har mange konsekvenser vedrørende egenskaber ved de reelle tal. Vi vil her se på nogle få egenskaber, som der er brug for i denne bog:

- I enhver omegn om et tal x_o findes der både rationale og irrationale tal forskellig fra x_o
  Som omtalt i Kapitel 1 er en omegn om f.eks. tallet 19 et åbent interval, der er symmetrisk omkring 19. Uanset hvor lille denne omegn er, f.eks. fra 18,999999 til 19,000001, så findes der ifølge Sætning A.1.4 både rationale og irrationale tal her inde.

- Hvis a er venstre endepunkt i et interval I, hvor $a \notin I$ (dvs. intervallet er åbent hen mod a), så findes der ikke noget mindste tal i intervallet.
  Hvis vi f.eks. ser på intervallet I =]41 ; 200[, så er 41 ikke med i I, og der findes ikke noget tal i I, som er det mindste (dvs. som er større end 41 men samtidig mindre end alle de andre tal i intervallet). Dette skyldes, at uanset hvor tæt på 41 vi vælger et tal t, f.eks. t = 41,00000000001, så er der ifølge sætning A.1.4 både et rationalt og et irrationalt (og dermed reelle) tal imellem a og t.

- Hvis b er højre endepunkt i et interval I, hvor $b \notin I$ (dvs. intervallet er åbent hen mod b), så findes der ikke noget største tal i intervallet. (Argumentet overlades til læseren som en øvelse).

- I forbindelse med grænseværdi (kap. 2 mm.) taler vi om, at en variabel størrelse x går imod et givet fast tal x_o, hvilket skrives $x \to x_o$. Vi kan f.eks. have, at $x \to 5$, hvor det faste tal $x_o = 5$. Dette betyder, at x kan komme lige så tæt på x_o, som det skal være – uden nogensinde at blive lig med x_o !!
  At noget sådant giver mening fremgår bl.a. af, at uanset hvor tæt x er på x_o, så findes der ifølge sætning A.1.4 stadigvæk reelle tal imellem x og x_o, både rationale og irrationale tal.

- I ethvert interval (dvs. imellem to vilkårlige reelle tal) findes der uendeligt mange rationale og uendeligt mange irrationale tal – og dermed altså også uendeligt mange reelle tal.
  Dette kan indses på følgende måde: Betragt intervallet fra a til b, og lad c være dette intervals midtpunkt. Da $a < c$ findes der et rationalt tal q_1 imellem a og c, dvs. $a < q_1 < c$, og tilsvarende ses, at der findes et rationalt tal q_2 imellem c og b, dvs. $c < q_2 < b$. Vi har dermed to rationale tal q_1 og q_2 imellem a og b, hvor $q_1 < q_2$. (Tegn en skitse af situationen !)
  For ethvert $m \in N$ gælder (overvej !), at $a < q_1 + \frac{q_2 - q_1}{m} \le q_2 < b$, og da tallet $q_1 + \frac{q_2 - q_1}{m}$ er et rationalt tal (overvej !), er der uendeligt mange rationale tal mellem a og b.
  Det er muligt at vælge et positivt helt tal p, så $a < q_1 + \frac{\sqrt{2}}{p} < b$. Vi skal blot vælge $p > \frac{\sqrt{2}}{b - q_1}$ (overvej dette !). Hvis $n \in N$ er større end p, så er $a < q_1 + \frac{\sqrt{2}}{n} < q_1 + \frac{\sqrt{2}}{p} < b$.
  Da der er uendeligt mange hele tal n større end p, er der ifølge sætning A.1.3 uendeligt mange irrationale tal mellem a og b.

De reelle tal har mange flere interessante egenskaber. En af de vigtigste egenskaber – som vi ikke kan bevise, men dog nok fornemme på baggrund af bl.a. de ovenfor omtalte egenskaber – er, at **de reelle tal er et kontinuum (dvs. en sammenhængende talmængde uden huller).**
Der er altså ingen steder på tallinien, hvor der ”mangler” nogen tal.

Intervalruser.

Definition A.1.6.
Ved en *intervalruse* forstås en uendelig række af ikke-tomme, lukkede, begrænsede intervaller $I_1, I_2, I_3, \dots\dots, I_n, \dots\dots$, hvorom der gælder, at

- ethvert interval i rusen er en delmængde af det foregående interval, dvs.:
  $I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \supseteq \dots \supseteq I_n \supseteq \dots$
- længden af et vilkårligt interval i rusen er højst halvdelen af det foregående intervals længde dvs. for alle $n \in N$: $\ell(I_{n+1}) \le \frac{1}{2} \cdot \ell(I_n)$, hvor $\ell(I)$ betyder længden af intervallet I.

Vi bemærker, at det i en intervalruse gælder, at $\ell(I_n) \le \frac{1}{2^{n-1}} \cdot \ell(I_1)$ for alle $n \in N$ (Overvej !).

Hvis vi ser på fællesmængden af alle intervallerne i en intervalruse, så er det klart, at denne fællesmængde højst kan indeholde ét tal. Hvis vi nemlig har to forskellige tal p og q, så findes der et naturligt tal n, så $\frac{\ell(I_1)}{|p-q|} \le 2^{n-1}$, hvormed der gælder, at: $|p-q| \ge \frac{\ell(I_1)}{2^{n-1}} \ge \ell(I_n)$. Da $|p-q|$ er afstanden mellem p og q ser vi derfor, at p og q ikke begge kan ligge i intervallet I_{n+1}.
Omvendt må det være oplagt, bl.a. når vi tænker på de egenskaber ved de reelle tal, der er beskrevet i det foregående, at der findes et tal, som ligger i alle intervaller i rusen.
Dette er en af de fundamentale egenskaber ved de reelle tal, som vi ikke kan bevise, men som må anføres som et såkaldt aksiom byggende på de reelle tals opbygning og egenskaber.

Aksiom A.1.7. (Intervalsammensnævringsaksiomet).
Enhver intervalruse fastlægger netop ét reelt tal, dvs. fællesmængden består af netop ét tal.

Eksempel A.1.8.
Betragt intervallet $I_1 = [0;1]$. Ud fra I_1 kan laves en intervalruse ved som det næste interval i rusen at tage skiftevis den venstre og den højre halvdel af det foregående interval.
Man kan bevise, at denne intervalruse bestemmer tallet $\frac{1}{3}$, men beviset udelades af pladshensyn. ♥

Øvelse A.1.9.
Opskriv de første otte intervaller i den intervalruse, der omtales i eksempel A.1.8 – og argumentér for, at $\frac{1}{3}$ er indeholdt i dem alle sammen. ♥

Man kan i øvrigt bevise (men beviset ligger langt udenfor rammerne af denne bog), at intervalsammensnævringsaksiomet er ensbetydende med de reelle tals kontinuumsegenskab.

Appendix 2. Regneregler for grænseværdier. Beviser.

I dette appendix bevises sætning 2.11, som nedenfor kaldes sætning A.2.2, på baggrund af definition 2.3, som nedenfor kaldes definition A.2.1.

<u>Definition A.2.1.</u>
En funktion f siges at have grænseværdien a for x gående mod x_o, hvis der for enhver omegn $\omega(a)$ om a findes en udprikket omegn $\omega'(x_o)$ om x_o, således at hvis x er indeholdt i $\omega'(x_o)$, så er f(x) indeholdt i $\omega(a)$ (Jfr. figur A.2.1).

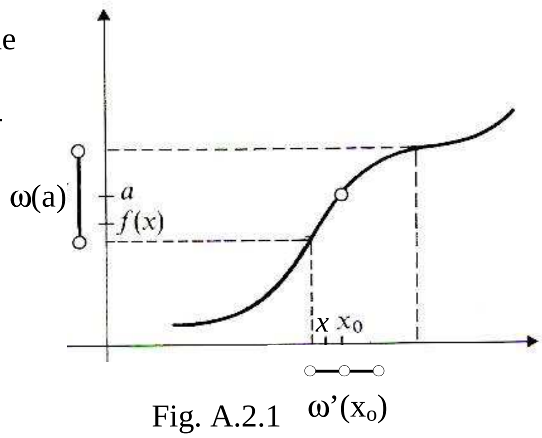


Fig. A.2.1

Ved anvendelse af kvantorer og andre matematiske symboler kan denne definition også skrives:

$$\forall\, \omega(a)\ \exists\, \omega'(x_o) : \ x \in \omega'(x_o) \ \Rightarrow \ f(x) \in \omega(a)$$

At f(x) har grænseværdien a for x gående mod x_o skrives kort på en af følgende to måder:

$f(x) \to a \quad \text{for} \quad x \to x_o$ (hvilket læses: f(x) går mod a for x gående mod x_o)

eller

$\lim\limits_{x \to x_o} f(x) = a$ (hvilket læses: limes af f(x) for x gående mod x_o er lig med a)

<u>Sætning A.2.2.</u> Regneregler for grænseværdier.

Lad det om funktionerne f og g være givet, at

$$f(x) \to a \quad \text{for} \quad x \to x_o \qquad \text{og} \qquad g(x) \to b \quad \text{for} \quad x \to x_o$$

hvor a og b er givne tal.

Da gælder:
1) $f(x) + g(x) \to a + b \quad \text{for} \quad x \to x_o$
2) $f(x) - g(x) \to a - b \quad \text{for} \quad x \to x_o$
3) $f(x) \cdot g(x) \to a \cdot b \quad \text{for} \quad x \to x_o$
4) Hvis k er en konstant gælder: $k \cdot f(x) \to k \cdot a \quad \text{for} \quad x \to x_o$
5) Hvis $b \neq 0$ gælder: $\dfrac{f(x)}{g(x)} \to \dfrac{a}{b} \quad \text{for} \quad x \to x_o$

<u>Bevis:</u>

<u>Ad 1):</u>
Vi skal altså vise, at hvis $f(x) \to a$ for $x \to x_o$ og $g(x) \to b$ for $x \to x_o$, så gælder der, at $f(x) + g(x) \to a + b$ for $x \to x_o$. Ifølge definition A.2.1 skal vi altså bevise, at:

$$\forall\ \omega(a+b)\ \exists\ \omega'(x_o):\ x \in \omega'(x_o) \ \Rightarrow\ f(x)+g(x) \in \omega(a+b)$$

At noget gælder for <u>enhver</u> omegn om a + b klares bevisteknisk ved at vælge en <u>tilfældig</u> omegn $\omega(a+b)$ om a + b, og så vise, at det ønskede gælder for denne omegn.
Vi vælger altså en tilfældig omegn $\omega(a+b)$ om a + b, og vi vil så vise, at der svarende til denne findes en udprikket omegn $\omega'(x_o)$ om x_o som har den egenskab, at

hvis $x \in \omega'(x_o)$, så er $f(x)+g(x) \in \omega(a+b)$.

Lad radius af den tilfældigt valgte omegn $\omega(a+b)$ om a + b være ε. Vi skal da vise, at der findes en udprikket omegn $\omega'(x_o)$ om x_o som har den egenskab, at

hvis $x \in \omega'(x_o)$ så er $|(f(x)+g(x))-(a+b)| < \varepsilon$,

dvs. at afstanden mellem f(x) + g(x) og a + b er mindre end radius ε (Overvej !).

Vi omskriver først på: $|(f(x)+g(x))-(a+b)|$. Ifølge regnereglen $|p+q| \le |p|+|q|$ får vi:

$$|(f(x)+g(x))-(a+b)| = |(f(x)-a)+(g(x)-b)| \le |f(x)-a| + |g(x)-b|$$

Betragt nu den omegn $\omega(a)$ om a, som har radius lig med $\frac{\varepsilon}{2}$. Da $f(x) \to a$ for $x \to x_o$ findes der ifølge definition A.2.1 en udprikket omegn $\omega_1'(x_o)$ om x_o med den egenskab, at:

$$x \in \omega_1'(x_o) \Rightarrow f(x) \in \omega(a) \quad \text{dvs.} \quad x \in \omega_1'(x_o) \Rightarrow |f(x)-a| < \tfrac{\varepsilon}{2}$$

Betragt dernæst den omegn $\omega(b)$ om b, som har radius lig med $\frac{\varepsilon}{2}$. Da $g(x) \to b$ for $x \to x_o$ findes der ifølge definition A.2.1 en udprikket omegn $\omega_2'(x_o)$ om x_o med den egenskab, at:

$$x \in \omega_2'(x_o) \Rightarrow g(x) \in \omega(b) \quad \text{dvs.} \quad x \in \omega_2'(x_o) \Rightarrow |g(x)-b| < \tfrac{\varepsilon}{2}$$

Vi sætter nu $\omega'(x_o) = \omega_1'(x_o) \cap \omega_2'(x_o)$. $\omega'(x_o)$ er da en udprikket omegn om x_o (overvej !), og der gælder:

$$x \in \omega'(x_o) \Rightarrow |(f(x)+g(x))-(a+b)| \le |f(x)-a| + |g(x)-b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

dvs. $\quad x \in \omega'(x_o) \Rightarrow |(f(x)+g(x))-(a+b)| < \varepsilon$

hvormed det ønskede er bevist.

<u>Ad 2):</u> *(Beviset forløber næsten identisk med beviset for pkt. 1)*
Vi skal altså vise, at hvis $f(x) \to a$ for $x \to x_o$ og $g(x) \to b$ for $x \to x_o$, så gælder der, at $f(x)-g(x) \to a-b$ for $x \to x_o$. Ifølge definition A.2.1 skal vi altså bevise, at:

$$\forall\ \omega(a-b)\ \exists\ \omega'(x_o):\ x \in \omega'(x_o) \ \Rightarrow\ f(x)-g(x) \in \omega(a-b)$$

At noget gælder for <u>enhver</u> omegn om a – b klares bevisteknisk ved at vælge en <u>tilfældig</u> omegn $\omega(a-b)$ om a – b, og så vise, at det ønskede gælder for denne omegn.
Vi vælger altså en tilfældig omegn $\omega(a-b)$ om a – b, og vi vil så vise, at der svarende til denne findes en udprikket omegn $\omega'(x_o)$ om x_o som har den egenskab, at

hvis $x \in \omega'(x_o)$, så er $f(x)-g(x) \in \omega(a-b)$.

Lad radius af den tilfældigt valgte omegn $\omega(a-b)$ om a – b være ε. Vi skal da vise, at der findes en udprikket omegn $\omega'(x_o)$ om x_o som har den egenskab, at

hvis $x \in \omega'(x_o)$ så er $|(f(x)-g(x))-(a-b)| < \varepsilon$,

dvs. at afstanden mellem $f(x) - g(x)$ og $a - b$ er mindre end radius ε (Overvej !).
Vi omskriver først på: $|(f(x)-g(x))-(a-b)|$. Ifølge regnereglen $|p-q| \le |p|+|q|$ får vi:

$$|(f(x)-g(x))-(a-b)| \;=\; |(f(x)-a)-(g(x)-b)| \;\le\; |f(x)-a| + |g(x)-b|$$

Betragt nu den omegn $\omega(a)$ om a, som har radius lig med $\frac{\varepsilon}{2}$. Da $f(x) \to a$ for $x \to x_o$ findes der ifølge definition A.2.1 en udprikket omegn $\omega_1'(x_o)$ om x_o med den egenskab, at:

$$x \in \omega_1'(x_o) \Rightarrow f(x) \in \omega(a) \quad \text{dvs.} \quad x \in \omega_1'(x_o) \Rightarrow |f(x)-a| < \tfrac{\varepsilon}{2}$$

Betragt dernæst den omegn $\omega(b)$ om b, som har radius lig med $\frac{\varepsilon}{2}$. Da $g(x) \to b$ for $x \to x_o$ findes der ifølge definition A.2.1 en udprikket omegn $\omega_2'(x_o)$ om x_o med den egenskab, at:

$$x \in \omega_2'(x_o) \Rightarrow g(x) \in \omega(b) \quad \text{dvs.} \quad x \in \omega_2'(x_o) \Rightarrow |g(x)-b| < \tfrac{\varepsilon}{2}$$

Vi sætter nu $\omega'(x_o) = \omega_1'(x_o) \cap \omega_2'(x_o)$. $\omega'(x_o)$ er da en udprikket omegn om x_o (overvej !), og der gælder:

$$x \in \omega'(x_o) \Rightarrow |(f(x)-g(x))-(a-b)| \le |f(x)-a| + |g(x)-b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

dvs. $$x \in \omega'(x_o) \Rightarrow |(f(x)-g(x))-(a-b)| < \varepsilon$$

hvormed det ønskede er bevist.

<u>Ad 3):</u>
Vi skal altså vise, at hvis $f(x) \to a$ for $x \to x_o$ og $g(x) \to b$ for $x \to x_o$, så gælder der, at $f(x)\cdot g(x) \to a\cdot b$ for $x \to x_o$. Ifølge definition A.2.1 skal vi altså bevise, at:

$$\forall\, \omega(a\cdot b)\ \exists\, \omega'(x_o) : x \in \omega'(x_o) \Rightarrow f(x)\cdot g(x) \in \omega(a\cdot b)$$

At noget gælder for <u>enhver</u> omegn om $a\cdot b$ klares bevisteknisk ved at vælge en <u>tilfældig</u> omegn $\omega(a\cdot b)$ om $a\cdot b$, og så vise, at det ønskede gælder for denne omegn.
Vi vælger altså en tilfældig omegn $\omega(a\cdot b)$ om $a\cdot b$, og vi vil så vise, at der svarende til denne findes en udprikket omegn $\omega'(x_o)$ om x_o som har den egenskab, at

hvis $x \in \omega'(x_o)$, så er $f(x)\cdot g(x) \in \omega(a\cdot b)$.

Lad radius af den tilfældigt valgte omegn $\omega(a\cdot b)$ om $a\cdot b$ være ε. Vi skal da vise, at der findes en udprikket omegn $\omega'(x_o)$ om x_o som har den egenskab, at

hvis $x \in \omega'(x_o)$ så er $|f(x)\cdot g(x) - a\cdot b| < \varepsilon$,

dvs. at afstanden mellem $f(x)\cdot g(x)$ og $a\cdot b$ er mindre end radius ε (Overvej !).

Beviset opdeles i fire tilfælde:
a) $a = 0 \wedge b = 0$ b) $a \ne 0 \wedge b = 0$ c) $a = 0 \wedge b \ne 0$ d) $a \ne 0 \wedge b \ne 0$

<u>Ad a):</u> Vi ser først på den situation, hvor både a og b er 0. Vi skal da vise, at der findes en udprikket omegn $\omega'(x_o)$ om x_o som har den egenskab, at hvis $x \in \omega'(x_o)$ så er $|f(x)\cdot g(x) - 0| < \varepsilon$.

