Appendix 1: Logistisk vækst og integralregning.

I forbindelse med eksponentielle vækstfunktioner er der tale om en vækstform, hvor funktionens væksthastighed er proportional med den aktuelle funktionsværdi, idet der gælder: $f'(x) = k \cdot f(x)$ eller $\Delta f(x) \approx k \cdot f(x) \cdot \Delta x$, når $\Delta x \approx 0$.
Undertiden er der for voksende funktioner tale om, at funktionen højst kan antage en given værdi M, og at funktionens væksthastighed både afhænger af den aktuelle funktionsværdi f(x) og af afstanden mellem f(x) og M, således at væksthastigheden bliver mindre, jo tættere f(x) kommer på M. Vi kan i denne sammenhæng have en ligning af typen: $f'(x) = k \cdot f(x) \cdot (M - f(x))$, og der gælder her følgende sætning:

Sætning A.1.1.
Hvis en positiv funktion f opfylder, at: $f'(x) = k \cdot f(x) \cdot (M - f(x))$ for alle x i et interval I, hvor k og M er positive konstanter, og hvor $M > f(x)$ for alle x, så findes der en anden positiv konstant c, så funktionsforskriften for f er givet ved:

$$f(x) = \frac{M}{1 + c \cdot e^{-kMx}} \quad , \; x \in I$$

Sætningen bevises ikke her. Interesserede læsere henvises til bogen: ”Differentialligninger og matematiske modeller”.

Eksempel A.1.2.
Om en funktion f er givet, at $f'(x) = 0{,}00004 \cdot f(x) \cdot (500 - f(x))$, at $0 < f(x) < 500$ for alle $x \in R$, samt at f(120) = 400. Ifølge sætning A.1.1 findes der en positiv konstant c, så:

$$f(x) = \frac{500}{1 + c \cdot e^{-0{,}00004 \cdot 500 \cdot x}} = \frac{500}{1 + c \cdot e^{-0{,}02x}}$$

Konstanten c findes ud fra informationen: f(120) = 400 på følgende måde:

$$400 = \frac{500}{1 + c \cdot e^{-0{,}02 \cdot 120}} \iff 1 + c \cdot e^{-2{,}4} = \frac{5}{4} \iff c = \frac{1}{4} \cdot e^{2{,}4} \iff c = 2{,}755794$$

Funktion f har altså forskriften: $$f(x) = \frac{500}{1 + 2{,}7558 \cdot e^{-0{,}02 \cdot x}} \quad , \; x \in R$$

<u>Øvelse:</u> Tegn grafen for f(x) og bestem $\lim_{x \to \infty} f(x)$ – og kommentér resultaterne. ♥

Funktioner af den type, der omtales i sætning A.1.1, kaldes <u>logistiske vækstfunktioner</u>, og størrelsen M kaldes ofte for <u>mætningsværdien</u> eller <u>bærekapaciteten</u>. En logistisk vækstmodel benyttes i sammenhænge, hvor der ”i begyndelsen” kan foregå en relativt fri (uhindret, uhæmmet) vækst, men hvor der efterhånden forekommer en slags ”mætning”. Der kan f.eks. være tale om

- alkoholprocenten i en vin under gæringen som funktion af tiden
- graden af solbrændthed som funktion af den tilbragte tid i solen
- det ugentlige salgstal af en ny ikke-sæsonpræget vare som funktion af tiden efter introduktionen på markedet. (Der er tale om en forgængelig forbrugsvaretype som f.eks. en bestemt slags madvare. Det forudsættes, at varen er et kvalitetsprodukt, der er i stand til at bevare en bestemt markedsandel, samt at der er tale om en nogenlunde konstant reklameindsats).

- størrelsen af en population i et givet miljø som funktion af tiden, når der ikke er ubegrænsede ressourcer (plads, næring, mv.).
- indlæringsgraden (dvs. den brøkdel, der er indlært af en given vidensmængde (f.eks. indholdet i en given matematikbog)) som funktion af den tid, der er anvendt på at studere stoffet
- udbredelsen, dvs. den samlede bestand på markedet, af en ny vare (en såkaldt ”varig forbrugsgode”, f.eks. GPS’er til biler eller DVD-maskiner) som funktion af tiden efter introduktionen af varen på markedet.

Øvelse A.1.3.
Lad f være en given logistisk vækstfunktion. Benyt udtrykket: $f'(x) = k\cdot f(x)\cdot(M - f(x)) = kM\cdot f(x)\cdot\left(1-\frac{f(x)}{M}\right)$ til at argumentere for, at når f(x) er meget mindre end M (dvs. ”i begyndelsen” af væksten), så er f næsten givet ved en eksponentiel vækstfunktion, altså en fri/uhæmmet vækst. ♥

Vi slutter denne korte behandling af logistisk vækst med (naturligvis) at finde en stamfunktion til vækstfunktionen:

Sætning A.1.4.
Hvis f er en logistisk vækstfunktion, så er en stamfunktion til f givet ved følgende formel:

$$\int \frac{M}{1+c\cdot e^{-kMx}}dx \;=\; \frac{1}{k}\cdot\ln(e^{kMx}+c)\;+q \;=\; Mx+\frac{1}{k}\cdot\ln(1+c\cdot e^{-kMx})\;+q$$

hvor $q \in R$ er en vilkårlig konstant.

Bevis:
Indholdet i sætningen kan kontrolleres ved at differentiere funktionerne på højre side af lighedstegnet og se, at det giver funktionen under integraltegnet (integrationsprøven).
Et egentligt bevis for sætningen forløber således:
Brøken inde i integraltegnet forlænges med e^{kMx}. Vi får: $\int \frac{M}{1+c\cdot e^{-kMx}}dx = \int \frac{M\cdot e^{kMx}}{e^{kMx}+c}dx$

I dette sidste integral anvender vi substitutionen: $t = e^{kMx}+c$ og $dt = kM\cdot e^{kMx}dx$, hvormed det kan omskrives således: $\int \frac{M\cdot e^{kMx}}{e^{kMx}+c}dx = \frac{1}{k}\int\frac{1}{t}dt = \frac{1}{k}\cdot\ln|t| + q$, hvor q er en vilkårlig konstant .

Hvis vi i dette udtryk indsætter, at $t = e^{kMx}+c$ og husker, at både e^{kMx} og c er positive størrelser, så fås den første del af formelen.
Det andet udtryk for stamfunktionen fås ved at konstatere, at $e^{kMx}+c = e^{kMx}\cdot(1+c\cdot e^{-kMx})$ og derefter anvende regneregler for ln og for almindelig reduktion. Detaljerne overlades til læseren.
Hermed er sætningen bevist. ♥

Det er en smagssag, om man vil anvende det første eller det andet udtryk for stamfunktionen, men i en given anvendelse kan valget af formel bl.a. afhænge af traditioner indenfor faget.

Appendix 2: Udregning af et bestemt integrale på grafregneren TI-83/TI-84

Vi ønsker at udregne det bestemte integrale $\int_a^b f(x)dx$ for en given funktion f.

Lad os som eksempel se på $f(x) = x^2 - 4$ i intervallet a = 1 til b = 4 .
Dette problem kan løses på to forskellige måder:

1. metode:

- Tryk på [MATH] og vælg 9: fnInt(- hvilket står for ”numerisk integration af funktionen”.
- Der står nu ” fnInt(” i displayet, og heri indtastes funktionsforskriften, den variable X, og de to grænser a og b, idet disse fire størrelser adskilles med et komma, altså: fnInt(f(x) , X , a , b)
  I det konkrete eksempel skal der altså stå: fnInt(X^2 – 4 , X , 1, 4)
- Nu trykkes der på [ENTER] og lommeregneren beregner resultatet , som i det konkrete eksempel er tallet 9.
- Bemærk, at hvis funktionsforskriften allerede står i [Y=]-menuen, f.eks. under Y_1, så kan man i stedet for skrive: fnInt(Y_1 , X , a , b)

2. metode:

- Indtast funktionsforskriften i [Y=]-menuen og tilpas vinduet, så det ønskede integrationsinterval er med i skærmbilledet, og så grafen i dette interval også er med.
- Tryk [2ND] [CALC] og vælg 7: $\int f(x)dx$
- Man spørges nu om hhv. ”Lower limit” (nedre grænse), hvor værdien a anføres, og om ”Upper Limit” (øvre grænse) hvor værdien b anføres. I begge tilfælde efterfølges de af [ENTER].
- Nu beregner grafregneren det ønskede bestemte integrale, alt imens at den grafisk viser, hvilket område der arbejdes i.
  Bemærk: Hvis funktionen antager negative værdier i integrationsintervallet, så er den beregnede værdi **IKKE** arealet af den punktmængde, som grafregneren skraverer !!!!
  I det konkrete tilfælde ovenfor fås igen værdien 9, men noget af grafen ligger under førsteaksen, så tallet 9 er arealet af det skraverede område over 1.aksen minus arealet af det skraverede område under 1.aksen. Prøv selv at udregne integralet fra 2 til 4 og bemærk, at værdien bliver større (10, 666667), og prøv at udregne integralet fra 1 til 2 og bemærk, at resultatet bliver negativt (– 1,666667). Hvis skraveringen ønskes fjernet imellem de forskellige beregninger tastes blot [2nd][DRAW] efterfulgt af 1: ClrDraw.

Arealet under grafen for en ikke negativ funktion.
Beregnes som det bestemte integrale på en af de to ovenfor omtalte måder, idet det bestemte integrale netop giver arealet, når funktionen er ikke-negativ.

Bemærk, at PC-programmer som **TI-interactive** og **Derive** m.fl. også kan behandle integraler.

En nærmere beskrivelse af dette emne ligger udenfor denne bogs rammer, men det gør ikke emnet mindre interessant eller relevant.

Appendix 3: Summationstegn

Ofte har man brug for at kunne anføre en række – almindeligvis forskellige – værdier med samme slags symbol. Vi kan f.eks. tænke på en bestemt persons indtægt igennem en periode på 10 år. Hvis vi ikke ønsker direkte at anføre de konkrete beløb, så kan de betragtede indtægter passende benævnes:

$$I_1 , I_2 , I_3 , I_4 , I_5 , I_6 , I_7 , I_8 , I_9 , I_{10}$$

hvilket ofte vil blive anført forkortet på f.eks. følgende måde: $I_1 , I_2 , I_3 , \ldots, I_{10}$
Tallene 1, 2, 3, ... ,10 kaldes i denne forbindelse fodtegn eller index, og de benyttes altså til at "udpege" en bestemt af de indicerede værdier (dvs. af I'erne).

I forbindelse med talrækker (rækker af indicerede tal/værdier) har man ofte brug for at angive summen af (en del af) de betragtede værdier. Der er her almindeligvis tale om værdier med fortløbende index.
Hvis vi f.eks. vil angive summen af de 15 første led i en talrække: $a_1, a_2 , \ldots, a_n , \ldots$ så kan dette gøres kort v.hj.a. summationstegnet Σ på følgende måde:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{15} = \sum_{i=1}^{15} a_i$$

Index'et "i" er en slags variabel (indexvariabel), der i det her betragtede tilfælde starter med at antage værdien 1, derefter værdien 2, osv. op til 15.
Der er – som ved andre variable – frit valg mht. det symbol, vi bruger som indexvariable. Der gælder altså f.eks., at:

$$\sum_{i=1}^{15} a_i = \sum_{j=1}^{15} a_j = \sum_{n=1}^{15} a_n = \sum_{s=1}^{15} a_s$$

Eksempel A.3.1.
En virksomhed producerer strygejern. Produktionstallene pr. uge er ikke konstante, idet de afhænger af en lang række faktorer, som varierer med tiden.
For et givet år var produktionstallene pr. uge: $q_1 , q_2 , q_3 , q_4 , \ldots\ldots q_{52}$, hvor f.eks. q_{17} betyder produktionstallet i uge 17.
Den totale årlige produktion det pågældende år (dvs. summen af disse 52 tal) kan anføres på følgende måde: $\sum_{w=1}^{52} q_w$, som læses: "summen af q_w, hvor w går fra 1 til 52".
Som indexvariabel anvendes altså her symbolet: w
Fra og med uge 14 til og med uge 20 er der monteret en fejlbehæftet termostat i strygejernene. Det samlede antal strygejern med fejlbehæftet termostat er derfor summen af tallene fra og med q_{14} til og med q_{20}. Denne sum kan skrives: $\sum_{w=14}^{20} q_w$

Appendix 4: Rumfangsbestemmelse af omdrejningssymmetrisk beholder.

I øvelse 2.1.15 omtales to eksperimentelle metoder til at bestemme rumfanget af en beholder, der er omdrejningssymmetrisk omkring en given akse. Den ene metode bygger på numerisk integration, den anden på simpel måling af rumfanget ved at hælde vand i beholderen, og derefter hælde vandet over i et måleglas.

De følgende målinger og beregninger skyldes Mikkel Kragh Hansen, 3t, Herning Gymnasium, som jeg hermed også skriftligt gerne vil takke for indsatsen.

Beholderen var en vase, der bortset fra den øverste ½ cm (som helt lades ude af betragtning), skønnedes at have samme tykkelse (målt til 7 mm), dvs. $t(x) = 0{,}007$ m for alle x.

De målte data og de enkelte led i den numeriske integration ses i tabellen på næste side. Ved at udregne middelsummen (altså summen af alle led i højre kolonne) fås resultatet: $0{,}000314\ \mathrm{m}^3$ hvormed vi ser, at rumfanget er givet ved:

$$V = \pi \cdot \int_a^b f(x)^2\,dx \;=\; \pi \cdot 0{,}000314\ \mathrm{m}^3 \;=\; 0{,}000987\ \mathrm{m}^3 \;=\; 0{,}987\ \text{Liter}$$

Ved måling af rumfanget med vand (hvor der kun fyldes vand op til ½ cm fra kanten) fik vi resultatet 1,01 L, hvormed de to resultater stemmer fint overens (med en afvigelse på 2,3 %).

x / m	d(x) / m	f(x) / m	$\Delta x \cdot f(x)^2$ / 10^{-6} m^3
0,000	0,043	0,0145	2,31
0,005	0,040	0,0130	2,00
0,010	0,039	0,0125	1,90
0,015	0,038	0,0120	1,81
0,020	0,036	0,0110	1,62
0,025	0,034	0,0100	1,45
0,030	0,033	0,0095	1,36
0,035	0,031	0,0085	1,20
0,040	0,030	0,0080	1,13
0,045	0,029	0,0075	1,05
0,050	0,029	0,0075	1,05
0,055	0,029	0,0075	1,05
0,060	0,028	0,0070	0,98
0,065	0,029	0,0075	1,05
0,070	0,030	0,0080	1,13
0,075	0,033	0,0095	1,36
0,080	0,037	0,0115	1,71
0,085	0,042	0,0140	2,21
0,090	0,048	0,0170	2,88
0,095	0,055	0,0205	3,78
0,100	0,062	0,0240	4,81
0,105	0,073	0,0295	6,66
0,110	0,078	0,0320	7,61
0,115	0,085	0,0355	9,03
0,120	0,090	0,0380	10,1
0,125	0,097	0,0415	11,8
0,130	0,100	0,0430	12,5
0,135	0,103	0,0445	13,3
0,140	0,105	0,0455	13,8
0,145	0,108	0,0470	14,6
0,150	0,109	0,0475	14,9
0,155	0,111	0,0485	15,4
0,160	0,110	0,0480	15,1
0,165	0,110	0,0480	15,1
0,170	0,109	0,0475	14,9
0,175	0,108	0,0470	14,6
0,180	0,106	0,0460	14,0
0,185	0,105	0,0455	13,8
0,190	0,103	0,0445	13,3
0,195	0,100	0,0430	12,5
0,200	0,098	0,0420	12,0
0,205	0,095	0,0405	11,3
0,210	0,091	0,0385	10,4

Appendix 5: Afstandskvadratloven.

Øvelse A.5.1.
Når radioaktiv stråling udsendes fra en given klump radioaktivt materiale, vil det antal partikler, som pr. tidsenhed passerer igennem en lille arealenhed, afhænge af arealenhedens afstand r fra det radioaktive materiale (se figur A.5.1):

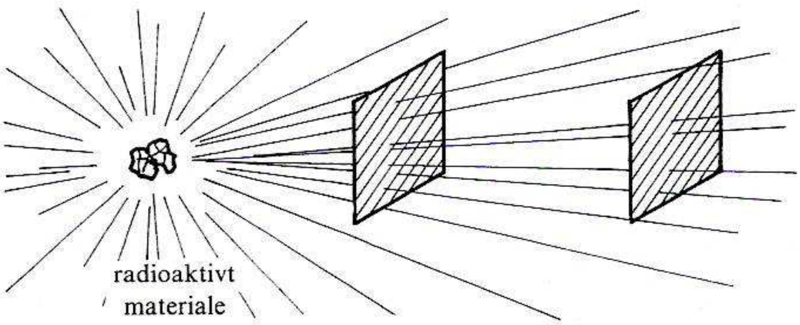


Fig. A.5.1

Når vi derfor måler aktiviteten med et Geiger-Müller-rør (GM-rør), som har et ganske bestemt følsomt område til registreringen af strålingen (se figur A.5.2 a)), så afhænger måleresultatet af afstanden r til den radioaktive kilde.

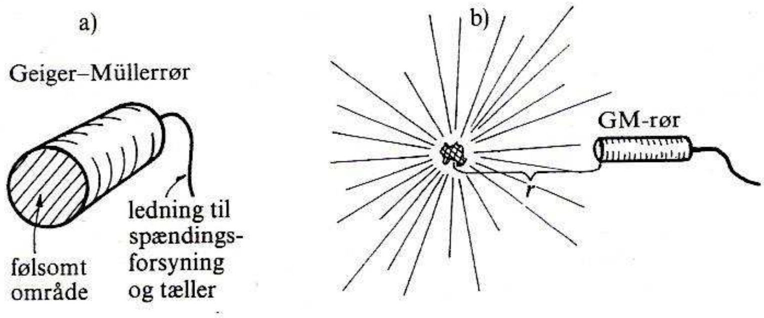


Fig. A.5.2

I nedenstående tabel er anført resultaterne for en radioaktiv kilde (gammakilde), hvis totale aktivitet kan betragtes som konstant (idet kilden har en meget stor halveringstid).
A(r) angiver det registrerede antal partikler pr. minut i afstanden r cm fra kilden.

r	2	5	8	12	15
A(r)	600	96	35	16	10

Gør rede for (v.hj.a. dobbeltlogaritmisk papir og/eller potentiel regression), at A(r) kan skrives på formen: $A(r) = A_1 \cdot r^b$, hvor $A_1 = A(1)$ – og angiv værdien af konstanten b. ♥

<u>Eksempel A.5.2.</u>

I øvelse A.5.1 viste det sig forhåbentlig, at b = – 2, således at der gælder: $A(r) = A_1 \cdot r^{-2}$
At det må forholde sig således, kan vi argumentere for på bl.a. følgende måde:
Den totale aktivitet A_{total} fra kilden (dvs. den mængde stråling, der udsendes pr. sekund) kan betragtes som konstant p.gr.a. kildens store halveringstid. Strålingen spreder sig ud fra kilden i alle mulige retninger, dvs. i en kugleform – og jo længere væk fra kilden man er, desto mindre er mængden af stråling pr. arealenhed.
Hvis vi lader I(r) betegne <u>strålingens intensitet (dvs. antal strålingspartikler pr. sekund pr. arealenhed</u> anbragt vinkelret på strålingsretningen) i afstanden r fra kilden, så må den <u>totale</u> aktivitet være lig med strålingens intensitet gange kuglens overfladeareal, (hvor kuglens overfladeareal og arealenheden, der indgår i definitionen af intensiteten måles i samme enhed, f.eks. m^2), dvs.:

$$A_{total} = I(r)\cdot 4\pi r^2 \quad \text{og dermed:} \quad I(r) = \frac{A_{total}}{4\pi \cdot r^2} = \frac{A_{total}}{4\pi}\cdot\frac{1}{r^2}$$

Hvis vi sætter r = 1 får vi, at intensiteten i afstanden 1 er: $I(1) = \frac{A_{total}}{4\pi}\cdot\frac{1}{1^2}$ og dermed:

$$\boxed{I(r) = I(1)\cdot\frac{1}{r^2} \quad \text{eller:} \quad I(r) = I(1)\cdot r^{-2}}$$

Vi ser, at <u>strålingens intensitet aftager med kvadratet på afstanden</u>, hvoraf navnet: ”*afstandskvadratloven*” kommer. *Bemærk også, at da <u>enheden</u> på I(r) og I(1) er den samme, regnes størrelsen r^{-2} <u>uden</u> enhed, blot <u>tal</u>værdien for r er udmålt i samme enhed som 1-tallet i I(1).*

Hvis vi f.eks. har, at intensiteten i afstanden 1 m er $8{,}2\cdot 10^{14}$ partikler pr. sekund pr. m^2, så er intensiteten i afstanden 3,7 m lig med: $8{,}2\cdot 10^{14}\cdot 3{,}7^{-2} = 5{,}99\cdot 10^{13}$ partikler pr. sekund pr. m^2 .

Disse beregninger bygger naturligvis på den forudsætning, at der ikke absorberes noget af strålingen på vejen fra kilden og ud til afstanden r. Da der er meget ringe absorption af gammastråling i atmosfærisk luft, er denne forudsætning imidlertid opfyldt med meget god tilnærmelse i eksemplet i øvelse A.5.1 med registrering af stråling med GM-røret.

Om størrelsen A(r) fra øvelse A.5.1gælder da, at: $A(r) = S_{GM}\cdot 60\text{sek/min}\cdot I(r) = c\cdot\frac{1}{r^2} = c\cdot r^{-2}$

hvor S_{GM} er arealet af GM-rørets følsomme område gange GM-rørets registreringsprocent (ikke alle partikler registreres, men en bestemt brøkdel heraf gør !), hvor der ganges med 60 sek/min, idet der i øvelse A.5.1 arbejdes med minutter, og hvor c er en konstant.
Hvis vi i $A(r) = c\cdot r^{-2}$ sætter r = 1, får vi: A(1) = c, dvs. at konstanten c er det registrerede antal partikler pr. minut, hvis GM-røret befinder sig i afstanden 1 fra kilden. Hvis vi vælger benævnelsen A_1 for A(1) og dermed har, at $c = A_1$, så fremkommer udtrykket: $A(r) = A_1 \cdot r^{-2}$.
(Bemærk igen, at afstandene r og 1 skal måles i samme enhed, f.eks. cm, men at man i beregningen af A(r) derefter kun bruger talværdien af r, ikke enheden).

Afslutningsvist skal der fremhæves endnu en generel kommentar vedr. enheder i beregningerne.
Hvis man f.eks. 5 km fra en (større) radioaktiv kilde – tænk f.eks. på et atomkraftværk efter en ulykke på en reaktortank – vil angive strålingsintensiteten, så vil en rimelig enhed for denne være: antal strålingspartikler pr. sek. pr. <u>m^2</u> , og altså ikke pr. km^2. Hvis I(1) angiver strålingsintensiteten i afstanden 1 km fra kilden, men også måles i enheden: antal strålingspartikler pr. sek. pr. m^2, så

gælder der imidlertid stadigvæk: $I(5) = I(1)\cdot 5^{-2}$, idet afstanden er blevet 5 gang større hvormed intensiteten er blevet 5^2 gange mindre. Dette kan der generelt argumenteres for på følgende måde: Hvis I(1) og I(r) er intensiteterne målt i antal strålingspartikler pr. sek. pr. m^2 i en afstand på hhv. 1 km og r km fra kilden, så gælder der (hvorfor ?), at:

$$A_{total} = I(r)\cdot 4\pi\cdot(1000r)^2 \quad \text{og} \quad A_{total} = I(1)\cdot 4\pi\cdot(1000)^2 ,$$

og dermed:

$$I(r)\cdot 4\pi\cdot(1000r)^2 = I(1)\cdot 4\pi\cdot(1000)^2 \iff I(r)\cdot r^2 = I(1) \iff I(r) = I(1)\cdot r^{-2}$$

Vi ser altså, at afstandskvadratloven:

$I(r) = I(1)\cdot r^{-2}$ gælder blot der anvendes samme tidsenhed og samme arealenhed i angivelsen af I(r) og I(1), **<u>og</u>** blot der er anvendt samme længdeenhed ved afstandsangivelserne 1 og r.