Vi omskriver først på $|f(x)\cdot g(x) - 0|$. Ifølge regnereglen $|p\cdot q| = |p|\cdot|q|$ får vi:

$$|f(x)\cdot g(x) - 0| \;=\; |f(x)\cdot g(x)| \;=\; |f(x)|\cdot|g(x)| \;=\; |f(x)-0|\cdot|g(x)-0|$$

Betragt nu den omegn $\omega(0)$ om 0, som har radius lig med $\sqrt{\varepsilon}$. Da $f(x) \to 0$ for $x \to x_o$ findes der ifølge definition A.2.1 en udprikket omegn $\omega_1'(x_o)$ om x_o med den egenskab, at:

$$x \in \omega_1'(x_o) \Rightarrow f(x) \in \omega(0) \quad \text{dvs.} \quad x \in \omega_1'(x_o) \Rightarrow |f(x)-0| < \sqrt{\varepsilon}$$

Betragt den (samme) omegn $\omega(0)$ om 0, som har radius lig med $\sqrt{\varepsilon}$. Da $g(x) \to 0$ for $x \to x_o$ findes der ifølge definition A.2.1 en udprikket omegn $\omega_2'(x_o)$ om x_o med den egenskab, at:

$$x \in \omega_2'(x_o) \Rightarrow g(x) \in \omega(0) \quad \text{dvs.} \quad x \in \omega_2'(x_o) \Rightarrow |g(x)-0| < \sqrt{\varepsilon}$$

Vi sætter nu $\omega'(x_o) = \omega_1'(x_o) \cap \omega_2'(x_o)$. $\omega'(x_o)$ er da en udprikket omegn om x_o, og der gælder:

$$x \in \omega'(x_o) \Rightarrow |f(x)\cdot g(x)-0| = |f(x)-0|\cdot|g(x)-0| < \sqrt{\varepsilon}\cdot\sqrt{\varepsilon} = \varepsilon$$

dvs. $\quad x \in \omega'(x_o) \Rightarrow |f(x)\cdot g(x)-0| < \varepsilon$

hvormed det ønskede er bevist.

<u>Ad b):</u> Vi ser herefter på den anden situation, hvor $a \neq 0$ og $b = 0$. Vi skal da vise, at der findes en udprikket omegn $\omega'(x_o)$ om x_o som har den egenskab, at hvis $x \in \omega'(x_o)$ så er $|f(x)\cdot g(x)-0| < \varepsilon$.

Vi omskriver først på $|f(x)\cdot g(x)-0|$. Ifølge regnereglen $|p\cdot q| = |p|\cdot|q|$ får vi:

$$|f(x)\cdot g(x)-0| = |f(x)\cdot g(x)| = |f(x)|\cdot|g(x)| = |f(x)|\cdot|g(x)-0|$$

Hvis $a > 0$, så findes der ifølge definition A.2.1 en udprikket omegn $\omega_1'(x_o)$ om x_o med den egenskab, at hvis $x \in \omega_1'(x_o)$, så er $f(x) \in \left]\frac{a}{2};\frac{3a}{2}\right[$ (idet $\left]\frac{a}{2};\frac{3a}{2}\right[$ er en omegn om a). Hermed ses specielt, at $0 < \frac{a}{2} < f(x) < \frac{3a}{2}$, og dermed (idet både f(x) og a er positive), at: $|f(x)| < \frac{3\cdot|a|}{2}$

Hvis $a < 0$, så findes der ifølge definition A.2.1 en udprikket omegn $\omega_1'(x_o)$ om x_o med den egenskab, at hvis $x \in \omega_1'(x_o)$, så er $f(x) \in \left]\frac{3a}{2};\frac{a}{2}\right[$ (idet $\left]\frac{3a}{2};\frac{a}{2}\right[$ er en omegn om a). Hermed ses specielt, at $0 > \frac{a}{2} > f(x) > \frac{3a}{2}$, og dermed (idet både f(x) og a er negavive), at: $|f(x)| < \frac{3\cdot|a|}{2}$ (Overvej !)

Uanset fortegnet for a har vi altså en udprikket omegn $\omega_1'(x_o)$ om x_o med den egenskab, at:

$$x \in \omega_1'(x_o) \Rightarrow |f(x)| < \frac{3\cdot|a|}{2}$$

Betragt nu den omegn $\omega(0)$ om 0, der har radius lig med $\frac{2\cdot\varepsilon}{3\cdot|a|}$. Da $g(x) \to 0$ for $x \to x_o$ findes der ifølge definition A.2.1 en udprikket omegn $\omega_2'(x_o)$ om x_o med den egenskab, at:

$$x \in \omega_2'(x_o) \Rightarrow g(x) \in \omega(0) \quad \text{dvs.} \quad x \in \omega_2'(x_o) \Rightarrow |g(x)-0| < \frac{2\cdot\varepsilon}{3\cdot|a|}$$

Vi sætter nu $\omega'(x_o) = \omega_1'(x_o) \cap \omega_2'(x_o)$. $\omega'(x_o)$ er da en udprikket omegn om x_o, og der gælder:

$$x \in \omega'(x_o) \Rightarrow |f(x)\cdot g(x)-0| = |f(x)|\cdot|g(x)-0| < \frac{3\cdot|a|}{2}\cdot\frac{2\cdot\varepsilon}{3\cdot|a|} = \varepsilon$$

dvs. $\quad x \in \omega'(x_o) \Rightarrow |f(x)\cdot g(x)-0| < \varepsilon$

hvormed det ønskede er bevist.

<u>Ad c):</u> Beviset for dette tilfælde forløber fuldstændigt på samme måde som ad b), idet f(x) og g(x) hhv. a og b optræder symmetrisk (ligeværdigt) i pkt. 3 i sætningen. Opskrivningen af beviset overlades til den ihærdige læser.

<u>Ad d):</u>
Endelig ser vi på den situation, hvor: $a \neq 0 \ \wedge \ b \neq 0$. Vi skal da vise, at der findes en udprikket omegn $\omega'(x_o)$ om x_o som har den egenskab, at hvis $x \in \omega'(x_o)$ så er $\left|f(x)\cdot g(x) - a\cdot b\right| < \varepsilon$.

Vi omskriver først på $\left|f(x)\cdot g(x) - a\cdot b\right|$, hvor vi dels indskyder leddene $-f(x)\cdot b + f(x)\cdot b$, som i alt er lig med 0, dels anvender regnereglerne $\left|p\cdot q\right| = \left|p\right|\cdot\left|q\right|$ og $\left|p+q\right| \leq \left|p\right| + \left|q\right|$. Vi får da:

$$\left|f(x)\cdot g(x) - a\cdot b\right| = \left|f(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot b + f(x)\cdot b - a\cdot b\right| = \left|f(x)\cdot(g(x)-b) + b\cdot(f(x)-a)\right|$$
$$\leq \left|f(x)\right|\cdot\left|g(x)-b\right| + \left|b\right|\cdot\left|f(x)-a\right|$$

På samme måde som i ad b) kan vi finde en udprikket omegn $\omega_1'(x_o)$ om x_o med den egenskab, at:
$$x \in \omega_1'(x_o) \ \Rightarrow \ \left|f(x)\right| < \tfrac{3\cdot|a|}{2}$$
Betragt nu den omegn $\omega(b)$ om b, der har radius lig med $\tfrac{\varepsilon}{3\cdot|a|}$. Da $g(x) \to b$ for $x \to x_o$ findes der ifølge definition A.2.1 en udprikket omegn $\omega_2'(x_o)$ om x_o med den egenskab, at:
$$x \in \omega_2'(x_o) \ \Rightarrow \ g(x) \in \omega(b) \quad \text{dvs.} \quad x \in \omega_2'(x_o) \ \Rightarrow \ \left|g(x)-b\right| < \tfrac{\varepsilon}{3\cdot|a|}$$
Betragt endelig den omegn $\omega(a)$ om a, der har radius lig med $\tfrac{\varepsilon}{2\cdot|b|}$. Da $f(x) \to a$ for $x \to x_o$ findes der ifølge definition A.2.1 en udprikket omegn $\omega_3'(x_o)$ om x_o med den egenskab, at:
$$x \in \omega_3'(x_o) \ \Rightarrow \ f(x) \in \omega(a) \quad \text{dvs.} \quad x \in \omega_3'(x_o) \ \Rightarrow \ \left|f(x)-a\right| < \tfrac{\varepsilon}{2\cdot|b|}$$

Vi sætter nu $\omega'(x_o) = \omega_1'(x_o) \cap \omega_2'(x_o) \cap \omega_3'(x_o)$. $\omega'(x_o)$ er da en udprikket omegn om x_o, og der gælder:
$$x \in \omega'(x_o) \ \Rightarrow \ \left|f(x)\cdot g(x) - a\cdot b\right| \leq \left|f(x)\right|\cdot\left|g(x)-b\right| + \left|b\right|\cdot\left|f(x)-a\right| < \tfrac{3\cdot|a|}{2}\cdot\tfrac{\varepsilon}{3\cdot|a|} + \left|b\right|\cdot\tfrac{\varepsilon}{2\cdot|b|} = \varepsilon$$
dvs. $\quad x \in \omega'(x_o) \ \Rightarrow \ \left|f(x)\cdot g(x) - a\cdot b\right| < \varepsilon$

hvormed det ønskede er bevist.

<u>Ad 4):</u>
Denne regel følger af det faktum, at det om funktionen $h(x) = k$ gælder, at $h(x) \to k$ for $x \to x_o$, hvormed vi i pkt. 3) kan lade $g(x) = h(x)$, og det ønskede opnås.

<u>Ad 5):</u>
Vi skal altså vise, at hvis: $f(x) \to a$ for $x \to x_o$ og $g(x) \to b$ for $x \to x_o$, hvor $b \neq 0$, så gælder der, at: $\dfrac{f(x)}{g(x)} \to \dfrac{a}{b}$ for $x \to x_o$.

Da $\dfrac{f(x)}{g(x)} = f(x)\cdot\dfrac{1}{g(x)}$, er det imidlertid nok at vise, at $\dfrac{1}{g(x)} \to \dfrac{1}{b}$ for $x \to x_o$, idet vi da får det ønskede resultat v.hj.a. produktreglen i pkt. 3). (Overvej !!).

Vi skal altså vise, at: $\dfrac{1}{g(x)} \to \dfrac{1}{b}$ for $x \to x_o$

Ifølge definition A.2.1 betyder dette, at vi skal vise følgende:

$$\forall\ \omega(\tfrac{1}{b})\ \exists\ \omega'(x_o):\ x \in \omega'(x_o) \ \Rightarrow\ \frac{1}{g(x)} \in \omega(\tfrac{1}{b})$$

At noget gælder for <u>enhver</u> omegn om $\frac{1}{b}$ klares bevisteknisk ved at vælge en <u>tilfældig</u> omegn $\omega(\frac{1}{b})$ om $\frac{1}{b}$, og så vise, at det ønskede gælder for denne omegn.

Vi vælger altså en tilfældig omegn $\omega(\frac{1}{b})$ om $\frac{1}{b}$, og vi vil så vise, at der svarende til denne findes en udprikket omegn $\omega'(x_o)$ om x_o som har den egenskab, at hvis $x \in \omega'(x_o)$, så er $\frac{1}{g(x)} \in \omega(\frac{1}{b})$.

Lad radius af den tilfældigt valgte omegn $\omega(\frac{1}{b})$ om $\frac{1}{b}$ være ε. Vi skal da vise, at der findes en udprikket omegn $\omega'(x_o)$ om x_o som har den egenskab, at hvis $x \in \omega'(x_o)$ så er $\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{b}\right| < \varepsilon$, dvs. at afstanden mellem $\frac{1}{g(x)}$ og $\frac{1}{b}$ er mindre end radius ε (Overvej !).

Da $b \neq 0$ har vi enten, at $b > 0$ eller $b < 0$. Vi antager først, at $b > 0$.

Vi vil først sikre os, at vi kan indskrænke os til at se på positive funktionsværdier for g(x):
Da $g(x) \to b$ for $x \to x_o$ og da $b > 0$, findes ifølge definition A.2.1 en udprikket omegn $\omega_1'(x_o)$, så $x \in \omega_1'(x_o) \ \Rightarrow\ g(x) \in \left]\frac{b}{2};\frac{3b}{2}\right[$ (idet $\left]\frac{b}{2};\frac{3b}{2}\right[$ er en omegn om b).

I det følgende vil vi kun se på $x \in \omega_1'(x_o)$, hvormed vi får, at $g(x) > \frac{b}{2} > 0$.
Da både g(x) og b er positive, kan $g(x) > \frac{b}{2} > 0$ omskrives til: $0 < \frac{1}{g(x)} < \frac{2}{b}$ (kontrollér !).

For at finde frem til, hvordan $\omega'(x_o)$ skal fastlægges, vil vi prøve at regne på $\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{b}\right|$. Vi har:

$$\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{b}\right| = \left|\frac{b - g(x)}{g(x)\cdot b}\right| = \frac{1}{g(x)}\cdot\frac{1}{b}\cdot\left|b - g(x)\right| < \frac{2}{b^2}\cdot\left|b - g(x)\right|$$

hvor vi har brugt regnereglen $|p\cdot q| = |p|\cdot|q|$, samt at $\frac{1}{g(x)}$ og $\frac{1}{b}$ er positive, og at $\frac{1}{g(x)} < \frac{2}{b}$.

Betragt nu tallet $\frac{\varepsilon\cdot b^2}{2}$. Dette er et positivt tal, og det kan derfor bruges som radius i en omegn. Lad ω(b) være en omegn om b med denne radius. Da $g(x) \to b$ for $x \to x_o$, findes der ifølge definition A.2.1 en udprikket omegn $\omega_2'(x_o)$ om x_o hvorom der gælder: $x \in \omega_2'(x_o) \ \Rightarrow\ g(x) \in \omega(b)$.
Men $g(x) \in \omega(b)$ betyder netop, at afstanden mellem b og g(x) er mindre end radius i omegnen, hvilket er det samme som at sige, at $\left|b - g(x)\right| < \frac{\varepsilon\cdot b^2}{2}$ (Overvej !!)

Hvis vi derfor sætter $\omega'(x_o) = \omega_1'(x_o) \cap \omega_2'(x_o)$, så får vi (overvej !):

$$x \in \omega'(x_o) \ \Rightarrow\ \left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{b}\right| < \frac{2}{b^2}\cdot\left|b - g(x)\right| < \frac{2}{b^2}\cdot\frac{\varepsilon\cdot b^2}{2} = \varepsilon, \quad \text{dvs:}$$

$$x \in \omega'(x_o) \ \Rightarrow\ \left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{b}\right| < \varepsilon$$

Vi ser altså, at den udprikkede omegn $\omega'(x_o)$ har de ønskede egenskaber, hvormed det ønskede er bevist, når $b > 0$.

Vi antager nu, at $b < 0$.

Vi vil først sikre os, at vi kan indskrænke os til at se på negative funktionsværdier for $g(x)$:
Da $g(x) \to b$ for $x \to x_o$ og da $b < 0$, findes ifølge definition A.2.1 en udprikket omegn $\omega_1'(x_o)$, så $x \in \omega_1'(x_o) \Rightarrow g(x) \in \left]\frac{3b}{2};\frac{b}{2}\right[$ (idet $\left]\frac{3b}{2};\frac{b}{2}\right[$ er en omegn om b).
I det følgende vil vi kun se på $x \in \omega_1'(x_o)$, hvormed vi får, at $g(x) < \frac{b}{2} < 0$.
Da både $g(x)$ og b er negative, kan $g(x) < \frac{b}{2} < 0$ omskrives til: $\frac{2}{b} < \frac{1}{g(x)} < 0$ (kontrollér !).

For at finde frem til, hvordan $\omega'(x_o)$ skal fastlægges, vil vi prøve at regne på $\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{b}\right|$. Vi har:

$$\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{b}\right| = \left|\frac{b - g(x)}{g(x) \cdot b}\right| = \frac{1}{g(x)} \cdot \frac{1}{b} \cdot |b - g(x)| < \frac{2}{b^2} \cdot |b - g(x)|$$

hvor vi har brugt regnereglen $|p \cdot q| = |p| \cdot |q|$, samt at:

$\frac{1}{g(x)} \cdot \frac{1}{b}$ er positiv, idet $\frac{1}{g(x)}$ og $\frac{1}{b}$ er negative,

$\frac{1}{g(x)} > \frac{2}{b} \Rightarrow \frac{1}{g(x)} \cdot \frac{1}{b} < \frac{1}{b^2}$, idet $\frac{1}{b}$ er negativ.

Betragt nu tallet $\frac{\varepsilon \cdot b^2}{2}$. Dette er et positivt tal, og det kan derfor bruges som radius i en omegn.
På samme måde som i tilfældet $b > 0$ kan vi finde en udprikket omegn $\omega_2'(x_o)$ om x_o hvorom der gælder: $x \in \omega_2'(x_o) \Rightarrow |b - g(x)| < \frac{\varepsilon \cdot b^2}{2}$

Hvis vi derfor sætter $\omega'(x_o) = \omega_1'(x_o) \cap \omega_2'(x_o)$, så får vi på samme måde som ved $b > 0$, at:

$$x \in \omega'(x_o) \Rightarrow \left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{b}\right| < \varepsilon$$

Vi ser altså, at den udprikkede omegn $\omega'(x_o)$ har de ønskede egenskaber, hvormed det ønskede er bevist, når $b < 0$.
Hermed er pkt. 5) bevist.

Hermed er sætning A.2.2 (= Sætning 2.11) bevist. ♥

Appendix 3: Sammensatte og omvendte funktioner.

Sammensatte funktioner:

Eksempel A.3.1.

Hvis vi betragter en funktion som: $h(x) = \sqrt{3x+9}$, så udregnes funktionsværdier for denne funktion ved først at udregne værdien af 3x + 9 , og derefter tage kvadratroden af denne værdi. Vi kan altså sige, at h(x) er "sammensat af" funktionerne f(x) = 3x + 9 og $g(x) = \sqrt{x}$.

Hvis vi omvendt ser på funktionerne: $f(x) = 2\sqrt{x}+5$ og $g(x) = x^2 + 3x$, så er det muligt at sammensætte disse to funktioner på følgende måde: Uanset hvilken x-værdi vi indsætter i f(x), så vil resultatet, dvs. $2\sqrt{x}+5$, være indeholdt i Dm(g), idet denne er lig med R. Det vil derfor være muligt at udregne g af f(x), dvs. g(f(x)).

Lad os f.eks. prøve med x = 9. Vi får da: $f(9) = 2\sqrt{9}+5 = 11$. Da $11 \in Dm(g)$, kan vi udregne $g(11) = 11^2 + 3\cdot 11 = 154$. Vi kan derfor skrive: 154 = g(11) = g(f(9)).

Lad os dernæst prøve med x = 7. Vi får da: $f(7) = 2\sqrt{7}+5$ (= 10,2915). Da $2\sqrt{7}+5 \in Dm(g)$, kan vi udregne $g(2\sqrt{7}+5) = (2\sqrt{7}+5)^2 + 3\cdot(2\sqrt{7}+5) = 68 + 26\sqrt{7}$ (= 136,79). Vi kan derfor skrive: $68 + 26\sqrt{7} = g(2\sqrt{7}+5) = g(f(7))$.