$I(r) = I(1)\cdot r^{-2}$ gælder altså f.eks., hvis I(r) og I(1) begge måles i antal strålingspartikler pr. sek. pr. m^2 **<u>og</u>** hvis afstandene 1 og r begge måles i km (eller i sømil, hvis det ønskes).
I stedet for at skrive I(1) anføres ofte I_1 , således at vi får: $I(r) = I_1\cdot r^{-2}$, men 1-tallet refererer i begge tilfælde til den samme afstandsenhed som anvendes for r, <u>en enhed der ellers lades ude af betragtning i beregninger med formlen</u>. ♥

<u>Øvelse A.5.3.</u>
Lav et eksperiment som det i øvelse A.5.1 skitserede – og efterprøv afstandskvadratloven. ♥

<u>Eksempel A.5.4.</u>
Afstandskvadratloven gælder i andre fysiske sammenhænge, hvor kilden til fænomenet med rimelighed kan betragtes som punktformig set fra registreringsstedet. Dette gælder f.eks. følgende:
a) Intensiteten af lyset fra en lyskilde (f.eks. intensiteten af lyset fra forskellige stjerner observeret på jorden).
b) Intensiteten af varmestråling fra en given varmekilde (f.eks. et bål).
c) Intensiteten (lydstyrken) af lyden fra en lydkilde (f.eks. en højtaler eller et tågehorn).
d) Den elektriske kraftpåvirkning på en ladning q fra en anden ladning Q.
e) Massetiltrækningskraften på et legeme med massen m fra et andet legeme med massen M (f.eks. en planet og en stjerne).♥

Som omtalt i eksempel A.5.2 gælder afstandskvadratloven under forudsætning af, at der ikke sker absorption undervejs fra kilden til ”observationsstedet” i afstanden r fra kilden. Hvis der f.eks. er nogle huse eller en skov i vejen for en lydbølge, så vil dens intensitet ikke opfylde afstandskvadratloven på den anden side af disse forhindringer.

Appendix 6: Grundæggende erhvervsøkonomiske emner og modeller.

Indledning

De følgende modeller kaldes ”økonomiske, behavioristiske modeller”.
Den økonomiske benævnelse er medtaget, idet der arbejdes med størrelser, som spiller en rolle for de betragtede virksomheders økonomiske resultater. Den behavioristiske benævnelse skyldes, at de medtagne eksempler (bortset fra evt. omkostningsberegninger) bygger på menneskers/kunders opfattelse og adfærd, hvormed der bestemt ikke kun er tale om økonomi, men også en række andre faktorer (behavioristisk = adfærds-/handlings-/reaktionsmæssigt).
Modeller af denne type er særdeles nyttige, såvel i forbindelse med økonomiske og sociologiske uddannelser som ved arbejdet med de relevante, grundlæggende mekanismer i "virkeligheden".
I forbindelse med uddannelser drejer det sig om de studerendes indlæring (forståelse og erkendelse) af økonomiske, behavioristiske sammenhænge, og om at have et kvantitativt beskrivelsesmiddel til mekanismer, der er vanskeligt forklarlige i en kvalitativ formulering.

Også i "virkeligheden" drejer det sig – for de mennesker, der arbejder med disse emner – om at have en grundlæggende og solid forståelse af og kendskab til økonomiske, behavioristiske sammenhænge. Mulighederne for i praksis at opstille brugbare modeller begrænses af en række faktorer. Først og fremmest skal de relevante medarbejdere kunne håndtere dette, men hertil kommer, at noget af det vanskeligste ved de økonomiske, behavioristiske modeller i praksis er at vælge en korrekt modeltype og at bestemme størrelsen/værdien af de parametre, der indgår i modellerne. Desuden spiller det behavioristiske element en sådan rolle, at der ofte bør arbejdes med stokastiske modeller (dvs. modeller der tager højde for tilfældigheder i og sandsynligheder for f.eks. kunders reaktionsmønster) som supplement til de her præsenterede deterministiske modeller (dvs. modeller hvor der på forhånd og med sikkerhed kan beskrives, hvad der vil ske). Men de grundlæggende mekanismer, der præsenteres her via de deterministiske modeller, fungerer imidlertid fint i "virkeligheden".

Matematiske forudsætninger for modellerne.

Ofte vil man i matematiske modeller ved bl.a. økonomiske beregninger antage både kontinuitet og differentiabilitet af de implicerede funktioner, selvom f.eks. et kronebeløb og eller et salgstal i sagens natur ikke kan variere helt glat og sammenhængende på ”mikroskopisk” niveau.
Vi interesserer os altså for matematiske modeller, hvor der såvel ved den uafhængige variable (den variable på 1. aksen) som ved den afhængige variable (funktionsværdien på 2.aksen) med rimelighed kan anlægges en kontinuert fortolkning (opfattelse), og hvor der derfor med rimelighed kan tegnes en (glat), sammenhængende kurve.
Differentialregning handler om beregning, fortolkning og vurdering af ændringer i funktionsværdier som konsekvens af mindre ændringer i de uafhængige variable. Dette harmonerer med forudsætningen om, at der kan anlægges en kontinuert fortolkning af de variable, og at de relevante funktioners grafer kan beskrives ved ”glatte” kurver – dvs. de betragtede funktioner er differentiable.
(Bemærk, at der ved en ”mindre ændring” forstås en ændring, som højst er nogle få procent af hele variationsområdet (definitionsmængden)).

Hvis vi f.eks. ser på den skat, der betales af en given skattepligtig indkomst, så gælder der følgende: Selv om den skattepligtige indkomst angives i hele kroner, så er en forskel på 1 kr. meget lille set i forhold til det variationsområde, der betragtes for skattepligtige indkomster (f.eks. fra 0 kr. til 1.000.000 kr. pr. år). Det er derfor rimeligt at benytte en kontinuert model for skatten og den skattepligtige indkomst.

Tilsvarende kommentarer kan anføres, hvis vi f.eks. ser på

- afsætningen af et givet produkt på et marked som funktion af prisen, (og dermed også på omsætningen for produktet). Der skal være så stor en afsætning, at en afsætningsændring på 1 enhed kan betragtes som meget lille - og at der dermed kan benyttes en kontinuert model, dvs. en kontinuert variation af afsætningen ved en gradvis (kontinuert) ændring af prisen.
- produktionsomkostningerne som funktion af produktionsantallet ved produktion af f.eks. sikkerhedsnåle, konservesdåser eller strygejern.

Men hvis det derimod drejer sig om produktion af boreplatforme eller tankskibe, så vil en "enhed" være så "stor", at en kontinuert model vil være urimelig.

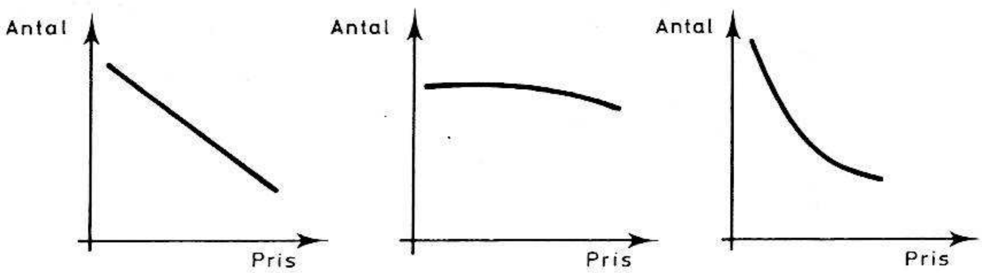
Afsætning.

Ved en virksomheds *afsætning* af en given vare (et givet produkt) forstår vi antallet af vareenheder, som virksomheden afsætter (sælger) på et givet marked indenfor et bestemt tidsrum.

En virksomheds afsætning (af en given vare på et givet marked indenfor en given tidsperiode) afhænger af mange ting, bl.a. af varens pris, varens kvalitet, den reklameindsats virksomheden ofrer for varen på markedet, konkurrencen på markedet, markedets demografiske struktur, salgskanalerne (hvem sælger varen) og evt. sæsonforhold.
Vi vil hér primært se på afsætningens afhængighed af prisen, men vi vil dog også berøre reklameindsatsens betydning.

Lad os betragte en virksomhed, som producerer en given vare (f.eks. termokander, cigaretter, vægtæpper eller småkager). Antallet q af vareenheder, som virksomheden pr. tidsperiode (f.eks. pr. uge, pr. måned eller pr. år) kan afsætte på markedet, afhænger af den pris p, virksomheden forlanger pr. vareenhed. Det vil her almindeligvis gælde, at jo højere pris der fastsættes, desto mindre er det antal, der kan afsættes/sælges.
Vi må således forvente, at den funktion f, som er fastlagt ved: $q = f(p)$, er aftagende. (f er altså den funktion, som til en given pris p giver os det antal vareenheder q, som det er muligt at afsætte til prisen p). Funktionen f kaldes virksomhedens *afsætningsfunktion* for den pågældende vare.

På nedenstående figur A.6.1 ses tre mulige grafer for sådan en funktion f:



a) b) c)

Fig. A.6.1

Vi kan knytte følgende kommentarer til graferne:

a) Denne graf illustrerer, at det afsætningsmulige antal falder jævnt, når prisen stiger. En kurve med dette udseende vil være typisk for en vare, som kunderne egentlig har behov for, men som man dog kan undvære, hvis varen bliver ”for dyr” (hvilket jo er et relativt begreb).
Vi kan formodentlig forvente, at afsætningen af termokander vil følge denne kurve.
b) Denne graf illustrerer, at det afsætningsmulige antal næsten ikke falder selvom prisen sættes væsentligt op. En kurve med dette udseende vil være typisk for en vare, som kunderne føler et stærkt behov for (næsten) ”uanset prisen”, f.eks. cigaretter.
c) Denne graf illustrerer, at det afsætningsmulige antal falder relativt hurtigt, hvis prisen øges. En kurve med dette udseende vil være typisk for en vare, som kunderne ikke har særligt stort behov for, og som man derfor vil undlade at købe, hvis prisen bliver ”for høj”, f.eks. vægtæpper eller småkager.

Uanset om vi er i situation a), b) eller c), er afsætningsfunktionen aftagende – og dette er også det almindelige. Der findes dog specielle situationer ved specielle varer, hvor afsætningen stiger med en forøgelse af prisen, bare prisen er høj nok. (Dette kaldes Veblen-effekten, og man kan lidt populært sige, at denne effekt bygger på en psykologisk mekanisme af typen: jo højere prisen er, desto mere attraktivt er det at vise omverdenen at man har råd til at købe varen).
Vi vil imidlertid holde os til almindelige aftagende afsætningsfunktioner – som vist på figuren.

På dette tidspunkt skal det omtales, at der findes et begreb, der hedder *efterspørgsel*. Efterspørgslen af en given vare(type) i en given tidsperiode er en størrelse knyttet til markedet, nemlig det samlede antal vareenheder der kan afsættes på markedet (når varen har en given pris). I modsætning hertil står en størrelse knyttet til virksomheden og markedet, nemlig afsætningen, dvs. antallet af vareenheder, som den konkrete virksomhed afsætter på markedet.
Som bekendt er der almindeligvis mange producenter (virksomheder), som leverer den samme vare(type) til et givet marked – tænk. f.eks. på køkkenruller, cykler, æg, PC’er eller kattemad. Der er m.a.o. *konkurrence* på markedet, og de enkelte leverandører (virksomheder) har kun en vis markedsandel (som man så almindeligvis kæmper for at udvide – eller i det mindste fastholde).
Undertiden findes der ”storleverandører” til markedet, som enten har *monopol* (dvs. de er den eneste leverandør af den givne vare til markedet) eller som har de facto monopol (dvs. de har så stor en markedsandel, at de mere eller mindre kan opføre sig, som om de har monopol). Dette gælder f.eks. forsyningen af mejeriprodukter i Danmark.
Bemærk, at der antalsmæssigt kun er sammenfald mellem afsætning og efterspørgsel for monopolvirksomheder – og selv her kan det tænkes, at efterspørgslen er større end afsætningen, men at monopol-virksomheden ikke kan eller vil levere yderligere varer til markedet. Vi bevæger os imidlertid nu for langt væk fra intentionerne med disse sider – og slutter emnet her.