Vi ser, at når vi først har udregnet værdien af f(x), så indsættes denne værdi i stedet for den variable i funktionsforskriften for g, og der regnes ud. Funktionen g har den virkning på den variable, at den dels opløfter den variable i anden potens, dels ganger den med 3, og disse to størrelser lægges sammen. Lad os prøve generelt med et $x \in Dm(f)$. g(f(x)) kan udregnes på to (stort set ens) måder:

$$g(f(x)) = (f(x))^2 + 3\cdot f(x) = (2\sqrt{x}+5)^2 + 3\cdot(2\sqrt{x}+5) = 4x + 26\sqrt{x} + 40$$

eller

$$g(f(x)) = g(2\sqrt{x}+5) = (2\sqrt{x}+5)^2 + 3\cdot(2\sqrt{x}+5) = 4x + 26\sqrt{x} + 40$$

Vi ser altså, at funktionsudtrykket for den sammensatte funktion er: $g(f(x)) = 4x + 26\sqrt{x} + 40$

Læseren opfordres til at udregne g(f(9)) og g(f(7)) og sammenligne med det ovenstående. ♥

Eksempel A.3.2.

Hvis vi igen ser på funktionerne: f(x) = 3x + 9 og $g(x) = \sqrt{x}$, så er det muligt at udregne g(f(2)), idet $f(2) = 15 \geq 0$, og dermed er $f(2) \in Dm(g)$. Vi får: $g(f(2)) = g(15) = \sqrt{15}$ (= 3,873).

Det er derimod <u>ikke</u> muligt at udregne g(f(–5)), idet $f(-5) = -6 \notin Dm(g)$.

Vi ser, at definitionsmængden for g(f(x)) er mængden af $x \in Dm(f)$ som opfylder, at $f(x) \in Dm(g)$, dvs. $f(x) \geq 0$, hvilket betyder, at $x \geq -3$. ♥

Situationen i eksempel A.3.1 og A.3.2 kan generaliseres således:

Lad f og g være to givne funktioner, og lad $x \in Dm(f)$. Hvis $f(x) \in Dm(g)$, så kan vi finde g(f(x)):

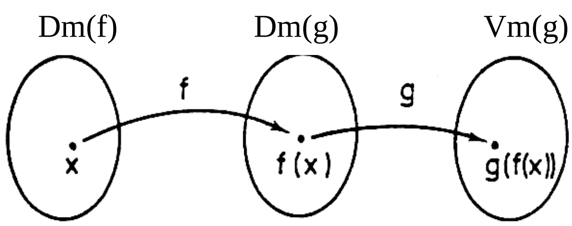


Fig. A.3.1

I denne forbindelse anføres følgende definition:

Definition A.3.3.

Lad f og g være to givne funktioner. Hvis der findes $x \in Dm(f)$, så $f(x) \in Dm(g)$, så defineres funktionen $g \circ f$ (læses: "g sammensat med f" eller blot: "g bolle f") på følgende måde (jfr. figur A.2.2)

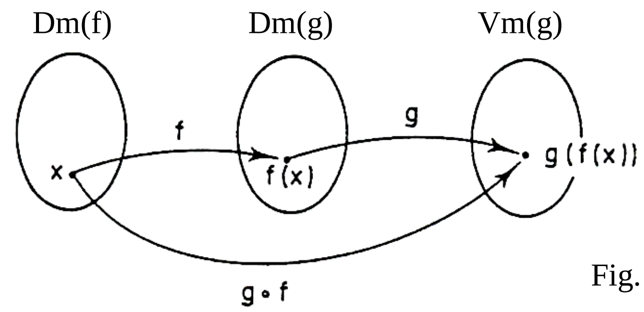


Fig. A.3.2

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) \quad \text{og} \quad Dm(g \circ f) = \{x \in Dm(f) \mid f(x) \in Dm(g)\}$$

Funktionen $g \circ f$ kaldes sammensætningen af f og g, og $g \circ f$ siges at være en sammensat funktion

Øvelse A.3.4.

Lad $f(x) = x^2 + 6$ og $g(x) = \frac{1}{2}x + 2$.

Vis at: $(g \circ f)(x) = \frac{1}{2}x^2 + 5$ og $(f \circ g)(x) = \frac{1}{4}x^2 + 2x + 10$. Bemærk, at $g \circ f \neq f \circ g$. ♥

Øvelse A.3.5.

Undersøg i hvert af følgende tilfælde, om vi kan danne $g \circ f$ eller $f \circ g$, og angiv i givet fald en funktionsforskrift for den/de sammensatte funktion(er). Husk definitionsmængden:

a) $f(x) = x - 3$ og $g(x) = 2x + 1$ b) $f(x) = \sqrt{x-7}$ og $g(x) = \frac{1}{2}x + 3$

c) $f(x) = \frac{1}{3}x$ og $g(x) = 3x$ d) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ og $g(x) = \sqrt{x+5}$

e) $f(x) = x^2 - 4$ og $g(x) = \dfrac{1}{x}$ f) $f(x) = -x^2 - 6$ og $g(x) = \sqrt{x+5}$ ♥

Som det fremgår af disse øvelser, gælder der almindeligvis, men ikke altid, at $g \circ f \neq f \circ g$.
I det følgende eksempel vil vi vise, hvordan mere end to funktioner kan sammensættes:

Eksempel A.3.6.

Lad $f(x) = x^3$, $g(x) = \sqrt{x} + 2$ og $h(x) = 5x - 10$. Hvis $x \geq 2$ er det muligt at udregne $f(g(h(x)))$:
$f(g(h(x))) = f(g(5x - 10)) = f(\sqrt{5x-10}+2) = (\sqrt{5x-10}+2)^3$.
Resultatet betegnes: $(f \circ g \circ h)(x)$, så vi har: $(f \circ g \circ h)(x) = (\sqrt{5x-10}+2)^3$, $x \geq 2$.
Det overlades som en øvelse til læseren at bestemme et udtryk for: $(g \circ f \circ h)(x)$ ♥

Øvelse A.3.7.
Angiv i hvert af følgende tilfælde funktionsforskrifter for to funktioner f og g, som opfylder, at:
a) $(f \circ g)(q) = \sqrt{q^2 + 7}$ b) $(f \circ g)(v) = (v^2 + 3)^2$
Angiv funktionsforskrifter for fire funktioner f, g, h og j, som opfylder, at:
c) $(f \circ g \circ h \circ j)(x) = (\sqrt{x^2 + 2} - 5)^4$ ♥

Øvelse A.3.8.
Lad $f(x) = \dfrac{1}{x+4}$, $g(x) = x^2 - 1$, $h(x) = 8x + 6$ og $j(x) = \sqrt{x+2}$
Bestem funktionsforskrifterne for funktionerne: $g \circ j \circ h$, $j \circ h \circ g$ og $j \circ f \circ g \circ h$ ♥

Omvendte funktioner:

Lad os, inden vi overhovedet får fortalt, hvad man forstår ved en omvendt funktion, starte med at slå fast, at der <u>intet mystisk er ved omvendte funktioner</u> ! Anvendelse af ordet "omvendt" er en <u>relativ ting</u>, idet en funktion under visse omstændigheder kan kaldes en omvendt funktion <u>til en anden allerede givet funktion</u> !
Hvis vi ser på så fredelige funktioner som $g(x) = \frac{1}{2}x + 3$ og $h(x) = \sqrt{x}$, så tænker man vel <u>ikke</u> straks på, at de er "omvendte". Men som vi skal se, er dette ikke desto mindre tilfældet: g er omvendt funktion til $f(x) = 2x - 6$, og h er omvendt funktion til $f(x) = x^2$, $x \geq 0$.

Vi skal først have begrebet en injektiv funktion defineret:

Definition A.3.9.

En funktion f siges at være injektiv, hvis der for <u>ethvert</u> $y \in$ Vm(f) findes <u>netop ét</u> $x \in$ Dm(f), så $f(x) = y$.

Det overlades til læseren at lave en figur af grafen for en funktion f, som ikke er injektiv og grafen af en funktion g, som er injektiv.
Det overlades også til læseren at overveje, at en injektiv funktion f er det samme som en funktion med følgende egenskab: For alle x_1 , $x_2 \in$ Dm(f): $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.
Endelig overlades det til læseren at argumentere for, at <u>en monoton funktion er injektiv.</u>

Hvis vi et øjeblik vender opmærksomheden mod den grundlæggende definition af en funktion, så siger den som bekendt, at man har en funktion g fra en mængde A ind i en mængde B, hvis der til ethvert element i A ved g tilordnes netop ét element i B. Og hvis vi derefter vender blikket mod den ovenstående definition af en injektiv funktion, så har vi netop denne situation, idet der til ethvert element $y \in$ Vm(f) (= A) svarer netop ét $x \in$ Dm(f) (= B). (x er bestemt ved, at $f(x) = y$).

Vi kan derfor anføre følgende definition:

Definition A.3.10.
Hvis f er en injektiv funktion, så har vi samtidig en funktion fra Vm(f) ind i Dm(f). Denne funktion kaldes den omvendte funktion til f og betegnes f^{-1}. Og der gælder, at:

$$f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow y = f(x)$$

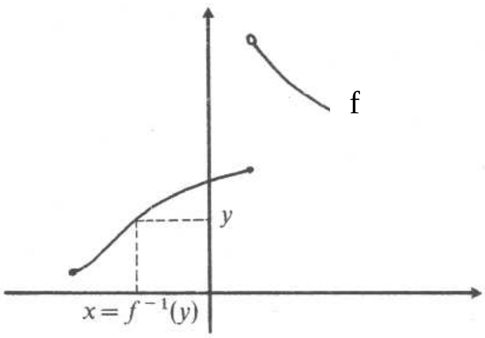


Fig. A.3.3

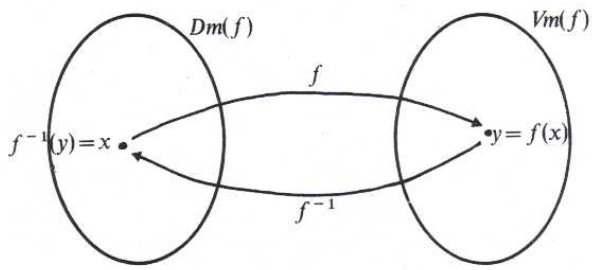


Fig. A.3.4

Indholdet i definition A.3.10 kan illustreres som vist på figur A.3.3 og A.3.4, hvor figur A.3.4 er af mere skematisk karaktér.

Vi bemærker, at: $\boxed{\mathrm{Dm}(f^{-1}) = \mathrm{Vm}(f) \text{ og } \mathrm{Vm}(f^{-1}) = \mathrm{Dm}(f).}$

Selve betegnelsen f^{-1} er vel ikke den mest heldige, idet den måske kan forlede nogen til at tro, at -1 i f^{-1} har samme betydning som i f.eks. 5^{-1}, hvilket på ingen måde er tilfældet.
Betegnelsen f^{-1} stammer fra en matematisk disciplin (teoretisk algebra), som vi ikke skal komme ind på hér. Det vigtige er imidlertid, at betegnelsen er knyttet til f, idet der er tale om den omvendte funktion til f, altså – som omtalt ovenfor – et relativt begreb til en allerede given størrelse/funktion. (Man kunne i princippet have betegnet funktionen med $[f]$, $\langle f \rangle$, $\overleftrightarrow{f}$ eller andet, der indeholder f, men valget er altså af forskellige årsager faldet på betegnelsen: f^{-1}).

Eksempel A.3.11.

a) Vi vil finde den omvendte funktion til f(x) = 2x – 6. Dette er muligt, idet f er voksende og dermed injektiv. Ifølge definition A.3.10 har vi:

$$f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow y = f(x) \Leftrightarrow y = 2x - 6 \Leftrightarrow y + 6 = 2x \Leftrightarrow x = \tfrac{1}{2}y + 3$$

dvs. $f^{-1}(y) = \frac{1}{2}y + 3$.

Som bekendt kan vi navngive de variable, som vi vil. Ofte vil ”man” gerne have x til at betegne den uafhængige variable. Hvis vi gør det, er forskriften for den omvendte funktion givet ved:

$$f^{-1}(x) = \tfrac{1}{2}x + 3.$$

b) Funktionen $f(x) = x^2$, $x \geq 0$, er voksende og dermed injektiv. (Bemærk, at forudsætningen $x \geq 0$ ikke kan undværes. (Hvorfor ikke ?)). Vi vil finde dens omvendte funktion: For $x \geq 0$ har vi:

$$f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow y = f(x) \Leftrightarrow y = x^2 \Leftrightarrow x = \sqrt{y} \quad ,$$

altså: $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$ eller: $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ ♥

<u>Eksempel A.3.12.</u>

Den omvendte funktion til $g(x) = \dfrac{1}{x+3}$, $x > -3$ findes på følgende måde: For $x > -3$ har vi:

$$g^{-1}(y) = x \Leftrightarrow y = g(x) \Leftrightarrow y = \frac{1}{x+3} \Leftrightarrow y\cdot(x+3) = 1 \Leftrightarrow x\cdot y = 1-3y \Leftrightarrow x = \frac{1-3y}{y}$$

dvs. $g^{-1}(y) = \dfrac{1-3y}{y}$

For at finde $Dm(g^{-1})$ bemærker vi først, at: $x > -3 \Leftrightarrow x+3 > 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{x+3} > 0 \Leftrightarrow y > 0$

Dernæst bemærkes, at for <u>enhver</u> værdi af $y > 0$ har ligningen: $y = g(x)$, dvs. $y = \dfrac{1}{x+3}$, en løsning, nemlig (som vi lige har set): $x = \dfrac{1-3y}{y}$. Vi ser således, at $Vm(g) = R_+$ og dermed, at $Dm(g^{-1}) = R_+$. Der gælder altså: $g^{-1}(y) = \dfrac{1-3y}{y}$, $y \in R_+$ ♥

<u>Øvelse A.3.13.</u>

Find en funktionsforskrift for den omvendte funktion i hvert af følgende tilfælde:

a) $g(q) = -2q-1$

b) $h(t) = \sqrt{t^2+2}$, $t \geq 0$

c) $f(x) = \dfrac{x}{2x-3}$, $x < \frac{3}{2}$

d) $\psi(\lambda) = \dfrac{1}{\lambda^2+3}$, $\lambda \geq 0$ ♥

<u>Øvelse A.3.14.</u>

Elværket Strømsvigt A/S opkræver af deres privatkunder en kvartalsafgift på 200 kr. plus 1,2 kr. pr. kWh (en energienhed), som kunderne forbruger.

a) Opstil en forskrift for den funktion, der for en privatkunde angiver elomkostningerne pr. kvartal som funktion af kundens energiforbrug.
b) Bestem det forbrug, som resulterer i en regning på 1500 kr. – og forklar, hvad dette har med omvendte funktioner at gøre.
c) Bestem en forskrift, inkl. definitionsmængde, for den omvendte funktion.
d) Løs pkt. b) igen – v.hj.a. forskriften for den omvendte funktion. ♥

I forlængelse af eksempel A.3.11 a), Øvelse A.3.13 a) og øvelse A.3.14 anføres følgende sætning:

<u>Sætning A.3.15.</u>

Lad $f(x) = ax + b$ være en lineær funktion, hvor $a \neq 0$.
Da er f injektiv, og

$$f^{-1}(y) = \frac{1}{a}\cdot y - \frac{b}{a} \quad , \quad y \in Vm(f)$$

dvs. f^{-1} er en lineær funktion med hældningskoefficient $\frac{1}{a}$.

Bevis:
At f er injektiv er allerede klargjort, idet f er monoton, når $a \neq 0$. Desuden har vi, at

$$f^{-1}(y) = x \iff y = f(x) \iff y = ax + b \iff y - b = ax \iff x = \frac{1}{a}\cdot y - \frac{b}{a}$$

hvoraf vi ser, at: $f^{-1}(y) = \frac{1}{a}\cdot y - \frac{b}{a}$. Hermed er sætningen bevist. ♥

Øvelse A.3.16.
I visse dele af verden (f.eks. i USA) angives temperaturer i ^{o}F (grader Fahrenheit), og i andre dele af verden (f.eks. i Danmark) angives temperaturer i ^{o}C (grader Celcius).
Temperaturen målt i ^{o}F er en funktion f af temperaturen x målt i ^{o}C, idet der gælder: $f(x) = \frac{9}{5}x + 32$.

a) Find en forskrift for den omvendte funktion, og udtryk i ord, hvad den beskriver.
b) Hvilken temperatur i ^{o}C svarer til temperaturen 451 ^{o}F ? ♥

Øvelse A.3.17.
Tegn i hvert af følgende tilfælde grafen for funktionen f og dens omvendte funktion f^{-1} i samme koordinatsystem, idet den variable for både f og f^{-1} betegnes x og afsættes ud af 1.aksen: f fra
a) øvelse A.3.16 b) øvelse A.3.14 c) eksempel A.3.11 a) d) eksempel A.3.11 b). ♥

Som det fremgår af øvelse A.3.17, er der en speciel sammenhæng mellem grafen for f og grafen for f^{-1}, når de tegnes i samme koordinatsystem, nemlig følgende sætning (hvis bevis udelades hér):

Sætning A.3.18.

Lad f være en injektiv funktion.
Hvis vi anvender et koordinatsystem med samme enhed på 1. og 2. aksen, så gælder, at:

grafen for f^{-1} fås ved at spejle grafen for f i linien y = x.

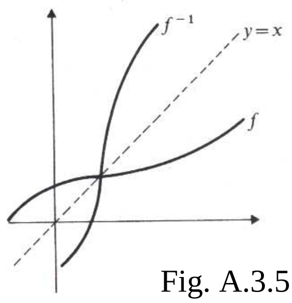


Fig. A.3.5

Som det fremgår af definition A.3.10 og figur A.3.4 gælder der følgende sætning (overvej !):

Sætning A.3.19.
Lad f være en injektiv funktion. Da gælder, at

$$f^{-1}(f(x)) = x \quad \text{for alle } x \in Dm(f) \qquad \text{og} \qquad f(f^{-1}(y)) = y \quad \text{for alle } y \in Vm(f)$$

hvilket også kan formuleres således:

$$(f^{-1} \circ f)(x) = x \quad \text{for alle } x \in Dm(f) \qquad \text{og} \qquad (f \circ f^{-1})(y) = y \quad \text{for alle } y \in Vm(f)$$

Funktionerne f og f^{-1} er altså hinandens omvendte funktioner (overvej !).

I forbindelse med monotoni gælder følgende sætning:

Sætning A.3.20.
Lad f være en given funktion.
1) Hvis f er voksende, så er f^{-1} også voksende
2) Hvis f er aftagende, så er f^{-1} også aftagende.

Bevis:
Vi beviser pkt. 1). Pkt. 2) vises på samme måde og overlades til læseren som en øvelse.
Lad da y_1 , $y_2 \in$ Vm(f) være vilkårligt valgt, så $y_1 < y_2$. Vi skal da vise, at $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$.
Dette gør vi ved et såkaldt indirekte bevis. Vi antager altså, at $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$ ikke gælder, og vil så argumentere for, at dette fører til en modstrid.
Vi antager derfor, at $f^{-1}(y_1) \geq f^{-1}(y_2)$. Da f er voksende får vi hermed at $f(f^{-1}(y_1)) \geq f(f^{-1}(y_2))$, dvs. $y_1 \geq y_2$. Men dette er i strid med, at vi ved, at $y_1 < y_2$.
Antagelsen $f^{-1}(y_1) \geq f^{-1}(y_2)$ er altså ikke holdbar, hvormed vi får det ønskede: $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$.
Hermed er sætningen bevist. ♥

Læseren opfordres til at efterprøve/kontrollere denne sætnings indhold ud fra de eksempler på omvendte funktioner, som har været omtalt i eksempler og øvelser i det ovenstående.