Hvis vi igen vender tilbage til omtalen af figur A.6.1 a), b) og c), så kan en af årsagerne til at afsætningen falder, hvis varen bliver ”for dyr” altså netop være, at der findes konkurrerende produkter på markedet, og at (nogle af) kunderne derfor skifter til disse.
Der findes imidlertid en række ”mekanismer” som har med beskatning af varer, gennemsigtighed af markedet, tilgængeligheden af varer mm. at gøre, som bevirker, at mange varer stort set koster det samme uanset leverandøren – og at det så er andet end prisen, man må konkurrere på.

En matematisk beskrivelse af afsætningsfunktioner

De tre modeller præsenteret på figur A.6.1 kan beskrives ved følgende fire modelforskrifter q = f(p)

a) moderat prisafhængighed / moderat udvikling (figur A.6.1 a)). En mulig model er her:

$$q = a\cdot p + q_o \,, \qquad \text{hvor } a < 0 \text{ og } q_o > 0$$

b) lille prisafhængighed / ufølsom udvikling (figur A.6.1 b)). En mulig model er her følgende:

$$q = w - s\cdot e^{r\cdot p} \text{ , hvor } w > 0,\ s > 0,\ r > 0 \text{ og } r \text{ er ”lille”.}$$

c) stor prisafhængighed / følsom udvikling (figur A.6.1 c)). En mulig model bygger på, at en given prisændring giver en bestemt relativ/procentuel ændring i afsætningen, dvs. at afsætningen er givet ved en eksponentiel vækstfunktion (eksponentielt aftagende):

$$q = c\cdot b^{p} \text{ , } \quad \text{hvor } c > 0 \text{ og } 0 < b < 1$$

d) stor prisafhængighed / følsom udvikling (figur A.6.1 c)). En anden mulig model bygger på, at en given procentuel prisændring giver en bestemt procentuel ændring i afsætningen, dvs. at afsætningen er givet ved en (aftagende) potentiel vækstfunktion:

$$q = k\cdot p^{-d} \text{ , } \qquad \text{hvor } k > 0 \text{ og } d > 1$$

Forudsætningen d > 1 (i stedet for blot d > 0) for modellen i pkt. d) forklares ikke her.

Det er i øvrigt – uanset hvilken model man ser på – vigtigt at bemærke, at modellen (forskriften) kun gælder i et mere eller mindre begrænset interval (definitionsmængden for forskriften). Begrænsninger fastlægges af en lang række faktorer der har med forudsætningerne for modellen og dens parametres størrelse at gøre.
Bemærk i forlængelse af dette, at det er klart, at hvis $p \approx 0$, men dog $p > 0$ (dvs. hvis prisen er ganske lille), så vil q blive meget stor i alle tilfælde uanset model (hvorfor mon ?), ligesom det er klart, at vi f.eks. ikke kan have $q < 0$, hvilket matematisk set er muligt i model a) og b) bare p er stor nok.

Øvelse A.6.1.
Tegn grafen for q = f(p) i hver sit koordinatsystem for hver af følgende afsætningsfunktioner:

a) $q = 35.000 - 260\cdot p \ , \quad p \in [47; 90]$

b) $q = 55.000 - 8000\cdot e^{0{,}02\cdot p} \ , \quad p \in [12; 50]$

c) $q = 655.000\cdot 0{,}958^{p} \ , \quad p \in [80; 140]$

d) $q = 30.000\cdot p^{-1{,}13} \ , \quad p \in [0{,}5; 6]$

Kommentér resultaterne. ♥

Omsætning.

Ved en virksomheds *omsætning* Oms for en given vare på et givet marked indenfor en given tidsperiode forstås afsætningen q gange prisen p, dvs. omsætningen er antallet af kroner (eller anden møntenhed) som virksomheden får ind ved salget af varen på markedet indenfor det givne tidsrum.
Virksomhedens omsætning Oms vil altså med de indførte betegnelser være givet ved:

$$\text{Oms}(p) = q\cdot p = f(p)\cdot p$$

Hvis virksomheden f.eks. sælger 8000 enheder til prisen 140 kr. pr. enhed, så er omsætningen 8000·140 = 1.120.000 kr.
Vi har her set på omsætningen som funktion af prisen, men som vi straks skal se, kan vi også angive omsætningen som funktion af den afsatte mængde.

Da q = f(p) og da f er injektiv (idet f er aftagende) har vi: $p = f^{-1}(q)$.
Funktionen $f^{-1}(q)$ kaldes ofte for *prisfunktionen*, og den angiver den (maksimale) pris p som virksomheden kan forlange, for at virksomheden i den betragtede tidsperiode kan få afsat q enheder.
Vi ser hermed, at omsætningen som funktion af afsætningen (den afsatte mængde) q er givet ved:

$$\text{Oms}(q) = q\cdot p = q\cdot f^{-1}(q)$$

Øvelse A.6.2.

a) Bestem den omvendte funktion til hver af de fire funktioner omtalt i øvelse A.6.1 (husk definitionsmængden)
b) Bestem et funktionsudtryk for Oms(q) i hvert af de fire tilfælde.
c) Find omsætningen ved et salg på 44.000 vareenheder i modellen fra øvelse A.6.1 b) ♥

I forlængelse af øvelse A.6.2 anfører vi følgende resultater:

Omsætningsfunktionen Oms(q) som funktion af det afsatte antal vareenheder q er for hver af de fire anførte afsætningsmodeller q = f(p) givet ved:

a) $\text{Oms}(q) = \frac{1}{a}\cdot(q - q_o)\cdot q$, hvor $q = a\cdot p + q_o$, ($a < 0$ og $q_o > 0$)

b) $\text{Oms}(q) = \frac{1}{r}\cdot(\ln(w-q) - \ln s)\cdot q$, hvor $q = w - s\cdot e^{r\cdot p}$, ($w > 0$, $s > 0$, $r > 0$ og r er "lille")

c) $\text{Oms}(q) = \frac{\ln q - \ln c}{\ln b}\cdot q$, hvor $q = c\cdot b^p$, ($c > 0$ og $0 < b < 1$)

d) $\text{Oms}(q) = q\cdot e^{\frac{\ln k - \ln q}{d}} = q\cdot \exp\left(\frac{\ln k - \ln q}{d}\right)$, hvor $q = k\cdot p^{-d}$, ($k > 0$ og $d > 1$)

Bevis:
Vi beviser b) og d), og overlader a) og c) til læseren. Metoden er for alle fire funktioner, at da $\text{Oms}(q) = q\cdot p = q\cdot f^{-1}(q)$, skal vi finde et udtryk for $f^{-1}(q)$ og derefter gange dette med q.

<u>Ad b):</u> $q = w - s\cdot e^{r\cdot p} \Leftrightarrow e^{r\cdot p} = \frac{w-q}{s} \Leftrightarrow r\cdot p = \ln(w-q) - \ln s \Leftrightarrow p = \frac{1}{r}\cdot(\ln(w-q) - \ln s)$

hvoraf det anførte udtryk fremkommer ved at gange med q.

<u>Ad d):</u> $q = k\cdot p^{-d} \Leftrightarrow \ln q - \ln k = -d\cdot \ln p \Leftrightarrow \ln p = \frac{\ln k - \ln q}{d} \Leftrightarrow p = e^{\frac{\ln k - \ln q}{d}}$

hvoraf det anførte udtryk fremkommer ved at gange med q. Desuden kan e^x skrives som exp(x) ♥

Som bekendt er definitionsmængden for en omvendt funktion lig med værdimængden for den oprindelige funktion. Da alle fire afsætningsfunktioner er aftagende og kontinuerte, er definitionsmængden for prisfunktionerne og omsætningsfunktionerne (som funktion af antal afsatte vareenheder) givet ved: $[f(p_{max}) ; f(p_{min})]$, hvor p_{max} og p_{min} er hhv. den største og den mindste pris i definitionsmængden for afsætningsfunktionen f. (Jfr. øvelse A.6.1 og A.6.2).

Grænseomsætning
Hvis antallet af afsatte varer ændres fra q_o til q, så får vi tilvæksten: $Oms(q) - Oms(q_o)$ i omsætningen, hvormed den gennemsnitlige omsætningstilvækst pr. ekstra vareenhed er lig med:

$$\frac{Oms(q) - Oms(q_o)}{q - q_o}$$

Hvis $q - q_o$ er "lille", så er denne brøk ca. lig med $Oms'(q_o)$ – jfr. de indledende kommentarer om de matematiske forudsætninger om modellerne.
Størrelsen $Oms'(q_o)$ kaldes *grænseomsætningen* $Groms(q_o)$ (eller marginalomsætningen).
Hvis en tilvækst på 1 enhed kan regnes for "lille" (jfr. igen de indledende kommentarer om de matematiske forudsætninger for modellerne), så kan vi sige, at grænseomsætningen angiver tilvæksten i omsætningen ved at afsætte en ekstra enhed.

Øvelse A.6.3.
Bestem Groms(44000) for afsætningsmodellen fra øvelse A.6.1 b) (Se øvelse A.6.2). ♥

Omkostninger
En virksomheds *omkostninger* ved at producere en given vare kan deles i *de faste omkostninger* (FC), som for en eksisterende produktion ikke afhænger af produktionsstørrelsen, og *de variable omkostninger* (VC), som afhænger af hvor mange vareenheder der produceres.

De faste omkostninger dækker f.eks. el, vand og varme til virksomheden, forrentning af den investerede kapital i bygninger, løn til en ikke-producerende direktion osv., medens de variable omkostninger er knyttet direkte til produktion og distribution af varerne (f.eks. råvarer og lønninger).
VC er en voksende funktion af antallet q af producerede vareenheder (jo flere varer der produceres, desto mere koster det!).
Bemærk, at såvel ved FC som VC er der tale om omkostninger knyttet til produktionen i en given tidsperiode.

Hvis virksomheden kun producerer én vare, så er virksomhedens *totale omkostninger* TC (som undertiden også benævnes Tomk) givet ved: TC = VC + FC, eller mere udførligt:

$$TC(q) = VC(q) + FC$$

idet de faste omkostninger ikke afhænger af produktionsstørrelsen q.
Hvis virksomheden derimod producerer flere forskellige vare(typer), så er det kun i sjældne tilfælde muligt at fastlægge, hvor stor en del af de faste omkostninger, der hører til hver enkelt vare. (Man kan selvfølgelig forsøge sig med en procentuel andel af de faste omkostninger, svarende til den konkrete vares procentuelle andel af f.eks. omsætningen. Men som man nok let kan forestille sig, så vil også dette kun undtagelsesvist være rimeligt). Man må derfor i de samlede beregninger for virksomheden medtage VC(q) for den givne vare, og så indkalkulere de samlede faste omkostninger til sidst (se begrebet dækningsbidrag senere i teksten).
Ved analyse og beregning af VC(q) er man ofte interesseret i at se på *de variable enhedsomkostninger* VU(q) (dvs. de variable omkostninger pr. enhed, når der produceres q enheder). Disse er givet ved:

$$VU(q) = \frac{VC(q)}{q}$$

Hvis de variable omkostninger ved at producere 800 enheder af en given vare er 13.200 kr., så er $VU(800) = \frac{13200}{800}$ kr. pr. stk. = 16,50 kr. pr. stk.

Undertiden er VU konstant, dvs. den har den samme størrelse uanset hvor mange enheder man producerer (indenfor visse grænser – svarende til omkostningsfunktionens definitionsmængde). I dette tilfælde er $VC(q) = VU\cdot q$ og $TC(q) = VU\cdot q + FC$. Hvis f.eks. VU er konstant 28 kr., og de faste omkostninger er 230.000 kr., så er $VC(q) = 28\cdot q$ og $TC(q) = 28\cdot q + 230.000$.
Vi ser altså, at omkostningsfunktionerne VC(q) og TC(q) bliver lineære funktioner, når VU er konstant.

Det er imidlertid vigtigt at bemærke, at VU ofte ikke er konstant, men derimod afhænger af, hvor mange enheder q man producerer. VU bliver altså en funktion af q, dvs. VU(q).
Der er visse faktorer, der bevirker at VU aftager ved øget produktion, og der er andre faktorer der bevirker, at VU vokser ved øger produktion.

Faktorer, der kan få VU til at vokse ved øget produktion (læseren opfordres til at prøve at finde andre faktorer end de følgende):
- øget produktion kan forøge spildprocenten for materialer til produktionen
- øget produktion medfører øget slidtage på maskinerne
- øget produktion kan medføre anvendelse af overarbejdsbetaling eller skifteholdsbetaling
- øget produktion kan kræve flere ansatte og måske større udskiftningshastighed af personalet, hvilket resulterer i nedsat produktivitet pr. ansat (idet der bl.a. bliver behov for en forøget oplæring af de ansatte)
- hvis den virksomhed, der leverer råmateriale til produktionen, dominerer markedet, så kan en øget produktion medføre en forøgelse af indkøbsprisen, idet efterspørgslen forøges

Modelteknisk kan sådanne faktorer indkalkuleres ved at lade VU være givet ved en konstant plus et led, der vokser med øget produktionsstørrelse q. Det kunne f.eks. tænkes, at $VU(q) = 28 + 0{,}006\cdot q$ kr. pr. enhed, hvormed vi får: $VC(q) = VU(q)\cdot q = 28\cdot q + 0{,}006\cdot q^2$ – og hvis de faste omkostninger svarende hertil er 230.000 kr., så får vi: $TC(q) = 0{,}006\cdot q^2 + 28\cdot q + 230.000$.

Øvelse A.6.4.
Tegn grafen for $TC(q) = 0{,}006\cdot q^2 + 28\cdot q + 230.000, \quad q \in [0;\ 12000]$ ♥

Vi ser, at hvis VU(q) bliver større ved forøgelse af produktionstallet q, så vil omkostningsfunktionerne VC(q) og TC(q) krumme opad (få en øget tangenthældning). Vi siger da, at der er tale om en *progressiv* omkostningsfunktion.

Faktorer, der kan få VU til at aftage ved øget produktion (læseren opfordres til at prøve at finde andre faktorer end de følgende):
- øget produktion kan give kvantumsrabatter ved indkøb af råvarer
- øget produktion kan give rationalisering af produktionen
- øget produktion kan give lavere klargøringsomkostninger pr. produceret enhed (ved skift fra produktion af en varetype til en anden på det samme produktionsapparat)
- øget produktion kan give lavere administrationsomkostninger pr. produceret enhed

Modelteknisk kan sådanne faktorer indkalkuleres ved at lade VU være givet ved en konstant minus et led, der bliver numerisk større med øget produktionsstørrelse q. Det kunne f.eks. tænkes, at $VU(q) = 98 - 0{,}003\cdot q$ kr. pr. enhed, hvormed vi får: $VC(q) = VU(q)\cdot q = 98\cdot q - 0{,}003\cdot q^2$ – og hvis de faste omkostninger er 380.000 kr., så får vi: $TC(q) = -0{,}003\cdot q^2 + 98\cdot q + 380.000$.

Øvelse A.6.5.
Tegn grafen for $TC(q) = -0{,}003 \cdot q^2 + 98 \cdot q + 380.000, \quad q \in [0; 14000]$ ♥

Vi ser, at hvis VU(q) bliver mindre ved forøgelse af produktionstallet q, så vil omkostningsfunktionerne VC(q) og TC(q) krumme nedad (få en aftagende tangenthældning). Vi siger da, at der er tale om en *degressiv* omkostningsfunktion.

Hvis vi analyserer de beskrevne årsager til, at omkostningsfunktionerne VC og TC kan være progressive hhv. degressive, så ser vi, at den degressive tendens typisk vil forekomme ved ”lave” produktionstal medens den progressive tendens vil forekomme ved ”høje” produktionstal. (Dette kan også udtrykkes på følgende måde: VC og TC vokser med aftagende styrke ved relativt små produktionstal og med voksende styrke ved større produktionstal).
En graf for TC, som dækker et større variationsområde (definitionsmængde), kan altså forventes at have et udseende i stil med det der er vist på nedenstående figur A.5.2, hvor q er produktionsantallet:

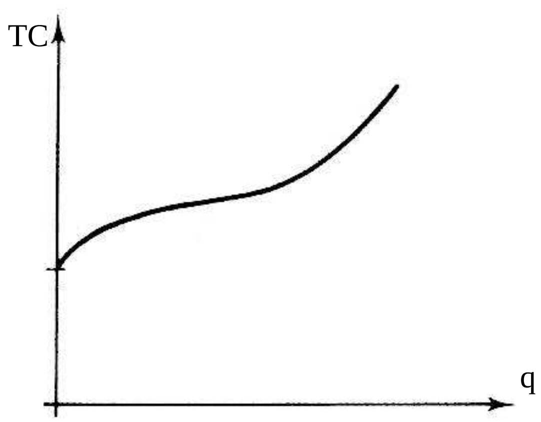


Fig. A.6.2

En mulig model for TC(q) ses da at være et voksende tredjegradspolynomium:

$$TC(q) = a \cdot q^3 + b \cdot q^2 + c \cdot q + d$$

Men der må stilles en række krav til koefficienterne a, b, c og d for at give en kurve som den viste (se øvelse A.6.9).

Eksempel A.6.6.
Det har for en given produktion i en given virksomhed vist sig, at der er følgende sammenhørende værdier for de totale omkostninger TC og produktionstallet q:

Q (stk.)	0	5000	10.000	20.000
TC (kr.)	100.000	160.000	180.000	235.000

Vi vil undersøge, om det er muligt at beskrive TC ved et tredjegradspolynomium, dvs. om vi kan få opfyldt, at: $TC(q) = a \cdot q^3 + b \cdot q^2 + c \cdot q + d$.
Da de faste omkostninger FC = TC(0) = d ses, at d = 100.000. Herefter bruges de tre andre sammenhørende værdier af q og TC til at opstille tre ligninger med tre ubekendt: a, b og c. Vi får:

$$\text{I:}\quad 160.000 = a\cdot 5000^3 + b\cdot 5000^2 + c\cdot 5000 + 100.000$$
$$\text{II:}\quad 180.000 = a\cdot 10.000^3 + b\cdot 10.000^2 + c\cdot 10.000 + 100.000$$
$$\text{III:}\quad 235.000 = a\cdot 20.000^3 + b\cdot 20.000^2 + c\cdot 20.000 + 100.000$$

Disse tre ligninger med tre ubekendt løses ved at finde c udtrykt ved a og b i ligning I, og derefter indsætte dette udtryk ($c = 12 - a\cdot 25.000.000 - b\cdot 5000$) i ligning II og III, som herved bliver til to ligninger med to ubekendt (a og b). Disse to ligninger løses på sædvanlig facon, hvilket overlades til læseren. Vi finder: $a = 4{,}5\cdot 10^{-8}$ og $b = -1{,}475\cdot 10^{-3}$. Indsættes disse værdier i udtrykket for c finder vi (kontrollér), at: $c = 18{,}25$.

Alt i alt ser vi, at:

$$TC(q) = 4{,}5\cdot 10^{-8}\cdot q^3 - 1{,}475\cdot 10^{-3}\cdot q^2 + 18{,}25\cdot q + 100.000 \qquad ♥$$

Øvelse A.6.7.

Betragt omkostningsfunktionen TC fra eksempel A.6.6 med definitionsmængden: $q \in [0\,;\,22.000]$

a) Bestem monotoniforholdene for TC.
(Hvad forventer vi af monotoniforholdene for TC ? Er dette opfyldt ?)

b) Bestem monotoniforholdene for TC' (dvs. for tangenthældningen).
(TC′skulle gerne være aftagende (dvs. TC skulle gerne være degressiv) i ”den lave ende” af definitionsmængden, og TC′skulle gerne være voksende (dvs. TC skulle gerne være progressiv) i ”den høje ende” af definitionsmængden. Er dette tilfældet ?)

c) Den værdi af q, hvor TC skifter fra at være degressiv til at være progressiv kaldes inflexionspunktet q_o for TC. Hvilken værdi har q_o ?

d) Tegn grafen for $TC(q)$, $q \in [0\,;\,22.000]$ - og kommentér resultatet. ♥

Øvelse A.6.8.

Et firma producerer en given vare, og har i den forbindelse årlige faste omkostninger på 600.000 kr. Det oplyses, at de totale omkostninger Tomk(q) opfylder, at:

$$Tomk(1000) = 2.550.000\,,\quad Tomk(2000) = 3.000.000\,,\quad Tomk(4000) = 5.400.000$$

a) Bestem en forskrift for et tredjegradspolynomium, der kan bruges som model for Tomk(q) svarende til de kendte omkostningsværdier.
(Svaret skulle gerne blive: $Tomk(q) = 0{,}00025\cdot q^3 - 1{,}5\cdot q^2 + 3200\cdot q + 600.000$).

b) Bestem monotoniforhold for Tomk og Tomk′ – og gør rede for, at Tomk opfylder de forventninger vi har til en omkostningsmodel af denne type.

c) Bestem inflexionspunktet for Tomk (Se evt. øvelse A.6.7, pkt. c)

d) Tegn grafen for Tomk(q), $q \in [0\,;\,4000]$ - og kommentér resultatet. ♥

Øvelse A.6.9.

Hvis et tredjegradspolynomium $a\cdot q^3 + b\cdot q^2 + c\cdot q + d$ skal kunne bruges som en model for en omkostningsfunktion, så er der nogle krav til koefficienterne a, b, c og d, som skal være opfyldt.
Vi ser, at hvis $TC(q) = a\cdot q^3 + b\cdot q^2 + c\cdot q + d$, så er $d = TC(0) = FC$ (de faste omkostninger), hvormed vi må have, at $d > 0$, samt at $VC(q) = a\cdot q^3 + b\cdot q^2 + c\cdot q$.

Argumentér for, at der desuden skal gælde, at: $a > 0$, $b < 0$ og $c \geq \frac{b^2}{3a}$.

(<u>*Vejledning:*</u> Benyt, at $TC'(q) \geq 0$ for alle q, idet TC skal være voksende, samt at der må findes et <u>positivt</u> tal q_o (inflexionspunktet), hvor TC er degressiv for $q < q_o$ og TC er progressiv for $q > q_o$.
(Bemærk at TC's degressivitet og progressivitet kan ses ud fra fortegnet for TC'')). ♥

Øvelse A.6.10.
Vis, at koefficienterne i modellerne i eksempel A.6.6 og øvelse A.6.8 opfylde kravene, der omtales i øvelse A.6.9. ♥

Grænseomkostninger
Som ved omsætningen definerer vi *grænseomkostningerne* Gromk(q) ved:

$$\text{Gromk}(q) \;=\; TC'(q) \;=\; VC'(q)$$

Bemærk, at $TC'(q) = VC'(q)$, idet FC er en konstant, som forsvinder ved differentiationen.
Hvis en tilvækst på 1 enhed kan regnes for "lille" (jfr. igen de indledende kommentarer om de matematiske forudsætninger for modellerne), så kan vi sige, at grænseomkostningerne angiver tilvæksten i de totale eller i de variable omkostninger ved at producere en ekstra enhed.

Profit og dækningsbidrag
Vi antager nu, at virksomheden på baggrund af kendskab til sin afsætningsfunktion producerer lige så mange vareenheder q, som den kan afsætte. Virksomhedens *profit (fortjeneste, gevinst)* Pr(q) er da givet ved:

$$\text{Pr}(q) = \text{Oms}(q) - TC(q)$$

Virksomhedens *dækningsbidrag* DB(q) ved produktion og salg af q vareenheder er givet ved:

$$DB(q) = \text{Oms}(q) - VC(q)$$

Dækningsbidraget er, som navnet siger, den pågældende vares bidrag til at dække virksomhedens faste omkostninger, men den gør det ikke alene. Når alle dækningsbidragene fra virksomhedens produkter lægges sammen viser det sig forhåbentlig, at summen er større end FC og at der dermed skabes et overskud for virksomheden.