Appendix 4. Beviser for sætninger om kontinuerte funktioner.

Vi vil i dette appendix bevise Sætning 3.29 (som her får benævnelsen: Sætning A.4.1) og Sætning 3.36 (som her får benævnelsen Sætning A.4.3).

Sætning A.4.1.
Hvis f er kontinuert i et interval $[a;b]$, og hvis t er et tal imellem f(a) og f(b),
så findes der mindst ét tal $c \in \,]a;b[$, så $f(c) = t$,
hvormed der specielt gælder, at $t \in Vm(f)$.

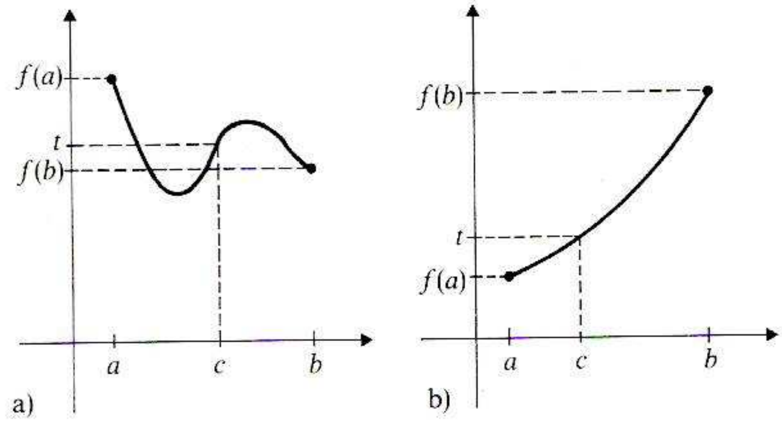


Fig. A.4.1

Bevis:
Hvis f(a) = f(b) er der ingenting at bevise. Vi forudsætter derfor, at $f(a) \neq f(b)$, og det betyder, at enten har vi $f(a) < f(b)$ eller $f(a) > f(b)$. Vi gennemfører beviset for situationen $f(a) > f(b)$, og overlader beviset for situationen $f(a) < f(b)$ til læseren (beviset forløber helt tilsvarende).
Vi vælger et vilkårligt tal t som opfylder, at $f(a) > t > f(b)$, og vi skal så vise, at der findes et tal $c \in \,]a;b[$, der opfylder, at $f(c) = t$.

Tallet c frembringes ved hjælp af en intervalruse (se Appendix 1), som konstrueres på særlig vis:
Kald midtpunktet af $[a;b]$ for x_1. (Se figur A.4.2 på næste side).
Hvis $f(x_1) = t$ er vi færdige, for vi kan da blot sætte $c = x_1$.
Hvis $f(x_1) \neq t$ har vi enten $f(x_1) < t$ eller $f(x_1) > t$. Hvis $f(x_1) < t$, vælger vi venstre intervalhalvdel $[a;x_1]$, og vi ser, at $f(a) > t > f(x_1)$. Og hvis $f(x_1) > t$ vælger vi højre intervalhalvdel $[x_1;b]$, og vi ser, at $f(x_1) > t > f(b)$. I begge tilfælde ser vi, at t er mindre end funktionsværdien i det nye intervals venstre endepunkt og større end funktionsværdien i det nye intervals højre endepunkt.

På denne måde fortsættes:
Vi finder midtpunktet x_n af det foregående interval (hvor n = 2, 3, 4, 5, ….). Hvis $f(x_n) = t$ er vi færdige, for vi kan da blot sætte $c = x_n$. Hvis $f(x_n) \neq t$ har vi enten $f(x_n) < t$ eller $f(x_n) > t$.
Hvis $f(x_n) < t$, vælges venstre intervalhalvdel, og hvis $f(x_n) > t$ vælges højre intervalhalvdel.
I begge tilfælde ser vi, at t er mindre end funktionsværdien i det nye intervals venstre endepunkt og større end funktionsværdien i det nye intervals højre endepunkt, idet dette gjaldt i det foregående interval.

På denne måde får vi enten en serie af intervaller, hvor funktionsværdien af midtpunktet i det sidst valgte interval er lig med t, hvormed det ønskede er opnået, og vi stopper halveringen. Eller også får vi en intervalruse $I_1, I_2, I_3, \dots\dots, I_n, \dots\dots$, hvor $I_1 = [a;b]$, og hvor der for hvert interval I_n gælder, at t er mindre end funktionsværdien i I_n's venstre endepunkt og større end funktionsværdien i I_n's højre endepunkt.
Ifølge Aksiom A.1.7 fastlægger denne intervalruse netop ét tal, som vi vil kalde c. Og vi vil nu bevise, at f(c) = t.

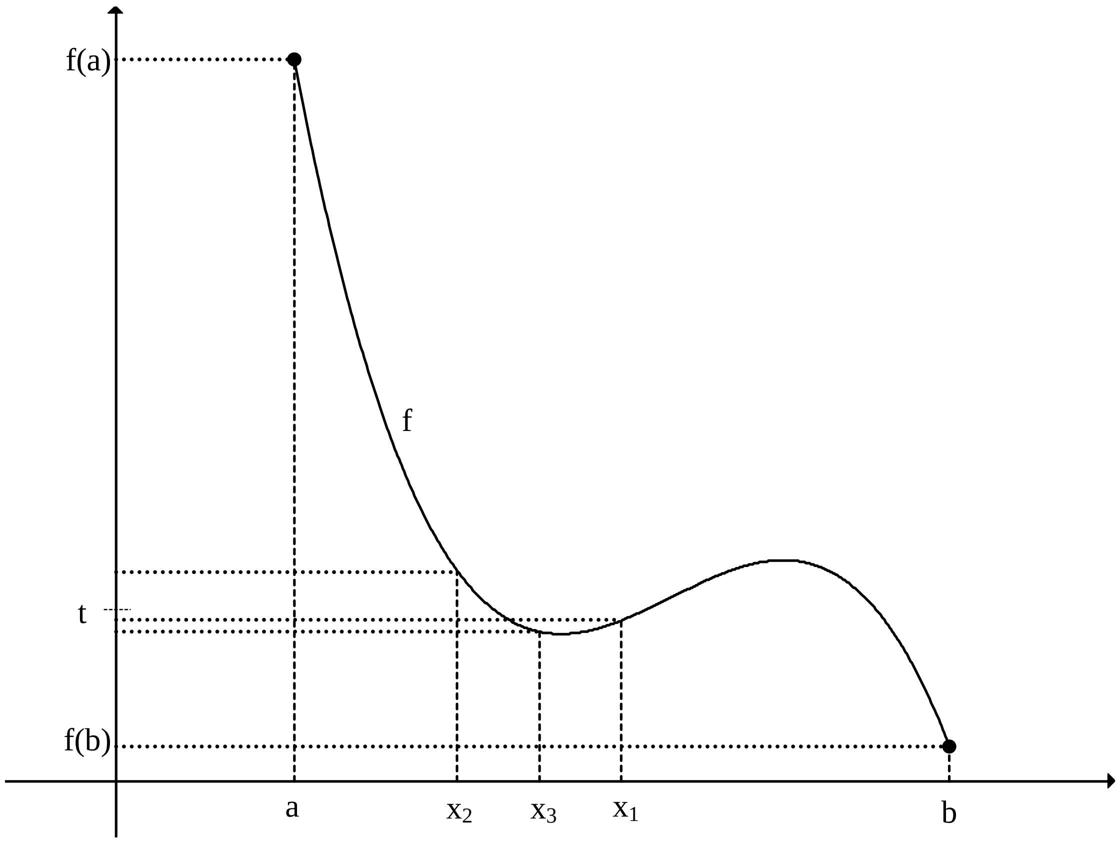


Fig. A.4.2

Vi fører et indirekte bevis, dvs. vi antager at $f(c) \neq t$ og viser derefter, at dette fører til en modstrid. Antag altså, at $f(c) \neq t$. Vi har da enten, at $f(c) < t$ eller $f(c) > t$. Vi antager, at $f(c) > t$. (Beviset for muligheden $f(c) < t$ forløber helt tilsvarende og overlades til læseren).
Lad $\omega(f(c))$ være en omegn om f(c), som <u>ikke</u> indeholder t. En sådan omegn er mulig at finde, da $f(c) > t$. Da f er kontinuert i interval $[a;b]$, er f specielt kontinuert i tallet c. Der findes derfor en omegn $\omega(c)$ om c med den egenskab, at: $x \in \omega(c) \Rightarrow f(x) \in \omega(f(c))$, og dermed specielt med den egenskab, at: $x \in \omega(c) \Rightarrow f(x) > t$.
Da intervalrusen fastlægger c, findes der et $m \in N$, hvorefter der gælder, at $I_n \subseteq \omega(c)$, når $n \geq m$ (overvej !). Lad p og q være endepunkterne af I_m, dvs. $I_m = [p;q]$. Da $I_m \subseteq \omega(c)$ har vi specielt, at $q \in \omega(c)$, hvilket (som vi netop har set) medfører, at $f(q) > t$. Og her har så modstriden, idet det om ethvert interval i rusen gælder, at funktionsværdien af højre intervalendepunkt er mindre end c.

Antagelsen $f(c) \neq t$ kan altså ikke gælde, hvormed vi får, at $f(c) = t$. Hermed er sætningen bevist. ♥

Inden vi kan bevise nedenstående Sætning A.4.3 (dvs. Sætning 3.36), skal vi indføre et par begreber, og bevise en hjælpesætning.

En talmængde A siges at være begrænset, hvis der findes to tal k og K, så $k \leq x \leq K$ for alle $x \in A$. Et tal som k, der er mindre end eller lig med alle tal i en talmængde A, kaldes et undertal for A, og et tal som K, der er større end eller lig med alle tal i en talmængde A, kaldes et overtal for A.

En funktion f siges at være begrænset, hvis dens værdimængde Vm(f) er en begrænset talmængde. En funktion f siges at være begrænset i et interval I, hvis mængden af funktionsværdier f(x), hvor $x \in I$, er en begrænset talmængde.

Der gælder nu følgende sætning, som skal bruges i beviset for sætning A.4.3:

Sætning A.4.2.
Hvis f er en kontinuert funktion defineret i et lukket, begrænset interval $[a;b]$, så er f begrænset.

Bevis:
Vi gennemfører et indirekte bevis, dvs. vi antager, at f ikke er begrænset, og skal så bevise, at denne antagelse fører til en modstrid.
Til dette formål vil vi ud fra $[a;b]$ konstruere en intervalruse på følgende måde:
Vi sætter $I_1 = [a;b]$, deler I_1 på midten og ser på de to delintervaller, dette giver. Da f ikke er begrænset i I_1, kan f ikke være begrænset i begge de to halve intervaller (overvej). Vi vælger en intervalhalvdel I_2, hvor f ikke er begrænset.
På samme måde deles I_2 i to halvdele, og da f ikke er begrænset i I_2, er der mindst én af de to halvdele, hvor f ikke er begrænset. Vi vælger en intervalhalvdel I_3, hvor f ikke er begrænset. Således fortsættes, hvormed vi får en intervalruse af intervaller, hvor f ikke er begrænset.
Denne intervalruse fastlægger ifølge Aksion A.1.7 ét tal $q \in [a;b]$. Der er nu to muligheder:

1) q er et indre punkt i $[a;b]$
2) q er et endepunkt, dvs. q = a eller q = b.

Vi ser først på mulighed 1):
Vi vælger en tilfældig omegn $\omega(f(q))$ om f(q), og lader ε betegne radius i denne omegn.
Da f er kontinuert i q, findes en omegn $\omega(q)$ om q, som opfylder, at:

$$x \in \omega(q) \Rightarrow f(x) \in \omega(f(q))$$

og dermed, at:

$$x \in \omega(q) \Rightarrow f(q) - \varepsilon < f(x) < f(q) + \varepsilon .$$

Da intervalrusen fastlægger q, findes der et $m \in N$, hvorefter der gælder, at $I_n \subseteq \omega(q)$, når $n \geq m$.
Specielt ser vi hermed, at: $x \in I_m \Rightarrow f(q) - \varepsilon < f(x) < f(q) + \varepsilon$, eller anderledes formuleret:

$$\forall x \in I_m : \; f(q) - \varepsilon < f(x) < f(q) + \varepsilon$$

Men dette betyder, at f er begrænset i I_m, hvilket er i strid med egenskaberne ved intervalrusen.
Antagelsen om, at f ikke er begrænset, kan altså ikke være rigtig, hvormed det ønskede er bevist.

Vi ser herefter på mulighed 2):
Vi ser på muligheden q = a, og overlader muligheden q = b til den interesserede læser.

Vi vælger en tilfældig omegn $\omega(f(a))$ om f(a), og lader ε betegne radius i denne omegn. Da f er kontinuert fra højre i a, findes en omegn $\omega_+(a)$ til højre for a, som opfylder, at:

$$x \in \omega_+(a) \vee x = a \;\Rightarrow\; f(x) \in \omega(f(a)) .$$

Hvis vi lader s betegne længden af $\omega_+(a)$, så kan dette også skrives (overvej !):

$$x \in [\,a;a+s\,[\;\Rightarrow f(x) \in \omega(f(a))$$

og dermed ser vi, at:

$$x \in [\,a;a+s\,[\;\Rightarrow\; f(a)-\varepsilon < f(x) < f(a)+\varepsilon .$$

Da intervalrusen fastlægger (snævres sammen om) q = a, findes der et $m \in N$, hvorefter der gælder, at $I_n \subseteq [\,a;a+s\,[$, når $n \geq m$.

Specielt ser vi hermed, at: $x \in I_m \;\Rightarrow\; f(a)-\varepsilon < f(x) < f(a)+\varepsilon$, eller anderledes formuleret:

$$\forall x \in I_m : \; f(a)-\varepsilon < f(x) < f(a)+\varepsilon$$

Men dette betyder, at f er begrænset i I_m, hvilket er i strid med egenskaberne ved intervalrusen. Antagelsen om, at f ikke er begrænset, kan altså ikke være rigtig, hvormed det ønskede er bevist. ♥

Vi er nu klar til at bevise følgende vigtige sætning:

Sætning A.4.3.

Lad f være en kontinuert funktion defineret i et lukket, begrænset interval $[a;b]$. Da gælder:

a) f(x) antager både en mindsteværdi (minimum) og en størsteværdi (maximum) i $[a;b]$.

b) Hvis $f(x_1)$ er mindsteværdien og $f(x_2)$ er størsteværdien, så er Vm(f) = $[f(x_1);f(x_2)]$, hvilket også kan udtrykkes således: Vm(f) = $[\min f(x);\max f(x)]$

Bevis:

Når først a) er bevist, følger b) umiddelbart af sætning A.4.1, idet et hvilket som helst tal imellem $f(x_1)$ og $f(x_2)$ ifølge A.4.1 er indeholdt i Vm(f). Da $f(x_1)$ er mindsteværdien, findes der ingen funktionsværdier mindre end $f(x_1)$, og da $f(x_2)$ er størsteværdien, findes der ingen funktionsværdier større end $f(x_2)$. I alt ses dermed, at Vm(f) = $[f(x_1);f(x_2)]$, hvormed sætningen vil være bevist.

Vi skal derfor bevise a). Beviset for eksistensen af minimum og af maksimum er næsten identisk, så vi medtager kun beviset for minimum her, og overlader beviset for maksimum til læseren.

Vi skal altså bevise, at hvis f er kontinuert i $[a;b]$, så har f et minimum i $[a;b]$.

Hvis f(a) $\leq$ f(x) for alle $x \in [a;b]$, så er f(a) minimum, hvormed det ønskede er opnået.

Vi ser herefter på den situation, hvor der findes et $s \in [a;b]$, som opfylder, at f(a) > f(s).

Da f ifølge sætning A.4.2 er begrænset, findes et tal k, så f(x) > k for alle $x \in [a;b]$, dvs. at k er et undertal for Vm(f).

Betragt nu intervallet I_1 = $[k;f(a)]$. Vi ser da, at venstre (”nederste”) endepunkt af intervallet er et undertal for Vm(f), hvorimod højre (”øverste”) endepunkt ikke er et undertal for Vm(f). (Ordene nederste og øverste hentyder til, at vi ser på intervaller på 2.aksen).

Betragt midtpunktet m af I_1. Hvis m er et undertal for Vm(f), så vælges højre (den "øverste") halvdel af I_1, og hvis m ikke er et undertal for Vm(f), så vælges venstre (den "nederste") halvdel af I_1.
I begge tilfælde får vi et interval I_2, hvor venstre endepunkt er et undertal for Vm(f) og hvor højre endepunkt ikke er et undertal for Vm(f).
Således fortsættes, og der dannes en intervalruse af intervaller med den egenskab, at venstre ("nederste") endepunkt er et undertal for Vm(f), hvorimod højre ("øverste") endepunkt ikke er det.
Ifølge Aksiom A.1.7 fastlægger intervalrusen ét tal, som vi vil benævne p.

Vi vil nu bevise, at p = $\min f(x)$.
Dette gøres i tre trin:

1) Vi beviser, at p er det <u>største</u> undertal for Vm(f)
2) Vi beviser, at <u>hvis</u> $p \in$ Vm(f), så er p den mindste funktionsværdi (og dermed vil det ønskede være opnået)
3) Vi beviser, at $p \in$ Vm(f).

<u>Ad 1):</u> Vi laver et indirekte bevis. Vi antager altså, at p ikke er det største undertal for Vm(f), dvs. at der findes et tal q > p, som er et undertal for Vm(f). Da p er fastlagt af intervalrusen, og da længden af intervallerne i rusen går mod 0, findes der et $m \in N$ hvorefter der gælder, at $q \notin I_n$ for $n \geq m$. Dette betyder specielt, at q er større end alle tal i I_m, hvilket specielt betyder, at q er større end højre endepunkt af I_m. Men da dette højre endepunkt <u>ikke</u> er et undertal for Vm(f), hvorimod det <u>større</u> tal q er antaget at være et undertal for Vm(f), har vi fået en modstrid.
Antagelsen om, at p ikke er det største undertal for Vm(f) fører altså til en modstrid, hvormed denne antagelse ikke kan være korrekt. p er altså det største undertal for Vm(f), og hermed er 1) bevist.

<u>Ad 2):</u> Hvis vi kan bevise (se pkt. 3), at $p \in$ Vm(f), så må p være den <u>mindste</u> funktionsværdi. Dette indses ved at tænke på, at da p ifølge pkt. 1) er et <u>undertal</u> (det største, men dog stadigvæk et undertal) for Vm(f), så kan der ikke være funktionsværdier, som er mindre end p.

<u>Ad 3):</u> For at afslutte beviset for sætning A.4.3 skal vi altså bevise, at $p \in$ Vm(f).
I et forsøg på at gøre beviset mere overskueligt indføres følgende notation: Hvis $A \subseteq [a;b]$, så er f(A) mængden af funktionsværdier, hvor x stammer fra A, altså: f(A) = $\{f(x) \mid x \in A\}$.
Ifølge punkt 1) er p det største undertal for f($[a;b]$). Hvis m er midtpunktet af intervallet $[a;b]$, så er p største undertal for f($[a;m]$) eller for f($[m;b]$), idet hvis der var et større undertal for begge disse mængder, så ville der også være et større undertal for f($[a;b]$), og det er ikke tilfældet.
Vi vælger en intervalhalvdel, hvor p er det største undertal for funktionsværdierne.
Ved at fortsætte på denne måde med successive halveringer får vi skabt en intervalruse J_1, J_2, ….. , hvor $J_1 = [a;b]$, og hvor det for hvert interval J_n gælder, at p er det største undertal for f(J_n).
Ifølge Aksiom A.1.7 bestemmer denne intervalruse ét tal $t \in [a;b]$.

Vi vil nu bevise, at f(t) = p (hvormed beviset for punkt 3) vil være tilendebragt).
Vi laver et indirekte bevis. Vi antager altså, at $f(t) \neq p$ og skal så bevise, at denne antagelse fører til en modstrid.
Da p er et undertal for Vm(f), giver forudsætningen $f(t) \neq p$ os, at $p < f(t)$ (overvej!).

Vi sætter $\varepsilon = \frac{f(t)-p}{2}$, dvs. ε er den halve afstand mellem p og f(t). Og vi lader ω(f(t)) være den omegn om f(t), der har radius ε.
Vi ser hermed specielt (overvej!), at det om alle tal $y \in \omega(f(t))$ gælder, at $y > p + \varepsilon$.
Der er nu to muligheder:

1) t er et indre punkt i $[a;b]$
2) t er et endepunkt, dvs. t = a eller t = b.

Vi ser først på mulighed 1):
Da f er kontinuert i t, findes der en omegn ω(t) om t, så der gælder, at: $x \in \omega(t) \Rightarrow f(x) \in \omega(f(t))$ og dermed, at:

$$x \in \omega(t) \Rightarrow f(x) > p + \varepsilon$$

Da intervalrusen fastlægger t, findes der et $m \in N$, hvorefter der gælder, at $J_n \subseteq \omega(t)$, når $n \geq m$.
Specielt ser vi hermed, at: $x \in J_m \;\Rightarrow\; f(x) > p + \varepsilon$, eller anderledes formuleret:

$$\forall x \in J_m : \;\; f(x) > p + \varepsilon$$

Men dette betyder, at p + ε er et undertal for $f(J_m)$, og da ε > 0, er p + ε > p, hvormed p ikke er det største undertal for $f(J_m)$, hvilket er i strid med egenskaberne ved intervalrusen.
Antagelsen om, at $f(t) \neq p$ kan altså ikke være rigtig, hvormed det ønskede er bevist.

Ved mulighed 2), hvor t er et af endepunkterne for intervallet $[a;b]$, opnås en modstrid på samme måde, idet vi benytter at f er kontinuert fra højre i a hhv. fra venstre i b.
Detaljerne overlades til den interesserede læser, som kan finde inspiration hertil i dels arbejdet med mulighed 1), dels i slutningen af beviset for sætning A.4.2.

Hermed er sætning A.4.3 bevist. ♥

Appendix 5. Lokale og globale extrema.

Lad os betragte funktionen f, hvis graf ses på den følgende figur A.5.1.

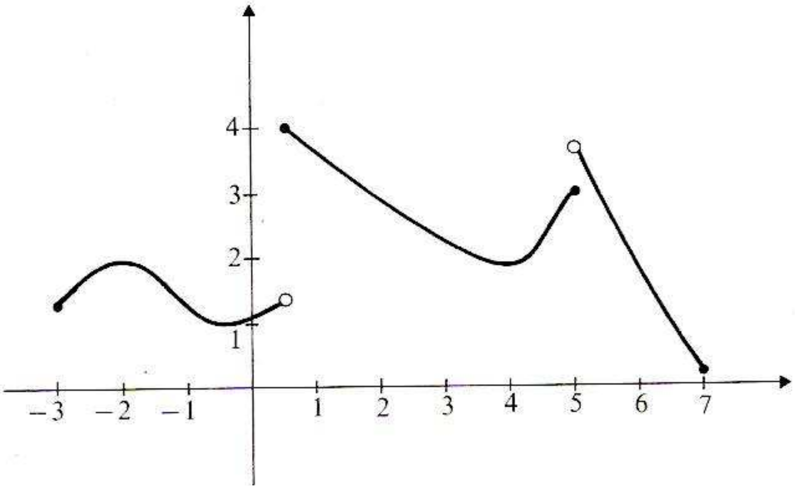


Fig. A.5.1

Af denne figur ses, at hvis vi er "i nærheden af" –2, så vil f(–2) være den største funktionsværdi. Hvis vi f.eks. betragter intervallet $\omega(-2) = \left]-2{,}5;-1{,}5\right[$ (som er en omegn om –2), så vil der gælde, at $f(-2) \geq f(x)$ for alle $x \in \omega(-2)$. Vi vil derfor sige, at der er lokalt maximum i –2.

Til beskrivelse af sådanne situationer giver vi følgende definition:

<u>Definition A.5.1.</u>
Lad f være en given funktion, og lad $x_o \in \mathrm{Dm}(f)$.

Hvis der findes en omegn $\omega(x_o)$ om x_o, så

$$f(x_o) \geq f(x) \quad \text{for alle } x \in \omega(x_o) \cap \mathrm{Dm}(f)$$

så siger vi, at f har <u>lokalt maximum</u> i x_o.

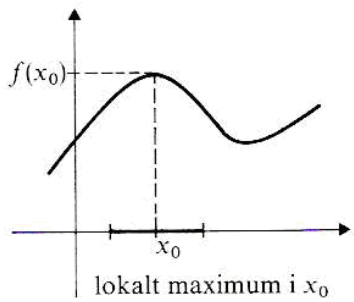


Fig. A.5.2

Hvis der findes en omegn $\omega(x_o)$ om x_o, så

$$f(x_o) \leq f(x) \quad \text{for alle } x \in \omega(x_o) \cap \mathrm{Dm}(f)$$

så siger vi, at f har <u>lokalt minimum</u> i x_o.

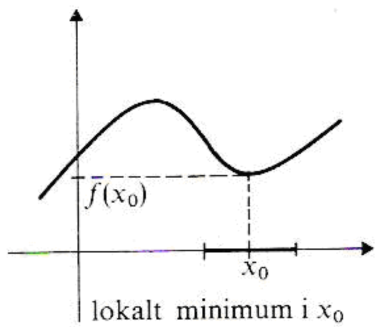


Fig. A.5.3

Som en fælles betegnelse for ordene maximum og minimum anvendes ordet extremum, hvorfor vi i de ovenstående situationer kan anvende betegnelse: <u>lokalt extremum</u>.

Bemærk sprogbrugen i forbindelse med extrema og dermed også ved lokale exktrema:

- Det lokale extremum antages i x_o (extremums-sted)
- Det lokale extremum er $f(x_o)$ (extremums-værdi)

Bemærk, at vi i definitionen af lokalt extremum kræver, at $x \in \omega(x_o) \cap Dm(f)$. At Dm(f) medtages har normalt kun betydning, når den omegn, der skal eksistere omkring x_o, ikke "kan være" indenfor Dm(f), hvilket f.eks. vil ske, hvis x_o er et intervalendepunkt i definitionsmængden.
På ovenstående figur A.5.1 er der således lokalt minimum i 7, idet vi f.eks. kan betragte omegnen $\omega(7) = \left]6;8\right[$, hvorom der gælder, at for alle $x \in \omega(7) \cap Dm(f)$, dvs. for alle $x \in \left]6;7\right]$ har vi, at $f(7) \le f(x)$.

Bemærk, at hvis en funktion f har en størsteværdi (et maximum), som antages i et punkt x_o, så har funktionen også lokalt maximum i x_o. (Dette skyldes, at hvis $f(x_o) \ge f(x)$ for alle $x \in Dm(f)$, så gælder dette specielt for alle $x \in \omega(x_o) \cap Dm(f)$ uanset hvilken omegn $\omega(x_o)$ om x_o vi betragter).
Da en funktion kan have mange forskellige lokale maxima, kaldes størsteværdien ofte for globalt maximum. Funktionen på figur A.5.1 har altså globalt maximum i $\frac{1}{2}$, (og det globale maximum er 4).
Tilsvarende ser vi, at hvis en funktion har en mindsteværdi (et minimum), som antages i et punkt x_o, så har funktionen også lokalt minimum i x_o. Mindsteværdien kaldes ofte for globalt minimum.
Funktionen på figur A.5.1 har altså globalt minimum i 7, (og det globale minimum er (ca.) 0,2).

Eksempel A.5.2.
Funktionen på figur A.5.1 har følgende lokale extrema (extremumssteder):

Lokalt minimum i –3	Lokalt maximum i –2
Lokalt minimum i $-\frac{1}{2}$	Lokalt maximum i $\frac{1}{2}$
Lokalt minimum i 4	Lokalt minimum i 7

Funktionen har ikke lokalt maximum i 5, idet f(5) = 3, og f antager funktionsværdier større end 3 uanset hvilken omegn om 5, vi betragter. (Disse værdier antages "lige til højre" for 5). ♥

Øvelse A.5.3.
Angiv samtlige lokale extremumsteder og tilhørende lokale extremumsværdier for følgende funktion:

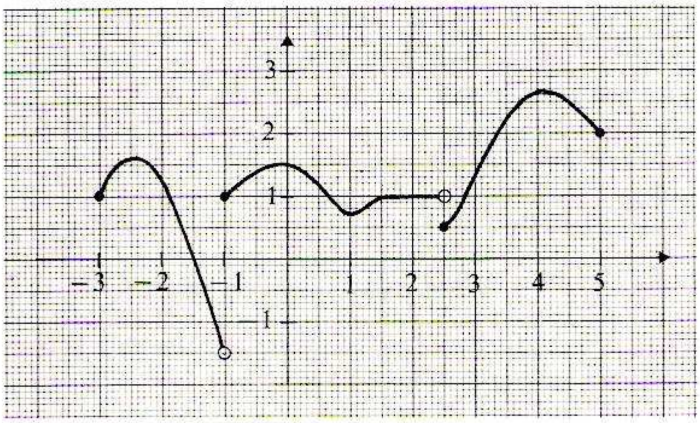


Fig. A.5.4

Har funktionen et globalt maximum ? Har funktionen et globalt minimum ? ♥

Appendix 6. Differentiation af specialfunktioner.

Differentiation af trigonometriske funktioner.

Når vi ser på differentiation af trigonometriske funktioner, skal de variable være reelle tal.
Det betyder bl.a., at i problemstillinger, hvortil der anvendes differentiation af de trigonometriske funktioner, angives eventuelle vinkler som reelle tal, dvs. i radianer !! (Så kan man altid, hvis det er relevant og ønskes, omregne det endelige resultat til grader).

Sætning A.6.1.

Funktionerne sin og cos er differentiable overalt, og der gælder:

$$\sin'(x_o) = \cos x_o \quad \text{og} \quad \cos'(x_o) = -\sin x_o$$

Eksempel A.6.2.
Vi vil bestemme differentialkvotienten $g'(x)$ for funktionen: $g(x) = \cos^2 x \cdot \sin 2x$.
Ud fra reglen om differentiation af et produkt får vi:

$$g'(x) = (\cos^2 x)' \cdot \sin 2x + \cos^2 x \cdot (\sin 2x)'$$

Funktionen $\cos^2 x$ er sammensat af funktionerne x^2 og $\cos x$. Vi får dermed:

$$(\cos^2 x)' = 2\cos x \cdot (\cos x)' = 2\cos x \cdot (-\sin x)$$

Funktionen $\sin 2x$ er sammensat af funktionerne $\sin x$ og $2x$. Dette giver os:

$$(\sin 2x)' = \cos 2x \cdot (2x)' = \cos 2x \cdot 2$$

Ved hjælp af omregningsformlerne for $\sin 2x$ og $\cos 2x$, ser vi alt i alt, at

$$\begin{aligned} g'(x) &= -2\cos x \cdot \sin x \cdot \sin 2x + \cos^2 x \cdot 2 \cdot \cos 2x \\ &= -2\cos x \cdot \sin x \cdot 2\cos x \cdot \sin x + \cos^2 x \cdot 2 \cdot (1 - 2\sin^2 x) \\ &= -4\cos^2 x \cdot \sin^2 x + \cos^2 x \cdot (2 - 4\sin^2 x) \\ &= \cos^2 x \cdot (-4\sin^2 x + 2 - 4\sin^2 x) \\ &= \cos^2 x \cdot (2 - 8\sin^2 x) \end{aligned}$$

Resultatet er altså: $g'(x) = \cos^2 x \cdot (2 - 8\sin^2 x)$ ♥

Øvelse A.6.3.
Find differentialkvotienten af følgende funktioner:

a) $f(x) = \cos(3x + 7)$ b) $f(x) = x^3 \cdot \sin x$ c) $f(x) = \dfrac{2\cos x + \sin x}{\sin x + 3}$ ♥

Vedrørende differentiation af tangens gælder der følgende sætning:

Sætning A.6.4.

Funktionen tangens er differentiabel, og der gælder:

$$\tan'(x_o) = 1 + \tan^2 x_o = \frac{1}{\cos^2 x_o} \quad , \quad x_o \neq \frac{\pi}{2} + p \cdot \pi, \quad p \in Z$$

Øvelse A.6.5.
Bevis sætning A.6.4 ud fra definitionen af tangens og v.hj.a. differentiationsreglen for brøker. ♥

Øvelse A.6.6.
Find differentialkvotienterne af følgende funktioner:

a) $f(x) = \tan^2 x$ b) $f(x) = \cos(2x) \cdot \tan x$ c) $\dfrac{\cos x + \sin x}{\tan x}$ ♥

Differentiation af logaritmefunktioner.

Sætning A.6.7.

1) Enhver logaritmefunktion er differentiabel
2) Den naturlige logaritmefunktion ln opfylder: $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$
3) En vilkårlig logaritmefunktion med grundtal c opfylder: $\log_c'(x) = \dfrac{1}{\ln c} \cdot \dfrac{1}{x}$

Sammenhængen mellem ln og $\log_c$ er givet ved: $\log_c(x) = \dfrac{1}{\ln c} \cdot \ln x$.
Da ln(2) = 0,69315 og ln(10) = 2,30259 ser vi dermed, at:

$$\log_2'(x) = \frac{1}{0{,}69315} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1{,}44270}{x}$$

og

$$\log'(x) = \frac{1}{2{,}30259} \cdot \frac{1}{x} = \frac{0{,}43429}{x}$$

Eksempel A.6.8.

Hvis $f(x) = \ln(x^2 + x^3)$, så er $f'(x) = \dfrac{1}{x^2 + x^3} \cdot (x^2 + x^3)' = \dfrac{2x + 3x^2}{x^2 + x^3} = \dfrac{2 + 3x}{x + x^2}$ ♥

Differentiation af eksponentialfunktioner.

Sætning A.6.9.

Funktionerne e^x , a^x og e^{kx} er differentiable, og der gælder følgende regler:

1) $(e^x)' = e^x$ 2) $(a^x)' = \ln a \cdot a^x$ 3) $(e^{kx})' = k \cdot e^{kx}$

Eksempel A.6.10.
Vi vil finde differentialkvotienterne af funktionerne:

a) $f(x) = 2 \cdot 4^x - 5 \cdot 2^x$ b) $g(x) = e^{-x^2}$ c) $h(x) = 3^{x+\sqrt{x}}$

Ad a): Ifølge sætning A.6.9 2) og simple regler for differentiation får vi:

$$f'(x) = 2 \cdot \ln 4 \cdot 4^x - 5 \cdot \ln 2 \cdot 2^x = 2{,}7726 \cdot 4^x - 3{,}4657 \cdot 2^x$$

Ad b): Da g er sammensat af funktionerne: $-x^2$ og e^x ser vi ifølge reglen for differentiation af sammensatte funktioner samt sætning A.6.9 1), at:

$$g'(x) = e^{-x^2} \cdot (-x^2)' = e^{-x^2} \cdot (-2x) = -2x \cdot e^{-x^2}$$

Ad c): Da h er sammensat af funktionerne: $x + \sqrt{x}$ og 3^x ser vi på samme måde som i b), og ifølge sætning A.6.9 2), at

$$h'(x) = \ln 3 \cdot 3^{x+\sqrt{x}} \cdot \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$$ ♥

Øvelse A.6.11.
Bestem differentialkvotienten af følgende funktioner:
a) $f(x) = 8x \cdot 8^x$ b) $g(x) = 3^x + x^3$ c) $h(x) = 3{,}6^{-1{,}4x}$ ♥

Differentiation af eksponentielle vækstfunktioner.

Da forskellen på en eksponentialfunktion og en eksponentiel vækstfunktion er en positiv konstant, ses direkte af sætning A.6.9, at der gælder følgende sætning:

Sætning A.6.12.

De eksponentielle vækstfunktioner $b \cdot e^x$, $b \cdot a^x$ og $b \cdot e^{kx}$ er differentiable, og der gælder følgende regler:

1) $(b \cdot e^x)' = b \cdot e^x$ 2) $(b \cdot a^x)' = b \cdot \ln a \cdot a^x$ 3) $(b \cdot e^{kx})' = b \cdot k \cdot e^{kx}$

Øvelse A.6.13.
Bestem differentialkvotienten for hver af følgende funktioner:
a) $f(y) = 210 \cdot 1{,}6^{2y-2}$ b) $g(x) = 0{,}6 \cdot e^{-0{,}9x}$ c) $h(p) = 43 \cdot 2{,}3^p$ ♥

I forlængelse af sætning A.6.12 og øvelse A.6.13 bemærkes, at hvis f er en eksponentiel vækstfunktion givet på formen: $f(x) = b\cdot e^{kx}$, så er $f'(x) = b\cdot k\cdot e^{kx} = k\cdot f(x)$. Funktionen f opfylder altså, at dens differentialkvotient er lig med en konstant gange funktionen selv. Dette gælder i øvrigt kun for funktioner af typen $b\cdot e^{kx}$, idet der gælder følgende sætning:

Sætning A.6.14.

Hvis en funktion f opfylder, at: $f'(x) = k\cdot f(x)$ for alle x i et interval I, hvor k er en given konstant, så findes der en anden konstant b, så funktionsforskriften for f er givet ved: $f(x) = b\cdot e^{kx}$, $x \in I$.