Det kan betale sig for virksomheden at øge produktionen af en given vare så længe profitten eller dækningsbidraget bliver større, dvs. så længde $\text{Pr}'(q) \geq 0$ eller $DB'(q) \geq 0$ – under forudsætning af, at vi ikke hermed ryger udenfor definitionsmængden for afsætnings- eller omkostningsfunktionen. (Det hjælper ikke meget, at det matematisk set tilsyneladende viser sig at kunne betale sig at øge produktionen til f.eks. det 4-dobbelte, hvis virksomhedens produktionskapacitet ikke kan håndtere dette, og der derfor skal investeres i nye bygninger, maskineri, medarbejdere mm., hvormed omkostningsfunktionen ikke længere er gældende).
En produktionsforøgelse er altså givtig, så længe: $\text{Groms}(q) \geq \text{Gromk}(q)$. Således må det naturligvis også være, idet det må kunne betale sig for virksomheden at øge produktionen, så længe omsætningsforøgelsen pr. ekstra vareenhed er større end omkostningsforøgelsen pr. ekstra vareenhed.
Den *optimale produktionsstørrelse* q_o bestemmes ved at løse ligningen: Groms(q) = Gromk(q), samt sikre, at monotoniforholdene er således, at der ér tale om et maksimum i den fundne løsning q_o .

Afslutningsvist skal det omtales, at man almindeligvis og naturligvis er interesseret i at sikre, at $\text{Pr}(q) \geq 0$. Den mindste værdi af q, for hvilke dette er opfyldt, kaldes "*break-even punktet*".
Ofte er der også en største værdi af q som opfylder, at $\text{Pr}(q) \geq 0$. Denne værdi kaldes *profitgrænsen.*
I stedet for break-even-punktet og profitgrænsen anvendes undertiden også benævnelserne: nedre dækningspunkt og øvre dækningspunkt.

Appendix 7. Nogle egenskaber ved reelle tal.

Som bekendt består de rationale tal Q af mængden af brøker imellem to hele tal, hvor nævneren er forskellig fra nul. Der gælder desuden at mængden Z af hele tal er en delmængde af mængden af rationale tal, dvs. $Z \subseteq Q$, idet ethvert helt tal er en brøk imellem sig selv og tallet 1. Endvidere gælder det, at Q er afsluttet overfor regningsarterne: addition (+), subtration (–) og multiplikation (·), dvs. at en sum, en differens eller et produkt af to rationale tal giver et nyt rationalt tal.

Om de hele tal Z gælder, at hvis $m \in Z$ er ulige, så er m^2 også ulige. (Argumentet for dette bygger på, at hvis m er ulige, så findes et helt tal n, så $m = 2n + 1$, hvormed $m^2 = (2n + 1)^2 = 4n^2 + 4n + 1$)
Vi ser dermed også at hvis der for et helt tal p gælder, at p^2 er lige, så er p selv lige (idet hvis p var ulige, så ville p^2 også være ulige, og dette er jo ikke tilfældet).

Vi skal bruge disse indledende informationer/resultater i det følgende.

Som vi straks skal se, indeholder de reelle tal R (dvs. alle tal på tallinien) tal, som ikke er rationale. Disse tal kaldes de irrationale tal og betegnes ofte med I. Vi har altså, at $I = R \backslash Q$.
Der gælder bl.a. følgende berømte sætning:

Sætning A.7.1:
$\sqrt{2} \notin Q$, dvs. $\sqrt{2}$ er et irrationalt tal.

Bevis:
Vi beviser sætningen ved et indirekte argument. Vi antager altså, at $\sqrt{2} \in Q$, og vil så vise, at dette fører til en modstrid.
Da $\sqrt{2} \in Q$, kan $\sqrt{2}$ skrives som en uforkortelig brøk mellem to hele tal. (Dette gælder ethvert rationalt tal, idet vi kan forkorte brøken mellem de to hele tal indtil den er uforkortelig).

Vi antager altså, at $\sqrt{2} = \dfrac{p}{q}$, hvor p og q er hele tal, og hvor brøken er uforkortelig.

Af $\sqrt{2} = \dfrac{p}{q}$ ses, at $(\sqrt{2})^2 = (\dfrac{p}{q})^2$ og dermed, at $p^2 = 2 \cdot q^2$. Da q^2 er et helt tal, ses det, at p^2 er lige.
Ifølge de indledende kommentarer er p derfor selv lige. Der findes således et helt tal s, så $p = 2s$, hvilket indsat i $p^2 = 2 \cdot q^2$ giver: $(2s)^2 = 2 \cdot q^2$, hvoraf vi får: $q^2 = 2 \cdot s^2$. Dette betyder, at q^2 er lige, og dermed, at q selv er lige. Vi har således, at både p og q er lige. Men dette er i strid med, at brøken $\dfrac{p}{q}$ er uforkortelig. Vi er hermed kommet til en modstrid, hvormed den oprindelige antagelse ikke kan gælde. Hermed er sætningen bevist. ♥

Om de irrationale tal I gælder bl.a. følgende:

Sætning A.7.2:

For ethvert rationalt tal q og ethvert helt tal n ($n \neq 0$) gælder, at $q + \dfrac{\sqrt{2}}{n} \in I$

Der findes derfor uendeligt mange irrationale tal , og der findes mindst lige så mange irrationale tal, som der findes rationale tal.

Bevis:

Vi fører et indirekte bevis: Antag altså, at q + $\frac{\sqrt{2}}{n} \in$ Q. Da Q er stabil overfor +, – og · , og da q og n er rationale tal, ses: q + $\frac{\sqrt{2}}{n} \in$ Q giver os, at: q + $\frac{\sqrt{2}}{n} - q \in$ Q, dvs. $\frac{\sqrt{2}}{n} \in$ Q. Og dermed fås, at: $\frac{\sqrt{2}}{n} \cdot n \in$ Q, dvs. $\sqrt{2} \in$ Q. Dette er i strid med sætning 1, hvormed første del af sætning 2 er bevist.
Hvis n = 1 ser vi specielt, at q + $\sqrt{2} \in$ I. Heraf fås de to sidste påstande i sætningen: Dels ses, at da der er uendelig mange rationale tal (de rationale tal indeholder bl.a. de hele tal), er der uendeligt mange irrationale tal, og dels ses, at for ethvert rationalt tal q findes der et irrationalt tal q + $\sqrt{2}$
Hermed er sætningen bevist. ♥

Vi nævner uden bevis, at for ethvert primtal p gælder, at $\sqrt{p} \in$ I – og dermed gælder, at $\sqrt{n} \in$ I for ethvert helt tal n, som ikke er et kvadrattal. Der findes mange andre irrationale tal end kvadratroden af et helt tal. Et af de berømteste er tallet π (som er fastlagt ved forholdet mellem omkredsen og diameteren i en cirkel).

Vi vil nu gå over til at se på andre særlige egenskaber ved de rationale og de irrationale tal. Der gælder nemlig om dem begge, at de ligger <u>tæt i R</u>, dvs. uanset hvilke to reelle tal man tager (og underforstået: uanset hvor tæt de to valgte reelle tal ligger på hinanden), så findes der både et rationalt og et irrationalt tal imellem disse to tal. Der gælder altså følgende sætning:

<u>Sætning A.7.3:</u>
1) De rationale tal Q ligger tæt i de reelle tal R
2) De irrationale tal I ligger tæt i de reelle tal R.

Bevis:
<u>Ad 1):</u> Lad r_1 og r_2 være to vilkårligt givne reelle tal, hvor $r_1 < r_2$. Vi skal da bevise, at der findes et rationalt tal q, som ligger imellem r_1 og r_2, dvs. som opfylder: $r_1 < q < r_2$
Lad n ∈ N være valgt, så $n > \frac{1}{r_2 - r_1}$. Dette er muligt, da de naturlige tal fortsætter i det uendelige.
Lad herefter m være det <u>mindste hele</u> tal, som opfylder, at: $m \geq n \cdot r_2$. Vi vil nu bevise, at hvis vi sætter $q = \frac{m-1}{n}$, så opfylder q det ønskede. Da q er en brøk mellem to hele tal, er det et rationalt tal. Vi skal derfor nu interessere os for størrelsen af q.
Først bevises, at $q < r_2$:
Ifølge definitionen af m har vi, at $m - 1 < n \cdot r_2$, og da n er positiv, kan vi dividere med n uden at vende ulighedstegnet, hvormed vi får: $\frac{m-1}{n} < r_2$.
Dernæst bevises, at $r_1 < q = \frac{m-1}{n}$. Vi benytter et indirekte bevis, og antager altså, at $\frac{m-1}{n} \leq r_1$.
Vi vil så argumentere for, at dette fører til en modstrid.
Af $\frac{m-1}{n} \leq r_1$ får vi ved multiplikation med n, at $m - 1 \leq n \cdot r_1$ og dermed, at $m \leq n \cdot r_1 + 1$

Af $n > \frac{1}{r_2 - r_1}$ får vi, idet $r_2 - r_1$ er et positivt tal, at $n\cdot(r_2 - r_1) > 1$ og dermed: $n\cdot r_2 - n\cdot r_1 > 1$, hvilket giver os: $n\cdot r_2 > n\cdot r_1 + 1$. Kombineres dette med $m \le n\cdot r_1 + 1$, ser vi, at $m < n\cdot r_2$, hvilket er i strid med, at $m \ge n\cdot r_2$. Hermed er sætningen 1. del bevist.

Ad 2):
Lad r_1 og r_2 være to vilkårligt givne reelle tal, hvor $r_1 < r_2$. Vi skal da bevise, at der findes et irrationalt tal s, som ligger imellem r_1 og r_2, dvs. som opfylder: $r_1 < s < r_2$
Da de rationale tal Q ligger tæt i R, findes ifl. 1.del af sætningen et tal $q \in Q$, så $r_1 < q < r_2$
Lad n være et positivt helt tal som opfylder, at $n > \frac{\sqrt{2}}{r_2 - q}$. Da $r_2 - q$ er positivt, får vi hermed, at $n\cdot(r_2 - q) > \sqrt{2}$ og dermed, at: $r_2 - q > \frac{\sqrt{2}}{n}$. Dette giver os endeligt, at $q + \frac{\sqrt{2}}{n} < r_2$.
Da $\frac{\sqrt{2}}{n} > 0$ har vi desuden, at $r_1 < q < q + \frac{\sqrt{2}}{n}$. Hvis vi sætter $s = q + \frac{\sqrt{2}}{n}$, så ser vi altså, at $r_1 < s < r_2$, og da s ifølge sætning 2 er et irrationalt tal, er sætningen bevist. ♥

Intervalruser.

Definition A.7.4.
Ved en *intervalruse* forstås en uendelig mængde af ikke-tomme, lukkede, begrænsede intervaller $I_1, I_2, I_3, \ldots\ldots, I_n, \ldots\ldots$, hvorom der gælder, at

- ethvert interval i rusen er en delmængde af det foregående interval, dvs.: $I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \supseteq \ldots\ldots \supseteq I_n \supseteq \ldots$
- længden af et vilkårligt interval i rusen er højst halvdelen af det foregående intervals længde dvs. for alle $n \in N$: $\ell(I_{n+1}) \le \frac{1}{2}\cdot\ell(I_n)$, hvor $\ell(I)$ betyder længden af intervallet I.

Vi bemærker, at det i en intervalruse gælder, at $\ell(I_n) \le \frac{1}{2^{n-1}}\cdot\ell(I_1)$ for alle $n \in N$ (Overvej !).

Hvis vi ser på fællesmængden af alle intervaller i en intervalruse, så er det klart, at denne fællesmængde højst kan indeholde ét tal. Hvis vi nemlig har to forskellige tal p og q, så der findes et helt tal n, så $\frac{\ell(I_1)}{|p-q|} \le 2^{n-1}$, hvormed der gælder, at: $|p-q| \ge \frac{\ell(I_1)}{2^{n-1}} \ge \ell(I_n)$. Vi ser derfor, at p og q ikke begge kan ligge i intervallet I_{n+1}.
Omvendt må det være oplagt, bl.a. når vi tænker på de egenskaber ved de reelle tal, der er beskrevet i det foregående, at der findes et tal, som ligger i alle intervaller i rusen. Dette er en af de fundamentale egenskaber ved de reel tal, som vi ikke kan bevise, men som må anføres som et såkaldt aksiom byggende på de reelle tals opbygning og egenskaber.