Øvelse A.6.15.
Om en differentiabel funktion f oplyses, at $f'(x) = -\frac{1}{2} f(x)$ og $f(3) = 100$.
Bestem en funktionsforskrift for f. ♥

Betingelsen: $f'(x) = k\cdot f(x)$, som også kan anføres således: $\Delta f(x) \approx k\cdot f(x)\cdot \Delta x$, når $\Delta x \approx 0$, siger, at funktionens væksthastighed er proportional med den aktuelle funktionsværdi. Og det er forbavsende ofte, at denne betingelse (tilnærmelsesvist) kan siges at være opfyldt. (Interesserede læsere henvises bl.a. til bogen ”Matematik for Gymnasiet. Logaritme-, eksponential- og potensfunktioner – og matematiske modeller”).

Differentiation af potensfunktioner og potentielle vækstfunktioner.

Sætning A.6.16.

En vilkårlig potensfunktion x^r og en vilkårlig potentiel vækstfunktion $b\cdot x^r$ er differentiable, og der gælder, at:

$$(x^r)' = r\cdot x^{r-1} \qquad \text{og} \qquad (b\cdot x^r)' = b\cdot r\cdot x^{r-1}$$

Øvelse A.6.17.
Bestem differentialkvotienten for hver af følgende funktioner:
a) $f(x) = 12\cdot x^{2,7}$ b) $g(x) = x^{0,6}$ c) $h(x) = 3{,}1^x + x^{3,1}$ d) $j(x) = (5x^2)^{1,72}$ ♥

Øvelse A.6.18.

a) Vis v.hj.a. omskrivningen: $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$, $x > 0$, at $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

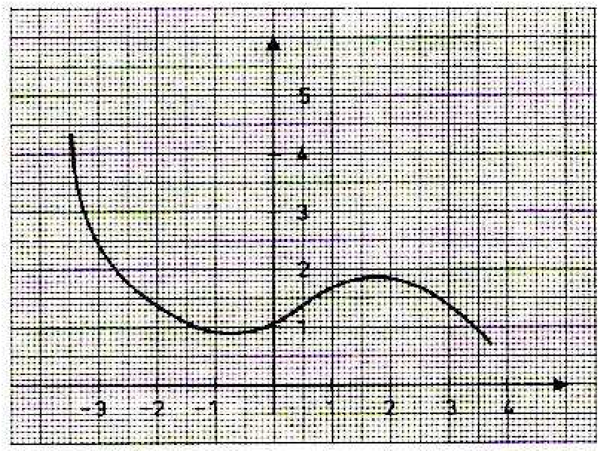
b) Vis v.hj.a. omskrivningen: $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$, $x > 0$, at $(\sqrt[n]{x})' = \dfrac{\sqrt[n]{x}}{nx}$ ♥

Opgavesamling.

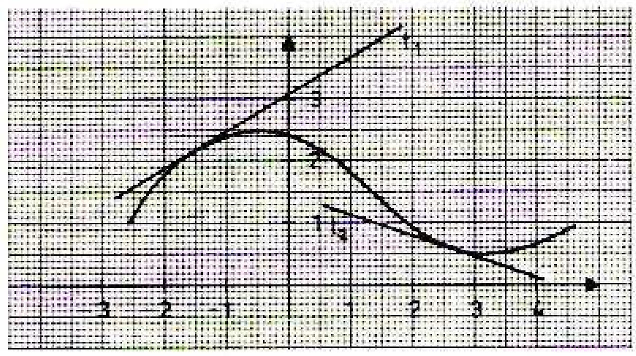
Kapitel 4.

4.1. Find differentialkvotienten af funktionen $g(x) = 2x^3 - 6x^2 + 5x + 11$ i punktet 4 på samme måde som i eksempel 4.10.

4.2. På figuren ses grafen for en funktion f. Bestem v.hj.a. figuren en ligning for den tangent til grafen, som har hældningskoefficienten $-\frac{3}{2}$



4.3. På figuren ses grafen for en funktion g, samt to tangenter t_1 og t_2 til grafen.
Bestem v.hj.a. figuren ligningerne for disse tangenter.



4.4. Grafen for funktionen $f(x) = x^2$ har to tangenter, som går igennem punktet (1, –3).
Tegn en skitse, som viser dette.
Find de to tangenters røringspunkter på grafen, og opskriv ligningerne for tangenterne.
(*Vejledning:* Opstil en passende andengradsligning på baggrund af den givne information)

Kapitel 5.

5.1. Bestem $f'(1)$ for hver af følgende funktioner:

a) $f(x) = 5x - 2$ b) $f(x) = 3$ c) $f(x) = \frac{2}{x} - 5x + 3$

d) $f(x) = 2\sqrt{x} - 5x^2 + 7$ e) $f(x) = 2\sqrt{x} - 5x^2 + 19$ f) $f(x) = -3x^{-2} + 2x^3$

g) $f(x) = 4x^2 + 11$ h) $f(x) = 2x^5 - 3x^2 + \frac{3}{x}$ i) $f(x) = x^9 - x^8$

j) $f(x) = x^7 + x^{-7}$ k) $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x$ l) $f(x) = \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x} - 7$

5.2. a) Bestem en ligning for tangenten i punktet (1, f(1)) for hver af funktionerne i opgave 5.1 d), h), j) og k).
b) Bestem en ligning for tangenten i punktet (4, f(4)) for hver af funktionerne i opgave 5.1 c), f) og k)

5.3. Bestem differentialkvotienten for funktionen: $h(x) \;=\; ax^4 + bx^2 + cx^{-2}$,
hvor a, b og c er givne konstanter.

5.4. Bestem $f'(3)$ og $f''(3)$ for hver af følgende funktioner:

a) $f(x) = 4x + 1$ b) $f(x) = 2x^2 - 3x + 9$

c) $f(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ d) $f(x) = -x^3 + 2x^{-2} + 6$

5.5. Betragt funktionen $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 6x - 1$

a) Bestem ligningerne for de tangenter, der er parallel med 1.aksen.

b) Bestem ligningerne for de tangenter, der er parallelle med linien: $y = -\frac{9}{4}x + 8$

c) Tegn grafen for f i et koordinatsystem, og indtegn de omtalte tangenter.

5.6. Betragt funktionen f givet ved forskriften: $f(x) = \frac{1}{5}x^3 - x^2 - \frac{9}{5}x + 9$

Grafen for funktionen f skærer førsteaksen i en række punkter, og det skæringspunkt med størst 1.koordinat kaldes P.
Bestem en ligning for tangenten til grafen for f i punktet P
(Vejledning: Løs relevante ligninger v.hj.a et PC-cas-program).

5.7. Bestem differentialkvotienterne af følgende funktioner:

a) $x^{13} - 10x^{11} + 13x^5 + 8$ b) $\dfrac{1}{12x^{13}} + \dfrac{1}{8x^5}$ c) $x^2 \cdot \sqrt{x}$ d) $x^2 \cdot (2x - 1)$

e) $(2x^7 + 5) \cdot (-3x^2 + 2)$ f) $\sqrt{x} \cdot (2x - 5)$ g) $2x^3 - x\sqrt{x}$ h) $\dfrac{x^2 - 3}{x}$

5.8. Løs ligningen $f'(x) \;=\; 0$ for hver af funktionerne:

a) $f(x) = 2x + \dfrac{18}{x}$ b) $f(x) = 5x^3 + x^2 - 12x$ c) $f(x) = \sqrt{x} \cdot (x^2 - 12)$

5.9. Bestem $g'(1)$, $g'(3)$ og $g'(17)$ for funktionen: $g(x) \;=\; (x^2 + 4) \cdot (\sqrt{x} - 2) + 3x^7$

5.10. Tegn grafen for funktionen $g(x) = -\frac{1}{2}x\sqrt{x}$ (f.eks. v.hj.a. et graftegningsprogram).

Bestem ligningerne for tangenterne i punkterne (1,g(1)) og (4, g(4))
Indtegn disse tangenter ved grafen, og kommentér resultatet.

5.11. Betragt funktionen: $f(x) = 5x^3 + x^2 - 12x$

a) Bestem ligningen for tangenten til grafen for f i punktet P = (1, f(1)).

b) Grafen for f har en anden tangent, som også går igennem P. Bestem røringspunktet for denne tangent.
(Vejledning: Tegn en skitse, der viser situationen. Opstil en ligning v.hj.a. det generelle udtryk for tangentligningen. Den fremkomne ligning kan løses med et PC-cas-program).

5.12. Tegn grafen for funktionen $h(x) = \dfrac{2x}{x^2-4}$ (f.eks. v.hj.a. et graftegningsprogram).
Bestem hældningskoefficienterne for tangenterne i punkterne $(3, \frac{6}{5})$, $(0,0)$ og $(-4, -\frac{2}{3})$
Indtegn disse tangenter ved grafen, og kommentér resultatet.

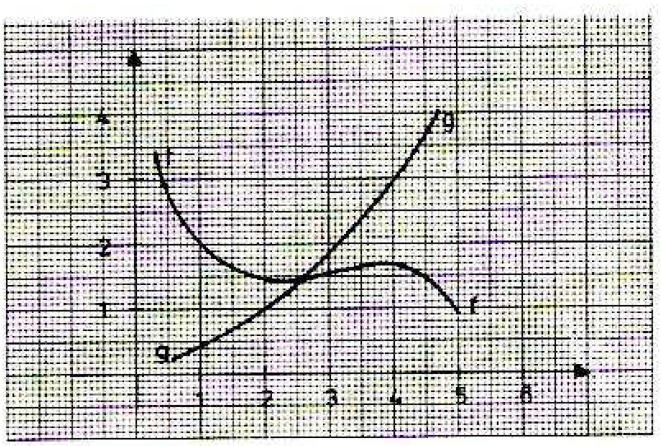
5.13. Bestem $f'(x)$ for hver af følgende funktioner:

a) $f(x) = \dfrac{x^2+3}{x-2}$ b) $f(x) = \dfrac{x+5}{x+6}$ c) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}+5}{\sqrt{x}+6}$

d) $f(x) = 5x^2 + \dfrac{x}{x^2+1}$ e) $f(x) = \dfrac{8}{2x^2+3x-1}$ f) $f(x) = \dfrac{2x+\sqrt{x}}{4-\frac{1}{x}}$

<u>Sammensatte og omvendte funktioner:</u>

5.14. På figuren ses graferne for to funktioner f og g.
Bestem v.hj.a. figuren en værdi for $(g \circ f)'(1)$
Bestem en ligning for tangenten til grafen for $g \circ f$ i punktet $(1, (g \circ f)(1))$.



5.15. Find differentialkvotienterne af følgende funktioner:

a) $\left(\dfrac{1}{x}+2\right)^4$ b) $\sqrt{12-x^3}$ c) $\sqrt{(\frac{1}{4}x+1)^5}$ d) $\dfrac{1}{x \cdot \sqrt{3x+1}}$

5.16. Bestem den afledede funktion af $g \circ f$, idet $f(x) = \sqrt{x}$, $x > 0$ og $g'(x) = \dfrac{1-x}{x^3}$, $x \neq 0$

5.17. Bestem det approximerende førstegradspolynomium for funktionen f i tallet 2, idet $f(x) = \sqrt{x^3-4}$

5.18. Find ligningerne for tangenterne i punkterne $(2, f(2))$ og $(-1, f(-1))$, idet $f(x) = \sqrt{16-x^2}$
Tegn grafen for f, og indtegn de fundne tangenter. Kommentér resultatet.

5.19. Bestem differentialkvotienten af følgende funktioner:

$g(x) = (x^7+2x^4)^{18}$ $h(x) = \sqrt{x^{-3}+x^{-2}} \cdot 5x^4$ $j(x) = \dfrac{x^2-7x}{\sqrt{x^4+x^2}}$

5.20. Bestem $f'(2)$ for hver af følgende funktioner:

a) $f(x) = (x^2 - 2x + 2)^3$ b) $f(x) = (8x - 11)^5$ c) $f(x) = (x + \sqrt{x})^{-4}$

d) $f(x) = \sqrt{3x^2 + 4x}$ e) $f(x) = \sqrt{4 - \frac{1}{x}}$ f) $f(x) = \sqrt{x^2 + \sqrt{x+1}}$

g) $f(x) = (-3x^2 + 8)^3 \cdot \sqrt{4x^2 + 2}$ h) $f(x) = x^2 \cdot \sqrt{x^2 + (x^4 - 4)^7}$

i) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{4x^2 + 2}}$ j) $f(x) = \left(\dfrac{2x}{x^3 + 2}\right)^4$

5.21. Find den anden afledede af hver af funktionerne i opgave 10 a), b) og c), og i opgave 22 a) og d)

5.22. Find følgende differentialkvotienter <u>uden</u> først at finde en <u>funktionsforskrift</u> for f^{-1}, (men naturligvis skal $f^{-1}(y_o)$ bestemmes for at kunne finde svaret):

a) $(f^{-1})'(y_o)$, idet $f(x) = x^2 + x$, $x < -\frac{1}{2}$ og $y_o = 0$

b) $(f^{-1})'(y_o)$, idet $f(x) = x^3 + 2$ og $y_o = 8$

5.23. Betragt funktionen $y = f(x)$ givet ved:

$$y = \frac{2x}{x+5} \quad , \quad x > -5$$

Det oplyses, at f er voksende.
Bestem en forskrift for f^{-1}
Bestem en forskrift for funktionen $(f^{-1})'$
– dels ved direkte at differentiere funktionen f^{-1}
– dels ved at anvende formlen for $(f^{-1})'$ fra sætning 5.22.
Reducér mest muligt og konstater, at de to udtryk bliver ens.

5.24. Som foregående opgave, men nu med den voksende funktion: $f(x) = \sqrt{x^2 + 3}$, $x \geq 0$

<u>**Kapitel 6.**</u>

6.1. Bestem værdimængden for hver af funktionerne:

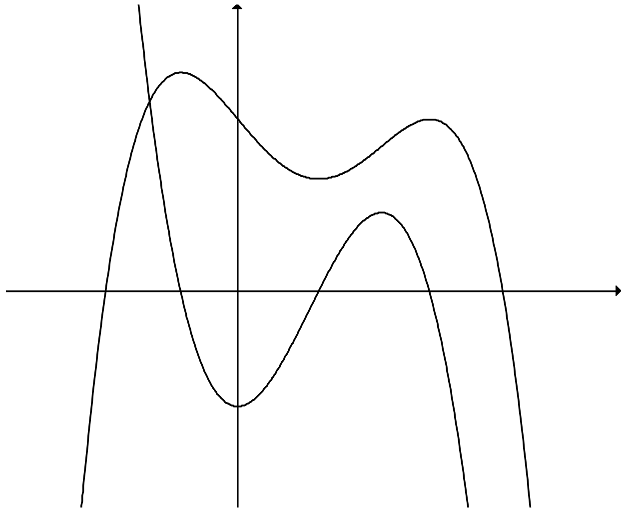
$$g(x) = 2\sqrt{x} \cdot (3 - x^2) \quad , \quad x \in [\,0;5\,]$$

$$h(x) = 2x^3 - 3x^2 - 4x + 5 \quad , \quad x \in [\,-2;4\,]$$

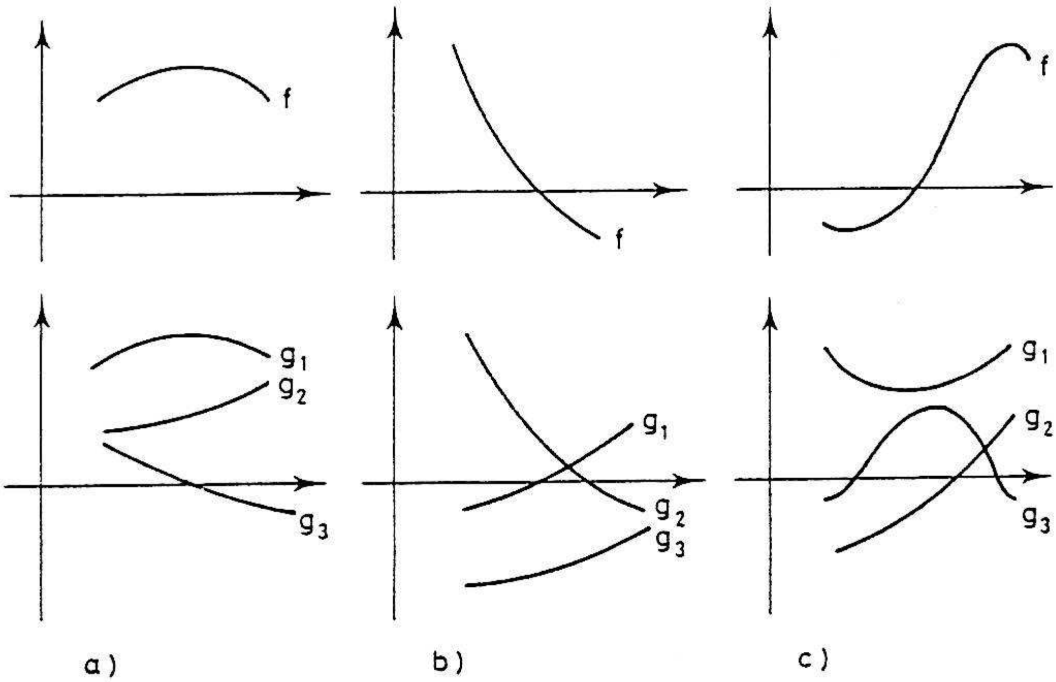
6.2. Se på funktionen f i opgave 1. Angiv det størst mulige interval, hvor $f'(x) > 0$

6.3. Figuren viser graferne for to funktioner g(x) og h(x).
Der gælder enten, at:
$g'(x) = h(x)$ eller $h'(x) = g(x)$

Argumentér for, hvilken af de to muligheder, der er korrekt.