Aksiom A.7.5. (Intervalsammensnævringsaksiomet).
Enhver intervalruse fastlægger netop ét reelt tal, dvs. fællesmængden består af netop ét tal.

Appendix 8: Den basale teori for logaritmefunktioner.

En logaritmefunktion g er defineret som en funktion, der opfylder 3 ting:

1) $Dm(g) = R_+$ og $Vm(g) = R$
2) g er monoton
3) For alle $a, b \in R_+$ gælder: $g(a \cdot b) = g(a) + g(b)$.

Men et spørgsmål må være, om der overhovedet eksisterer en sådan funktion. Dette kan vi bevise v.hj.a. integralregning, idet der gælder følgende sætning:

Sætning A.8.1.

Funktionen F givet ved: $F(x) = \int_1^x \frac{1}{t}dt$, $x > 0$, er en logaritmefunktion,

dvs. der gælder:

1) $Dm(F) = R_+$ og $Vm(F) = R$
2) F er monoton
3) $F(a \cdot b) = F(a) + F(b)$

Der gælder desuden, at F er differentiabel, og at $F'(x) = \frac{1}{x}$

Funktionen F beskrevet i denne sætning kaldes den naturlige logaritmefunktion og skrives: ln.

Bevis:

Vi bemærker først, at funktionen $f(t) = \frac{1}{t}$ er kontinuert i intervallet $]\,0; \infty[$ (dvs. i R_+). Dermed ser vi for det første, at F(x) er defineret for alle $x \in R_+$ (og ikke andre x-værdier, idet funktionen $\frac{1}{t}$ ellers er ubegrænset og ikke defineret i intervallet [x; 1]). Og for det andet ser vi ifølge sætning 3.19**,** at F er differentiabel for alle $x \in R_+$, og at $F'(x) = \frac{1}{x}$. Da $x > 0$ ser vi desuden, at $F'(x) > 0$, hvorfor F er voksende i R_+ , og dermed specielt monoton. Vi mangler derfor "kun" at vise, at $Vm(F) = R$, og at regnereglen i pkt. 3) er opfyldt.

Vi begynder med pkt. 3):

Lad $a , b \in R_+$ være vilkårligt valgt. Ifølge indskudssætningen for integraler har vi, at

$$F(a \cdot b) = \int_1^{ab} \frac{1}{t}dt = \int_1^{a} \frac{1}{t}dt + \int_a^{ab} \frac{1}{t}dt = F(a) + \int_a^{ab} \frac{1}{t}dt$$

Vi skal derfor vise, at $F(b) = \int_1^{b} \frac{1}{t}dt = \int_a^{ab} \frac{1}{t}dt$.

Da $\frac{1}{t} = \frac{1}{a} \cdot \frac{a}{t} = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{\frac{t}{a}}$ ser vi, at $\int_a^{ab} \frac{1}{t}dt = \int_a^{ab} \frac{1}{\frac{t}{a}} \cdot \frac{1}{a}dt$.

Hvis vi anvender substitutionen $u = \frac{t}{a}$, $du = \frac{1}{a}dt$ får vi: $\int_a^{ab} \frac{1}{\frac{t}{a}} \cdot \frac{1}{a}dt = \int_1^{b} \frac{1}{u}du = F(b)$,

hvormed vi har vist, at $F(a \cdot b) = F(a) + F(b)$.

Vi skal herefter vise, at $Vm(F) = R$, altså at ethvert reelt tal er funktionsværdi af et eller andet tal x. Dette gøres ved at tage et vilkårligt valgt $y \in R$, og derefter vise, at y er funktionsværdi for F af et eller andet x. Lad derfor $y \in R$ være vilkårligt valgt, og sæt n lig med det hele tal som opfylder, at

$$n \le \frac{y}{F(2)} < n+1$$

(Altså f.eks. hvis $\frac{y}{F(2)} = 8{,}16$, så sættes n = 8, eller hvis $\frac{y}{F(2)} = -1{,}9$, så sættes n = – 2).
Vi bemærker, at vi kan tillade os at dividere med F(2), da F(2) > 0, idet F(1) = 0 og F er voksende.
Ved multiplikation med F(2), som altså er positiv, får vi:

$$n \cdot F(2) \le y < (n+1) \cdot F(2).$$

Da F har egenskaben: $F(a \cdot b) = F(a) + F(b)$ ser vi (overvej !), at der for alle <u>hele</u> tal n gælder, at $F(a^n) = n \cdot F(a)$. Anvendes dette på den ovenstående dobbeltulighed, så får vi:

$$F(2^n) \le y < F(2^{n+1})$$

Vi ser således, at y ligger mellem to funktionsværdier for F. Da F er kontinuert (idet den er differentiabel), har vi dermed, at y selv er en funktionsværdi af et eller andet x. (Og da F er voksende, ligger x imellem 2^n og 2^{n+1}).
Vi har hermed set, at et vilkårligt valgt $y \in R$ er indeholdt i Vm(F), hvormed vi får, at Vm(F) = R.
Hermed er sætningen bevist. ♥

Vi har hermed vist, at der findes mindst én logaritmefunktion, nemlig den naturlige logaritme ln.
Men der findes da uendelig mange logaritmefunktioner, idet der gælder, at hvis f er en logaritmefunktion, og hvis $k \neq 0$ er en vilkårlig reel konstant, så er funktionen kf også en logaritmefunktion. (Beviset for dette overlades til læseren. Eller se beviset i bogen: "Matematik for Gymnasiet. Logaritme-, eksponential- og potensfunktioner – og matematiske modeller")

Der findes i øvrigt ikke andre logaritmefunktioner, end dem der kan fremkomme ved at gange konstanter på en given logaritmefunktion. Beviset for dette bygger på følgende sætning – men det udelades i denne sammenhæng, hvor emnet er integralregning. (Læseren henvises til ovennævnte bog).

<u>Sætning A.8.2.</u>
1) Enhver logaritmefunktion er kontinuert
2) Enhver logaritmefunktion er differentiabel.

Bevis:
Da det vides, at en differentiabel funktion er kontinuert, skulle man tro, at vi kunne bevise sætningen ved at bevise pkt. 2) – og derefter blot henvise til denne regel. Men det kan vi ikke, idet beviset for 2) <u>bygger på</u>, at vi <u>ved</u>, at en logaritmefunktion er kontinuert. Dette skal derfor først vises ad andre veje.
Vi giver først et intuitivt argument for pkt.1):

Grafen for en logaritmefunktion f kan hverken have "huller" eller "spring" som skitseret på figur A.7.1 , idet dette enten strider imod, at f er monoton eller at Vm(f) = R og Dm(f) = R_+ (Overvej dette nærmere).
Grafen for f må derfor være sammenhængende, dvs. funktionen må være kontinuert.

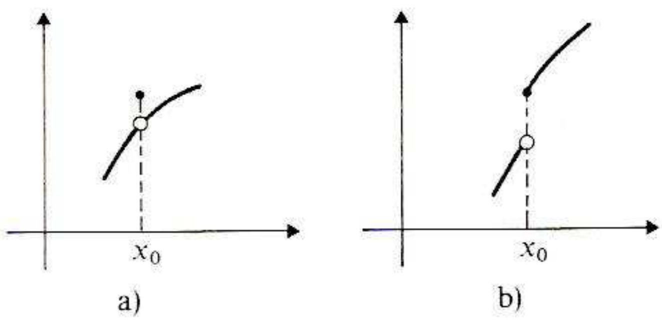


Fig. A.7.1

Et formelt bevis forløber således:
Lad f være en given logaritmefunktion, og lad $x_o \in R_+$ være vilkårligt valgt. Vi skal så bevise, at f er kontinuert i x_o. Da f er monoton, er den enten voksende eller aftagende. Vi vil se på det tilfælde, hvor f er voksende, og overlade det tilsvarende argument for en aftagende logaritmefunktion til den interesserede læser. (I det følgende bruges ordet omegn om et punkt. Dette betyder blot: et symmetrisk, åbent interval omkring punktet)
For at vise kontinuiteten af f i x_o skal vi vise, at for enhver omegn $\omega(f(x_o))$ om $f(x_o)$ findes en omegn $\omega(x_o)$ om x_o som har den egenskab, at hvis $x \in \omega(x_o)$, så er $f(x) \in \omega(f(x_o))$.
Lad da $\omega(f(x_o))$ være en vilkårlig valgt omegn om $f(x_o)$, og lad ε være radius i omegnen, dvs. $\omega(f(x_o)) = \,]\, f(x_o) - \varepsilon \,;\, f(x_o) + \varepsilon\, [$. Da Vm(f) = R findes x_1 , $x_2 \in R_+$, så $f(x_1) = f(x_o) - \varepsilon$ og $f(x_2) = f(x_o) + \varepsilon$, og da f er voksende må der gælde (overvej !), at $x_1 < x_o < x_2$.
Vi vælger nu en omegn $\omega(xo)$ omkring x_o, som opfylder, at $\omega(xo) \subseteq \,]x_1;x_2[$ (Overvej, at dette er muligt ! Lav en figur med to tallinier, en x-akse og en y-akse, der viser situationen). Vi får hermed:
$x \in \omega(x_o) \;\Rightarrow\; x_1 < x < x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) < f(x) < f(x_2) \Rightarrow f(x_o) - \varepsilon < f(x) < f(x_o) + \varepsilon \;\Rightarrow\; f(x) \in \omega(f(x_o))$
hvormed det ønskede er bevist.

Ad 2): Beviset for, at en logaritmefunktion er differentiabel, er et udpræget "trick"-bevis. Det forløber på følgende måde:
Lad f være en vilkårlig logaritmefunktion. Da f ifl. pkt. 1) er kontinuert, får vi ifølge sætning 3.19, at f har en stamfunktion givet ved:

$$F(x) = \int_1^x f(t)\,dt$$

hvor vi har valgt q = 1.
Lad nu $x \in R_+$ være et vilkårligt valgt tal, som fastholdes i det følgende. Vi har da, at

$$\int_1^2 f(x\cdot u)\,du = \int_1^2 (f(x)+f(u))\,du = \int_1^2 f(x)\,du + \int_1^2 f(u)\,du = f(x)\cdot\int_1^2 1du + F(2)$$

$$= f(x)\cdot[u]_1^2 + F(2) = f(x) + F(2)$$

Udregnes det samme integral, dvs. $\int_1^2 f(x\cdot u)\,du$ v.hj.a. substitutionen: t = xu, dt = xdu, og dermed: $\frac{1}{x}dt = du$, så får vi (overvej de enkelte skridt nøje !):

$$\int_1^2 f(x\cdot u)\,du = \int_x^{2x} f(t)\cdot\frac{1}{x}dt = \frac{1}{x}\cdot\int_x^{2x} f(t)\,dt = \frac{1}{x}\cdot\left(\int_1^{2x} f(t)\,dt - \int_1^x f(t)\,dt\right) = \frac{1}{x}\cdot\big(F(2x) - F(x)\big)$$

Sammenholdes disse to udtryk for $\int_1^2 f(x\cdot u)\,du$, så får vi: $f(x) = \frac{1}{x}\cdot(F(2x) - F(x)) - F(2)$.

Da x var vilkårligt valgt i R_+ , gælder dette udtryk for alle $x \in R_+$.
Da F(x) og den sammensatte funktion F(2x) er differentiable, er udtrykket på højre side differentiabelt, hvoraf vi ser, at f er differentiabel. Hermed er sætningen bevist. ♥

Udtrykket $\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}dt$ kan ved anvendelse af numerisk integration benyttes til at beregne funktionsværdier for ln. Denne beregning er lagt ind på grafregneren under tasten [ln].
Læseren kan som en øvelse prøve at inddele intervallet [1; 3] i 10 lige store intervaller og anvende disse intervallers midtpunkter til at bestemme en middelsum for funktionen $f(t) = \frac{1}{t}$.
Find ln3 på grafregneren og sammenlign resultatet.