6.4. Bestem i hvert af følgende tilfælde, hvilken af funktionerne g_1, g_2 og g_3, der kan tænkes at være den afledede funktion af f :

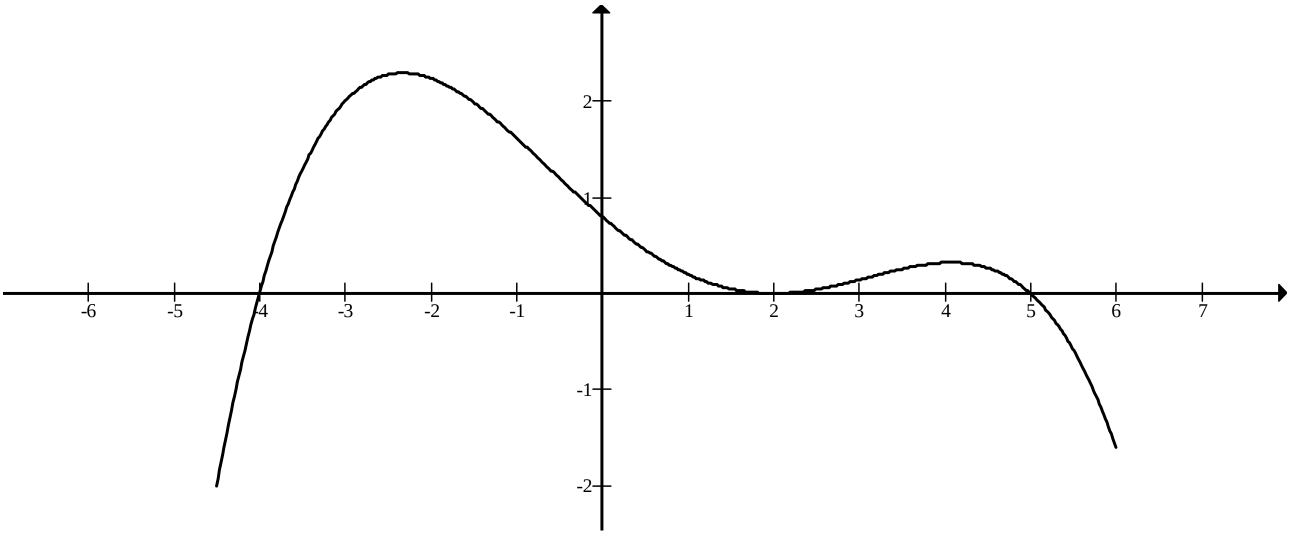


6.5. a) Tegn grafen for en funktion g, der har følgende fortegnsvariation for g' :

x		–3		1		4	
$g'(x)$	– – –	0	+ + + + +	0	+ + + +	0	– – –

b) Tegn grafen for en funktion g, der har den i pkt. a) viste fortegnsvariation, og som desuden opfylder, at $g(-5) = 3$ og $g(6) = -8$

6.6. En differentiabel funktion f er defineret i intervallet $]-4,5;6[$
På nedenstående figur ses grafen for den afledede funktion f'.
Bestem monotoniforhold og lokale extrema for f.



6.7. Bestem monotoniforhold og lokale extrema for hver af funktionerne, og skitsér graferne:
a) $f(x) = 2x^2 - x + 7$ b) $f(x) = 3x^8 - 8x^2 + 1$ c) $f(x) = 8\sqrt{x} - x^2$
d) $f(x) = \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x}$ e) $f(x) = 2\sqrt{x} + \dfrac{6}{x}$ f) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 \cdot \sqrt{8-x}$
g) $f(x) = \dfrac{4x+3}{x^2+1}$ h) $f(x) = \dfrac{x+2}{x^2-1}$

6.8. Bestem monotoniforhold samt eventuelle lokale extrema for funktionerne:
$f(x) = \dfrac{2x+1}{\sqrt{x}}$ $g(x) = 2x^3 - 5x^2 + 2x + 12$ $h(x) = -5x^5 + 200x^2 + 7$

6.9. Argumentér for, at funktionen: $h(x) = \dfrac{2x^5}{2+x^4}$ er voksende.

6.10. Bevis, at et andengradspolynomium $g(x) = ax^2 + bx + c$ har et globalt minimum, hvis a > 0, og et globalt maximum, hvis a < 0,
samt at dette extremum i begge tilfælde antages i punktet: $x = -\dfrac{b}{2a}$

6.11. Bevis, at funktionen: $g(x) = 5x - \sqrt{x+3}$, $x \geq -2$ har en omvendt funktion.
(Vejledning: Vis v.hj.a. differentialregning, at g er voksende).

6.12. Betragt funktionen f givet ved forskriften: $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + a$, hvor a er et givet reelt tal.
a) Bestem de værdier af a, for hvilke grafen for f har netop to skæringspunkter med 1.aksen.
b) Bestem de værdier af a, for hvilke grafen for f har netop tre skæringspunkter med 1.aksen.

6.13. a) Bevis, at funktionen $g(x) = x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x + 2$ har ét og kun ét nulpunkt.

b) For hvilke værdier af tallet a har funktionen $g_a(x) = x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x + a$ tre nulpunkter ?

6.14. Funktionen g er givet ved forskriften: $g(x) = x^4 + 4x^3 - 18x^2 + 20x + 12$
a) Bestem monotoniforholdene for g
b) Bestem 1.koordinaterne til de punkter, hvor tangenterne til grafen for g har hældningen 7.
(Vejledning: Anvend PC-cas-program til løsning af de relevante ligninger).

6.15. a) Bestem monotoniforhold og lokale ekstrema for funktionen: $f(x) = 3x^2 + \frac{1}{x} + 8$

b) Skitsér grafen for f

c) Bestem værdimængden for funktionen: $g(x) = 3x^2 + \frac{1}{x} + 8 \quad , \quad x \in \left[\, \frac{1}{4} ; 5 \,\right]$

6.16. Betragt funktionen: $m(p) = \sqrt{3p^2 + 1}$
a) Bestem en ligning for tangenten til grafen for m i punktet (4, m(4)).
b) Bestem monotoniforhold og eventuelle lokale extrema for m.

6.17. Betragt funktionen $g(t) = \dfrac{4t+3}{t^2+1} \quad , \quad t \in [-5;5]$.
a) Bestem monotoniforholdene for g
b) Bestem Vm(g).

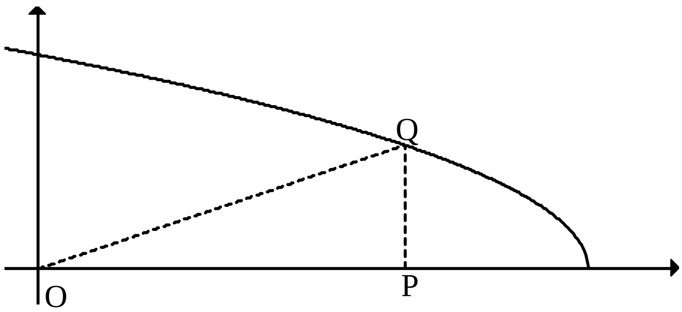
6.18. a) Bestem monotoniforhold for funktionen: $f(x) = 3x^2(2-x)^5$

b) Bestem størsteværdien og mindsteværdien for funktionen: $g(x) = 3x^2(2-x)^5 \; , \; x \in [\,0;2\,]$

6.19. Betragt funktionen $q(s) = 2s^2 + \frac{50}{s}$, $s > 0$

Argumentér for, at q har et minimum, og bestem værdien af dette minimum.

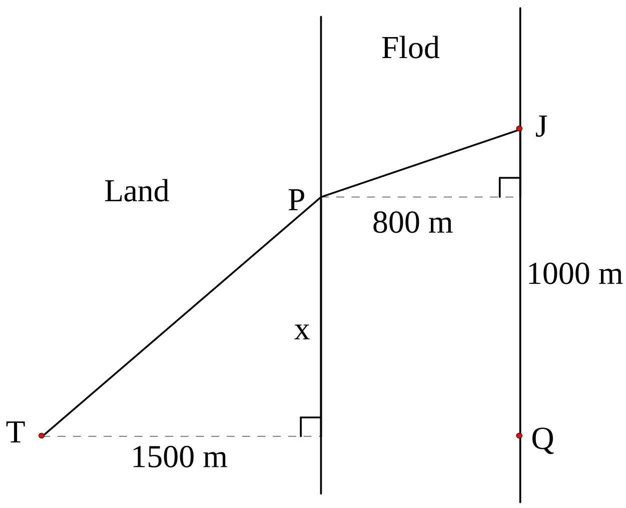
6.20. På figuren ses grafen for funktionen
$g(x) = \sqrt{6-x}$
Punkterne O, P og Q givet ved:
O = (0,0), P = (x,0) og Q = (x, g(x))
danner en retvinklet trekant.



a) Bestem et udtryk for arealet A(x) af ΔOPQ, når 0 < x < 6
b) Bestem den værdi af $x \in \left]\,0;6\,\right[$, der giver det størst mulige areal af ΔOPQ.
(Husk at argumentere for, at der ér tale om et maximum).

6.21. En ”klassisk” problemstilling/opgave går ud på at ”bevæge sig” fra et punkt til et andet, hvor der undervejs skiftes vilkår for ”bevægelsen” – og under disse vilkår finde den hurtigste, den billigste osv. vej.
Det kan f.eks. dreje sig om, at en person skal komme fra A til B, hvor B ligger på den anden side af en flod, medens A ligger et stykke fra floden – og personen kan bevæge sig med to forskellige hastigheder i de to områder, eller om, at man skal bygge en vej fra A til B, og undervejs skiftes der terræn, så prisen pr. meter vej ændres, osv.
Vi vil her se på den førstnævnte situation.

Tarzan (T) står et stykke fra floden og ser, at Jane (J), der befinder sig på den anden side af floden, er i fare – og som den helt han er, vil han gerne hurtigst muligt over at hjælpe Jane.
På land kan Tarzan løbe med en hastighed på 8 meter pr. sekund, og i floden kan han svømme med en hastighed på 2 meter pr. sekund. I øvrigt er der de på figuren angivne afstande. Punktet Q ligger vinkelret på den modsatte side af floden i fht. Tarzans startposition, og afstanden mellem Q og Jane er 1000 m.
Tarzan løber hen til punktet P, og svømmer herfra over til Jane.



Spørgsmålene er nu:
Hvor skal P placeres, for at Tarzan hurtigst muligt kan komme over til Jane, og hvor hurtigt er han fremme ?
Svarene på disse spørgsmål kan findes ved at svare på følgende:

a) Udtryk afstandene $|TP|$ og $|PJ|$ ved den variable x (se figuren).
b) Bestem udtryk ved x den samlede tid t(x), som Tarzan bruger.
(Vejledning: I en bevægelse med hastigheden v gælder der: $v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$, hvor Δs er strækningen og Δt er den tilsvarende tid, der anvendes. Og heraf får vi: $\Delta t = \frac{\Delta s}{v}$. Man finder altså tiden i bevægelsen ved at dividere strækningen med hastigheden).
c) Bestem ved differentiation den værdi af x, der giver den korteste tid.
(Vejledning: Anvend et PC-cas-værktøj ved løsning af relevante ligninger mm.)
d) Hvor skal P placeres ? Og hvor kurtigt kommer Tarzan over til Jane ?

Kapitel 7.

7.1. Bestem – ved numerisk differentiation – differentialkvotienten af $f(x) = \sqrt{x}$ i $x_o = 5$.
(Anvend f.eks. $\Delta x = 0{,}01$).
Sammenlign resultatet med $f'(5)$ bestemt v.hj.a. eksempel 4.7.

7.2. Bestem $f'(2)$ v.hj.a. formlen for numerisk differentiation (anvend f.eks. $\Delta x = 0{,}02$), idet

a) $f(x) = x^3$ b) $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+2}$ c) $f(x) = \sqrt{5x-1}$

7.3. Et større bryggeri har anskaffet en effektiv filtreringsmaskine. Maskinen rengøres én gang i døgnet, og umiddelbart efter at den startes igen, kan den filtrere 200 liter pr. minut. Denne hastighed forøges gradsvist under maskinens kørsel og nærmer sig efterhånden til 500 liter pr. minut i den optimale driftssituation.
Fra maskinens avancerede elektronik overføres hvert 5. minut den aktuelle øjeblikkelige filtreringshastighed F(t) til bryggeriets edb-anlæg. I den nedenstående tabel ses disse filtreringshastigheder fra de første 100 minutter efter at maskinen er startet. (F(t) angives i liter pr. minut og t i minutter).

T	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
F(t)	200,0	214,6	228,5	241,8	254,4	266,4	277,8	288,6	298,9	308,7	318,0

T	55	60	65	70	75	80	85	90	95	100
F(t)	326,9	335,4	343,4	351,0	358,3	365,2	371,8	378,0	384,0	389,6

a) Tegn grafen for F(t), $t \in [0;100]$ (Stor tegning – og anvend mm-papir eller lignende).
b) Bestem $F'(40)$ ved grafisk differentiation.
c) Bestem $F'(40)$ ved numerisk differentiation.
d) Sammenlign og kommentér resultaterne fra b) og c).
e) Løs samme opgave som i b), c) og d), men nu med $F'(70)$

7.4. Betragt følgende funktionsforskrifter:

a) $p = 43m^4 + \dfrac{53}{m^3} + 18$ b) $z = \dfrac{y-\sqrt{y}}{y\sqrt{y}}$ c) $t(x) = x^2 \cdot \sqrt{2x^2+4}$

Bestem følgende:

a) $\dfrac{dp}{dm}$ og $\dfrac{dp}{dm}(1)$ b) $\dfrac{dz}{dy}$ og $\dfrac{dz}{dy}(9)$ c) $\dfrac{dt}{dx}$ og $\dfrac{dt}{dx}(5)$

7.5. Vis, at funktionen $g(x) = x^2\sqrt{x} + 4x$ er differentiabel fra højre i 0, og find $f'_+(0)$.
Angiv en ligning for den fremadrettede halvtangent i punktet (0, g(0)).

7.6. Bestem krumningsforholdene for funktionen i opgave 6.15 a) – og anvend dette ved tegning af grafen.

7.7. Bestem monotoniforhold, lokale extrema, krumningsforhold og vendetangenter – og tegn grafen – for hver af følgende funktioner:

a) f(x) = $x^3 - 12x + 1$

b) g(x) = $x^3 - 3x^2 + 3x + 2$

c) h(x) = $-\frac{1}{2}x^3 + 3x^2 + 3$

d) j(x) = $\frac{1}{3}x^3 + x^2 + 2x + 1$

Stamfunktioner

7.8. a) Bestem den stamfunktion til f(x) = $\frac{1}{4}x^4$, der har funktionsværdien 8 i tallet 2.

b) Bestem den stamfunktion til g(x) = $2\sqrt{x}$, hvis graf går igennem punktet (9,2)

7.9. Bestem en stamfunktion til hver af funktionerne:

a) f(t) = $\frac{1}{2}t^2$ b) g(p) = -2p + 300 c) h(y) = $5y^8 - 3y^2$

7.10. Om en funktion f er givet, at:

$f'(x) = x^3 - 2x^2 \quad , \quad x \in R$ og f(1) = 2

Bestem en funktionsforskrift for f.

7.11. Betragt funktionen g(x) = $2x^3 + 11x^2 - 4$

Bestem den stamfunktion til g, hvis graf går igennem punktet (2,58).

7.12. Udregn følgende integraler:

a) $\int 5dx$ b) $\int (x^4 - 31x + 17)dx$ c) $\int \frac{(x+2)^2}{x^4} dx$ d) $\int (3x^{-2} + 5\sqrt{x} - 3x^2)dx$

Kapitel 8.

8.1. Argumentér for, at det om funktionen f(x) = $\frac{1}{2}x + \frac{1}{\sqrt{x}}$ gælder, at: $f(x) \to \infty$ for $x \to 0+$

8.2. Lad funktionerne f og g være givet ved:

$$f(x) = \frac{x-5}{(x+5)^2} \qquad \text{og} \qquad g(x) = \frac{6x^2 + 10x - 4}{3x^2 + 2x - 1}$$

a) Undersøg f(x) for $x \to -5+$ og $x \to -5-$

b) Undersøg g(x) for $x \to \frac{1}{3}+$, $x \to \frac{1}{3}-$, $x \to -1+$, $x \to -1-$ og $x \to -2+$

8.3. Bestem monotoniforhold og værdimængde for funktionen:

$$g(x) = \frac{6x^2 + 10x - 4}{3x^2 + 2x - 1} \quad , \quad x \in [-2;1] \setminus \{-1, \tfrac{1}{3}\}$$ (jfr. opgave 8.2)

8.4. Undersøg følgende funktioner f(x) for x gående mod ∞ og mod $-\infty$:

a) $f(x) = 2x^4 - 5x^3 - 800x^2 - 12000x + 1$

b) $f(x) = x^3 + x + 1$

c) $f(x) = (-7x^8 + 8x^7 - 15) \cdot (2x^3 + 4x^2 - 8x + 17)$

8.5. Undersøg følgende funktioner f(x) for x gående mod ∞ og mod $-\infty$:

a) $f(x) = \dfrac{2x^2 - 3x + 1}{3x^2 - 2x + 1}$

b) $f(x) = \dfrac{-x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1}{x^3 + x^2 + x + 1}$

c) $f(x) = \dfrac{x^{12} + 12x^4 - 3x + 12}{x^{13} - 13x^{12} + 25}$

8.6. Bestem monotoniforhold og værdimængde for funktionen:
$h(x) = x\sqrt{x} - x^2 \quad , \quad x \geq 0.$
(Vejledning: Bemærk, at $x\sqrt{x} - x^2 = x\sqrt{x}(1 - \sqrt{x})$. Benyt dette til at undersøge hvad der sker med f(x), når x går mod uendelig).

8.7. Bestem værdimængderne for hver af følgende funktioner:

a) $f(x) = \dfrac{\frac{1}{2}x + 3}{x^2 + x - 2}$ b) $f(x) = \dfrac{x^2 + 4x - 2}{x^2 + 1}$ c) $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 2}{-2x^2 + x - 1}$

8.8. Angiv ligningerne for samtlige asymptoter til nedenstående funktioners grafer:

a) $f(x) = \dfrac{2x^2 + 3x - 1}{-x + 2}$ b) $g(x) = \dfrac{x}{|x| + 1}$ c) $h(x) = \dfrac{x^3 + 3x}{3x^3 - 2x^2}$

(Vejledning til f(x): Vis ved polynomiers division, at forskriften for f kan omskrives til:
$f(x) = -2x - 7 + \dfrac{13}{-x + 2}$).

8.9. Angiv definitionsmængde, asymptoter og monotoniforhold, samt tegn grafen, for hver af følgende funktioner:

a) $f(x) = \dfrac{-3}{x + 4}$ b) $f(x) = \dfrac{2}{14 - 5x}$ c) $f(x) = \dfrac{-4}{-4x + 9}$ d) $f(x) = \dfrac{2x}{\frac{1}{2}x^2 + x}$

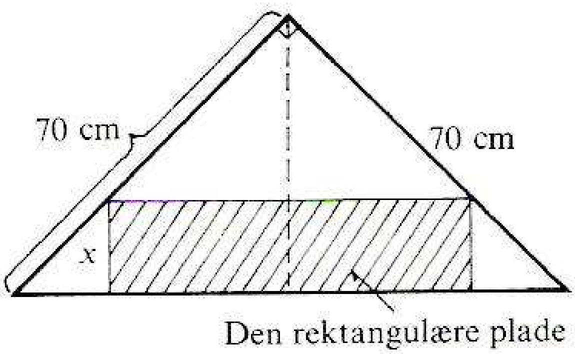
8.9. Undersøg funktionen: $f(x) = \frac{1}{2}x + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ (jfr. opgave 8.1) og dens graf mht. definitionsmængde, monotoniforhold, asymptoter og værdimængde. Tegn derefter grafen for f.

8.10. Lad funktionen f være givet ved: $f(x) = 2x + \dfrac{4x}{1 - x^2}$. Undersøg funktionen og dens graf med hensyn til definitionsmængde, nulpunkter og fortegn, monotoniforhold og asymptoter.
Tegn grafen for f og kommentér resultatet.

Kapitel 9.

Geometrisk optimering

9.1. En maskinfabrikant får en masse trekantede metalplader i overskud fra produktionen af maskinerne.
Fabrikanten har imidlertid mulighed for at afsætte rektangulære plader til en anden virksomhed, hvorfor jan lader sådanne plader udskære af de trekantede overskudsplader (se figuren).