Opgavesamling

Kapitel 1.

Stamfunktioner. Ubestemte integraler.

1.1 Bestem en stamfunktion til hver af følgende funktioner:

a) $f(x) = 4x^7$ b) $f(x) = \dfrac{3}{x^3} + 4$ c) $f(x) = 2x^2 + 5x^{-5}$

d) $f(x) = (x-2)(x+2)$ e) $f(x) = \sqrt{2} + 3x^3 - 4\sqrt{x}$ f) $f(x) = \dfrac{(x+3)^2}{x^2}$

1.2 a) Bestem den stamfunktion til $f(x) = \frac{1}{4}x^4$, der har funktionsværdien 8 i tallet 2.

b) Bestem den stamfunktion til $g(x) = 2\sqrt{x}$, hvis graf går igennem punktet (9,2).

1.3 a) Bestem den stamfunktion F til funktionen: $f(x) = x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{1}{3}$, som opfylder, at $F(-1) = 0$

b) Vis, at der findes præcis to stamfunktioner G og H til f, som har netop to nulpunkter.

c) Tegn grafen for G og for H i samme koordinatsystem, idet $H(x) < G(x)$ for alle x.

1.4 Om en funktion f er givet: $f'(x) = x^3 - 2x^2$, $x \in R$, og at $f(1) = 2$.

a) Find funktionsforskriften for f

b) Bestem værdimængden for f.

1.5 Bestem den stamfunktion G til funktionen:

$$g(x) = \frac{1}{x} - x \ , \quad x > 0 \, ,$$

der har linien med ligningen y = 3 som tangent.

1.6 Betragt funktionen $f(x) = \frac{1}{x}$. Bestem funktionsforskrifterne for mindst tre forskellige stamfunktioner til f, hvis grafer går igennem punktet (e,4).

Hvad fortæller dette om entydigheden af stamfunktionen i sætning 1.2.7 ?

1.7 Eftervis følgende formler, hvor a og b er konstanter:

a) $\displaystyle\int \frac{1}{(a+bx)^3}\,dx = -\frac{1}{2b(a+bx)^2}$

b) $\displaystyle\int \frac{x}{(a+bx)^3}\,dx = \frac{1}{b^2}\cdot\left(-\frac{1}{a+bx} + \frac{a}{2(a+bx)^2}\right)$

c) $\displaystyle\int x\sqrt{a+bx}\,dx = -\frac{2(2a-3bx)\cdot\sqrt{(a+bx)^3}}{15b^2}$

d) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{a+bx}}\,dx = -\frac{2(2a-bx)\cdot\sqrt{a+bx}}{3b^2}$

1.8 Udregn følgende ubestemte integraler:

a) $\int \frac{(x+2)^2}{x^4}\,dx$ b) $\int (3x^{-2} + 5\sqrt{x} - 3x^2)\,dx$ c) $\int (x^2 + x)\,dx - \int (x^2 - x)\,dx$

1.9 Udregn følgende ubestemte integraler:

a) $\int \frac{1}{5x}\,dx$ b) $\int \ln(3x)\,dx$ c) $\int e^{3+x}\,dx$ d) $\int (e^x)^4\,dx$

e) $\int 4^x\,dx$ f) $\int e^{\ln(x^3)}\,dx$ g) $\int \frac{3}{x}\,dx$ h) $\int \frac{x-5}{x}\,dx$

i) $\int \log_3(5x)\,dx$ j) $\int 2\cdot\sqrt[3]{x}\,dx$ k) $\int e^{5x}\,dx$ l) $\int e^{2x+3}\,dx$

m) $\int 2\sqrt{x^3}\,dx$ n) $\int \sqrt[5]{x^4}\,dx$ o) $\int e^x\cdot 2^x\,dx$ p) $\int x^2\sqrt{2x}\,dx$

Opgaver med delvis integration og integration ved substitution – ubestemte integraler

1.10 Udregn følgende integrale: $\int x\cdot\sin x\,dx$ ved delvis integration ved at vælge g(x) = x som den funktion, der skal differentieres.
Opskriv det udtryk vi ville have fået, hvis vi havde valgt g(x) = sinx som den funktion, der skal differentieres, og kommentér resultatet.

1.11 Udregn følgende ubestemte integraler:

a) $\int x\cdot\cos x\,dx$ b) $\int 5\alpha\ln\alpha\,d\alpha$ c) $\int x^2\cdot\ln x\,dx$ d) $\int (2q + 3\cdot 3^q\cdot q)\,dq$

e) $\int e^x\cdot 2^x\,dx$ f) $\int x^2\sin x\,dx$ g) $\int \cos(t)\cdot t^2\,dt$ h) $\int (x + x^2)\cdot 2^x\,dx$

(*Vejledning til f) – h):* Benyt delvis integration to gange efter hinanden)
Bemærk, at opgave e) også står som opgave 1.9 o). Kommentér dette.

1.12 Bestem v.hj.a. substitutionen en stamfunktion til hver af funktionerne:

a) $\sin x\cdot e^{\cos x}$ b) $\cos x\cdot e^{\sin x}$ c) $\frac{\tan(\ln x)}{x}$

1.13 Bestem en stamfunktion til hver af følgende funktioner:

a) $f(x) = (5x-3)^8$ b) $f(x) = 2x(3x^2+4)^4$ c) $f(x) = \sqrt{4x+9}$

d) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{-x}}$ e) $f(x) = (2x-1)(x^2-x+2)^5$ f) $f(x) = 5x^3\cdot(4x^4+2)^{-4}$

g) $f(x) = \frac{x}{(x^2-8)^4}$ h) $f(x) = (x+2)\sqrt{x^2+4x+\sqrt{5}}$

1.14 Udregn følgende ubestemte integraler:

a) $\int \frac{2}{(3x-4)^5}\,dx$ b) $\int \frac{3x^2}{(2-4x^3)^2}\,dx$ c) $\int (x^2+\sqrt{4-x})\,dx$

d) $\int (x^3+9x)\cdot(x^2+3)\,dx$ e) $\int \sqrt{x^4+5x^2}\,dx$, idet $x > 0$ forudsættes.

1.15 Udregn følgende ubestemte integraler:

a) $\int \frac{-4\cos t + 4\sin t}{\cos t + \sin t}\,dt$ b) $\int \frac{8y^2-24y^8}{-y^9+y^3}\,dy$ c) $\int \cos^7(x)\cdot \sin x\,dx$ d) $\int 3x^3 e^{x^4}\,dx$

1.16 Udregn følgende ubestemte integraler:

a) $\int \frac{1}{x\cdot \ln x}\,dx$ b) $\int \frac{5x^2}{2+x^3}\,dx$ c) $\int \frac{\ln(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\,dx$ d) $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx$

e) $\int \frac{\ln x}{x}\,dx$ f) $\int 5x\ln(3x^2+1)\,dx$ g) $\int \frac{1}{5x-4}\,dx$ h) $\int \frac{3}{x}\cdot(\ln x)^2\,dx$

i) $\int x^5 \ln x\,dx$ j) $\int \frac{x+1}{x^2+2x+2}\,dx$ k) $\int \frac{\log_5(3x)}{x}\,dx$ l) $\int \frac{\ln x}{x^2}\,dx$

m) $\int (\ln x)^2\,dx$ n) $\int x\cdot\ln(2x-1)\,dx$

1.17 Udregn følgende ubestemte integraler

a) $\int x\cdot 2^x\,dx$ b) $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$ c) $\int \frac{2}{x}\cdot 2^{\ln x}\,dx$ d) $\int x^2 e^x\,dx$

e) $\int x\cdot 4^{x^2+2}\,dx$ f) $\int x^{1,1}(x^{2,1}+8)^{2,7}\,dx$ g) $\int 3^x\cdot\ln(3^x+3)\,dx$ h) $\int x^{-2}\cdot e^{\frac{1}{x}}\,dx$

1.18 Bestem: a) $\int q\sqrt{3+q}\,dq$ b) $\int \frac{3y}{(y-1)^4}\,dy$ c) $\int \frac{4s^2}{\sqrt{2s+2}}\,ds$

Arealer og bestemte integraler

1.19 I opgave 1.3 omtales en funktion G. Grafen for G og førsteaksen afgrænser en punktmængde. Bestem arealet af denne punktmængde

1.20 Tegn punktmængden M = $\{(x,y) \mid 0 \le x \le 4 \ \wedge\ 0 \le y \le \frac{1}{2}x^2 + x + 1\}$ og bestem arealet af M.

1.21 Betragt funktionen $h(x) = 3\cdot e^{0,4x}$, $x \in [0\,;8]$
Bestem arealet mellem grafen for h og førsteaksen.

1.22 Udregn følgende bestemte integraler – og gør for hver af dem rede for, at resultatet kan opfattes som arealet under grafen for en positiv, kontinuert, stykkevis monoton funktion:

a) $\int_1^{10} p^2\,dp$ b) $\int_{-3}^{8} 7\,dq$ c) $\int_{-4}^{-2} u^{-2}\,du$ d) $\int_0^{2\pi} |\cos x|\,dx$ e) $\int_{-2}^{2} |y|\,dy$

1.23 Lad funktionen f være bestemt ved:

$$f(x) = \begin{cases} 4-0{,}5x^2 & ,\ 0 \le x \le 2 \\ -x+5 & ,\ x > 2 \end{cases}$$

Skitsér grafen for f, og bestem arealet af punktmængden i 1. kvadrant under grafen.

1.24 Bestemt integralet: $\int (a + be^{-kx})\,dx$, hvor a, b og k er givne konstanter, k > 0.

Udregn integralet: $\int_0^8 (8 - 5e^{-1{,}4x})\,dx$

1.25 Udregn følgende bestemte integraler:

a) $\int_1^2 -22x^{-4}dx$ b) $\int_{-4}^7 dx$ c) $\int_1^4 \frac{5+4x}{\sqrt{x}}dx$ d) $\int_1^4 x \cdot \sqrt[4]{x}\,dx$

1.26 Udregn følgende bestemte integraler:

a) $\int_1^{11} (2{,}5\ln p - 2p)\,dp$ b) $\int_2^3 \frac{t^2+2}{2t}dt$ c) $\int_1^8 \log_2(x^2)\,dx$

d) $\int_1^e y^e dy$ e) $\int_3^4 3^q\,dq$ f) $\int_{0{,}5}^{2{,}5} (2{,}5s^{0{,}5} - 0{,}5s^{2{,}5})\,ds$

g) $\int_{-2}^3 (\frac{1}{2}x^2 - 2)\,dx$ h) $\int_1^2 (t^3 + t^4)\,dt$ i) $\int_0^{\pi/3} (2\cos z - 3\sin z)\,dz$

1.27 Beregn værdien af følgende bestemte integraler:

a) $\int_1^2 5^{2x+1}dx$ b) $\int_1^2 \left(\frac{\sqrt{x}}{x} + \frac{\sqrt[4]{x}}{x}\right)dx$ c) $\int_2^5 2^{-x}\,dx$

d) $\int_1^2 (5x^4 + \frac{1}{2}e^x - 7\ln x)\,dx$ e) $\int_1^4 (5 \cdot 2{,}3^x - 3 \cdot x^{2{,}3})\,dx$ f) $\int_0^2 2^x \cdot (2^x)^2\,dx$

g) $\int_2^4 (4x^{-2{,}6} + 2x^{0{,}7} - x^{-1})\,dx$ h) $\int_1^5 (\log_4(\frac{x}{4}) + \log_3(\frac{x}{3}))\,dx$ i) $\int_1^2 (x^{\sqrt{2}} - \sqrt{2}^{\,x})\,dx$

1.28 En funktion f(x) er givet ved: $f(x) = \int_2^x (-10t + 2)\,dt$ for alle $x \in R$.

Løs ligningerne: a) f(x) = 0 b) f(x) = –12

1.29 For alle $x \in R$ er funktionen f givet ved: $f(x) = \int_2^x (3u^2 - 10u + 2)\,du$

Løs ligningen: f(x) = 0.

1.30 Løs følgende ligninger:

a) $\int_2^x (2t^2 + 5)\,dt = 14$ b) $