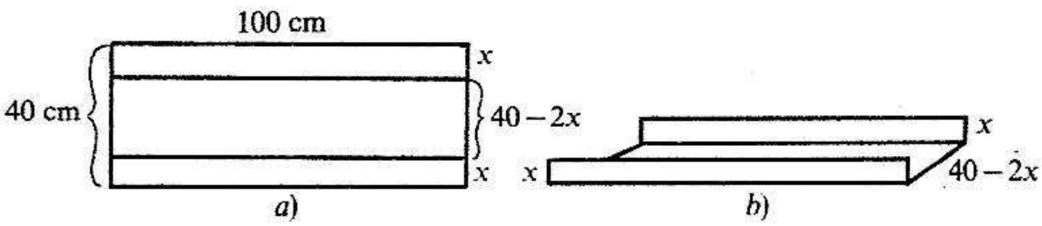


a) Vis, at arealet a(x) af de rektangulære plader som funktion af den ene sides længde x er givet ved:

$$a(x) = 2\cdot x\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 70 - x\right)$$

b) Find det størst mulige areal, som på denne måde kan udskæres af pladerne.
c) Find sidelængderne i det størst mulige rektangel.

9.2. En 1 m lang og 40 cm bred rektangulær rustfri stålplade skal bukkes, så der dannes en kasse uden endeflader (se figuren). (Endefladerne fabrikeres af træ og udelades af betragtningerne her).



Bestem den højde af kassen, som gør rumfanget størst muligt.
(Vejledning: Opstil en funktion R(x) for rumfanget som funktion af kassens højde x.
Se figuren).

9.3. En designer har i et funktionelt design fremstillet et smykkeskrin, der har form som en kasse med låg. Bund, sider og låg er fremstillet af hver sine materialer for at give en særlig visuel effekt.
Prisen for bunden er 0,10 kr. pr. cm^2, for siderne 0,40 kr. pr. cm^2 og for låget 0,50 kr. pr. cm^2.
Når smykkeskrinet skal produceres i større antal med henblik på salg, har den producerende virksom vurderet, at de samlede omkostninger til materialerne skal være 200 kr.

a) Opstil et udtryk (en ligning), der beskriver omkostningerne ved det samlede materiale udtrykt ved kassens længde, bredde og højde. (Tegn en skitse, der illustrerer situationen).

Af forskellige årsager er virksomheden og designeren blevet enige om, at bunden skal være kvadratisk, dvs. længde og bredde skal være ens. Lad x betegne denne fælles længde og bredde.

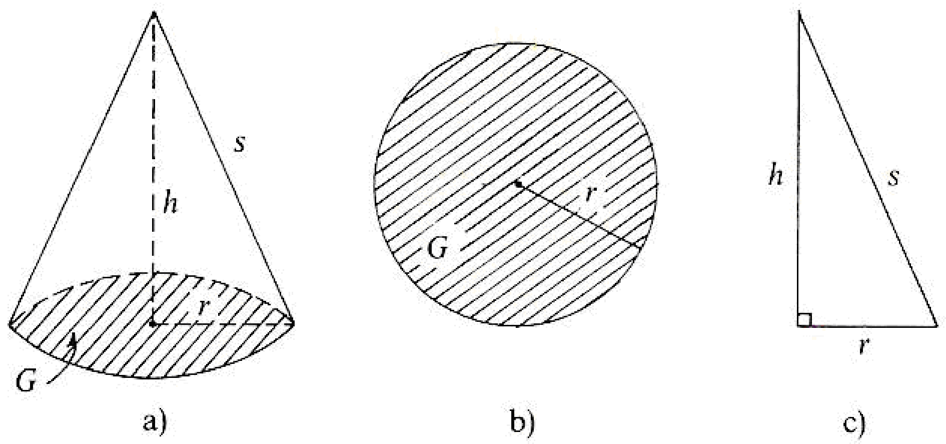
b) Benyt ligningen i a) til at finde højden h udtrykt ved x. *(fortsættes)*

c) Opstil et udtryk for smykkeskrinets rumfang R(x) som funktion af x, og bestem den værdi af x, som giver det største rumfang.
d) Angive længde, bredde, højde og rumfang for smykkeskrinet med størst rumfang.

9.4. En kasse uden låg (jfr. figur 9.2 venstre del, men se bort fra længden 5 cm) skal opbygges, så den får et rumfang på 200 cm^3. Om kassens længde, bredde og højde oplyses kun én ting, nemlig at længden og bredde skal designes i forhold til hinanden, så deres forhold svarer til det såkaldte ”gyldne snit”, dvs. længden skal være 1,618 gange så stor som bredden.

a) Bestem et udtryk for kassens overfladeareal som funktion af bredden x.
b) Bestem den bredde, der giver det mindste overfladeareal.

9.5. På nedenstående figurer ses en kegle (a), keglens ”bund” (b) og et snit af en keglehalvdel (c). Rumfanget V af en kegle er givet ved formlen: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, hvor r er radius i bunden og h er keglens højde (som vist på figuren).
Keglens krumme overflade O_k har et overfladeareal givet efter formlen: $O_k = \pi rs$, hvor s er længden af siden (se figuren).



En given kegle kar et rumfang på 5000 cm^3.

a) Bestem højden h udtrykt ved radius r.
b) Bestem en formel for det samlede overfladeareal O(r) som funktion af radius r. (Husk, at der både er den krumme overflade og overfladen af bunden).
c) Bestem den radius, der gør O(r) mindst mulig. (Vejledning: Anvend et PC-cas-program til at løse denne del af opgave).

Omkostningsmodeller.

9.6. Som omtalt i kapitel 9 (side 117) er der visse faktorer, der bevirker, at de variable enhedsomkostninger VU(q) aftager ved øget produktion, og der er andre faktorer der bevirker, at VU(q) vokser ved øget produktion. Vi vil prøve at se nærmere på dette.

a) Overvej, at følgende faktorer kan få VU til at vokse ved øget produktion, og prøv at finde eventuelle andre faktorer end de følgende:
   - øget produktion kan forøge spildprocenten for materialer til produktionen

- øget produktion kan medføre øget slidtage på maskinerne
- øget produktion kan medføre anvendelse af overarbejds- eller skifteholdsbetaling
- øget produktion kan kræve flere ansatte og måske større udskiftningshastighed af personalet, hvilket resulterer i nedsat produktivitet pr. ansat (idet der bl.a. bliver behov for en forøget oplæring af de ansatte)
- hvis den virksomhed, der leverer råmateriale til produktionen, dominerer markedet, så kan en øget produktion medføre en forøgelse af indkøbsprisen, idet efterspørgslen forøges

Modelteknisk kan sådanne faktorer indkalkuleres ved at lade VU være givet ved en konstant plus et led, der vokser med øget produktionsstørrelse q.

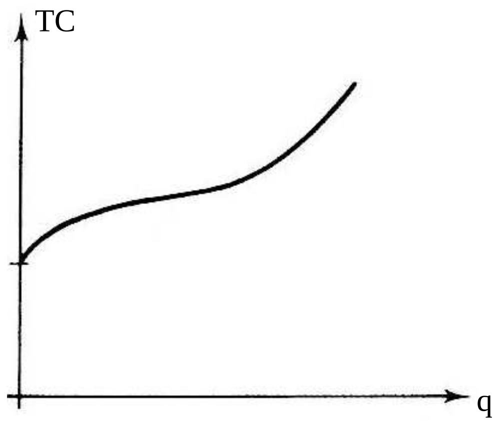
b) Bestem VC(q), hvis VU(q) = 28 + 0,006·q kr. pr. enhed,
og bestem TC(q), hvis det desuden er givet at FC = 230.000 kr.
Tegn grafen for TC(q) , $q \in [0; 12000]$

c) Overvej, at følgende faktorer kan få VU til at <u>aftage</u> ved øget produktion, og prøv at finde eventuelle andre faktorer end de følgende:
- øget produktion kan give kvantumsrabatter ved indkøb af råvarer
- øget produktion kan give rationalisering af produktionen
- øget produktion kan give lavere klargøringsomkostninger pr. produceret enhed (ved skift fra produktion af en varetype til en anden på det samme produktionsapparat)
- øget produktion kan give lavere administrationsomkostninger pr. produceret enhed

Modelteknisk kan sådanne faktorer indkalkuleres ved at lade VU være givet ved en konstant minus et led, der bliver numerisk større med øget produktionsstørrelse q.

d) Bestem VC(q), hvis VU(q) = 98 – 0,003·q kr. pr. enhed,
og bestem TC(q), hvis det desuden er givet at FC = 380.000 kr.
Tegn grafen for TC(q) , $q \in [0; 14000]$

9.7. Hvis vi analyserer de i opgave 9.6 beskrevne årsager til, at omkostningsfunktionerne VC og TC kan være progressive hhv. degressive, så ser vi, at den degressive tendens typisk vil forekomme ved "lave" produktionstal medens den progressive tendens vil forekomme ved "høje" produktionstal. (Dette kan også udtrykkes på følgende måde: VC og TC vokser med aftagende styrke ved relativt små produktionstal og med voksende styrke ved større produktionstal).



a) Argumentér for, at en graf for TC, <u>som dækker et større variationsområde</u> (definitionsmængde), dermed må forventes at have et udseende i stil med grafen på figuren, hvor q er produktionsantallet.

b) Argumentér for, at en <u>mulig</u> <u>model</u> for TC(q) kan være et voksende 3.gradspolynomium:

$$TC(q) = a \cdot q^3 + b \cdot q^2 + c \cdot q + d$$

q

Men der må stilles en række krav til koefficienterne a, b, c og d for at give en kurve som den viste. Vi ser, at hvis $TC(q) = a\cdot q^3 + b\cdot q^2 + c\cdot q + d$, så er $d = TC(0) = FC$ (de faste omkostninger), hvormed vi må have, at $d > 0$, samt at $VC(q) = a\cdot q^3 + b\cdot q^2 + c\cdot q$.

c) Argumentér for, at der desuden skal gælde, at: $a > 0$, $b < 0$ og $c \geq \frac{b^2}{3a}$.

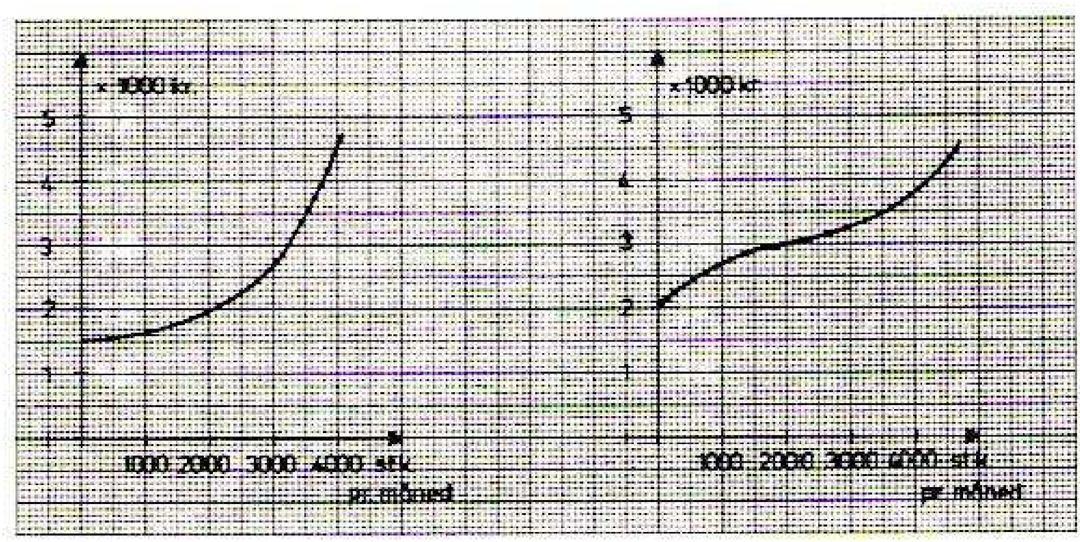
(*Vejledning:* Benyt, at $TC'(q) \geq 0$ for alle q, idet TC skal være voksende, samt at der må findes et positivt tal q_o (inflexionspunktet), hvor TC er degressiv for $q < q_o$ og TC er progressiv for $q > q_o$. (Bemærk at TC's degressivitet og progressivitet kan ses ud fra fortegnet for TC'')).

9.8. Et firma producerer en given vare, og har i den forbindelse årlige faste omkostninger på 600.000 kr. Det oplyses desuden, at de totale omkostninger Tomk(q) opfylder, at:

Tomk(1000) = 2.550.000 , Tomk(2000) = 3.000.000 , Tomk(4000) = 5.400.000

a) Bestem en forskrift for et tredjegradspolynomium, der kan bruges som model for Tomk(q) svarende til de kendte omkostningsværdier.
(Svaret skulle gerne blive: $Tomk(q) = 0{,}00025\cdot q^3 - 1{,}5\cdot q^2 + 3200\cdot q + 600.000$).
b) Bestem monotoniforhold for Tomk og Tomk′ – og gør rede for, at Tomk opfylder de forventninger vi har til en omkostningsmodel af denne type.
c) Vis, at koefficienterne i modellen opfylder kravene, der omtales i opgave 9.8 c).
d) Bestem inflexionspunktet for Tomk
e) Tegn grafen for Tomk(q), $q \in [0 ; 4000]$ - og kommentér resultatet.

9.9. På nedenstående figurer er tegnet graferne for to totalomkostningsfunktioner for givne produkter:



Besvar for hver af disse omkostningsfunktioner følgende spørgsmål:
a) Hvor stor er de faste omkostninger ?
b) Hvor stor er tilvæksten i omkostningerne, hvis produktionsstørrelsen ændres fra 3000 stk. pr. måned til 4000 stk. pr. måned ?
c) Hvor store er grænseomkostningerne ved en produktion på 2000 stk. pr. måned og ved 4000 stk. pr. måned ?

(fortsættes)

d) Ved hvilken produktionsstørrelse er de gennemsnitlige produktionsomkostninger (dvs. TC(q)/q) lig med 15 kr. pr. stk ?
e) Ved hvilken produktionsstørrelse er de gennemsnitlige produktionsomkostninger pr. stk. mindst, og hvor store er de da ?

Tillægsspørgsmål til grafen på den højre del af figuren:
f) Lav grafen om, så den viser de variable omkostninger VC(q).
g) Ved hvilken produktionsstørrelse q_o er de variable enhedsomkostninger VU(q) mindst, og hvor store er de da ?
h) Hvor store er grænseomkostningerne ved q_o ? Kommentér resultatet.

9.10. De variable enhedsomkostninger VU(q) er som omtalt s. 117 defineret som de samlede variable omkostninger VC(q) divideret med produktionsstørrelsen q.

a) Vis, at når VU(q) har minimum, så er VU(q) = Gromk(q)
b) Giv en geometrisk fortolkning af pkt. a). (Jfr. opgave 9.9 pkt. g) og h).

<u>Profitmaksimering.</u>

9.11. Ved produktionen af en vare i en virksomhed er de samlede variable omkostninger VC(x) givet ved:

$$VC(x) \;=\; 23x + \tfrac{1}{100}x^2$$

hvor x er antal producerede vareenheder.
De totale omkostninger TC ved en produktion af 1000 stk. af varen er 50.000 kr.
Virksomheden kan regne med at afsætte hele produktionen til en fast pris på 85 kr. pr. stk.

a) Beregn den optimale produktionsstørrelse.
(Husk at argumentere for, at den fundne produktionsstørrelse faktisk er optimal, dvs. giver størst mulig profit/dækningsbidrag)
b) Beregn den tilsvarende profit.

9.12. For en virksomhed er der for en given vare en lineær sammenhæng mellem prisen p og afsætningen pr. uge q. Hvis prisen er 60 kr. pr. stk., så er afsætningen pr. uge 200 stk., og hvis prisen er 90 kr. pr. stk., så er afsætningen pr. uge 80 stk.

a) Find en funktionsforskrift for prisen p som funktion af afsætningen q pr. uge.

Det har vist sig, at de samlede variable omkostninger VC(q) ved produktion af den betragtede vare er givet ved udtrykket:

$$VC(q) = \;0,001q^3 - 0,15q^2 + 10q$$

hvor q er det producerede antal vareenheder pr. uge.

b) Angiv den produktionsstørrelse pr. uge, hvor grænseomkostningerne er mindst.

Det antages, at der løbende kan sælges lige så meget, som der produceres, således at den afsatte og den producerede mængde vareenheder er ens.

c) Bestem den værdi af q – og den hertil svarende pris –, der giver maksimalt dækningsbidrag
(Husk at argumentere for, at der <u>er</u> tale om maximum).

9.13. De samlede variable omkostninger VC ved produktion af en given vare er:

$$VC(x) = 0,000015x^3 - 0,5kx^2 + 190x$$

hvor k er en positiv konstant, og hvor x er det producerede antal af varen.
Det har vist sig, at grænseomkostningerne er mindst ved en produktion på 2000 stk.

a) Bestem værdien af konstanten k.

Det har vist sig, at de totale omkostninger TC ved en produktion på 3000 stk. er 235.000 kr.

b) Bestem en funktionsforskrift for TC(x)

Alle varerne eksporteres til et stort udenlandsk marked, hvor de afsættes til en fast pris på 90 kr. pr. stk.
Det antages, at der afsættes lige så meget, som der produceres.

c) Bestem den optimale produktionsstørrelse.

9.14. Det har for en virksomhed vist sig, at afsætningen q af en given vare afhænger af prisen p på følgende måde:

$$q(p) = 150.000 \cdot p^{-2} \quad , \quad p \in [\,3;10\,]$$

a) Tegn grafen for q(p) – og kommentér resultatet, herunder rimeligheden af modellen.
b) Find en funktionsforskrift for prisen p som funktion af afsætningen q.
c) Find en funktionsforskrift for omsætningen som funktion af afsætningen q.

Virksomheden har erfaret, at omkostningerne ved produktion af 3000 stk. er 9000 kr. og ved produktion af 2400 stk. er omkostningerne 7500 kr. Det antages, at der er en lineær sammenhæng mellem produktionsstørrelsen og produktionsomkostningerne.
Det antages desuden, at der sælges lige så meget, som der produceres, således at den afsatte og den producerede mængde vareenheder q er ens.

d) Find en funktionsforskrift for profitten som funktion af q.
e) Bestem den værdi af q – og den dertil svarende pris –, der giver maksimal profit.

9.15. En virksomhed kan regne med afsætningsfunktionen: $q(p) = 50.000 - 5p$, hvor p er prisen pr. enhed af varen, og q er antallet af solgte vareenheder.
Virksomhedens grænseomkostninger er givet ved:

$$Gromk(q) = 0,000005q^2 - 0,2q + 8100$$

a) Bestem et udtryk for virksomhedens grænse omsætning Groms(q)
b) Bestem den optimale produktionsstørrelse, idet det antages, at der produceres lige så meget, som der afsættes.
(Husk at argumentere for, at den fundne løsning er optimal).

Stikordsregister, Symboloversigt.

Symboloversigt: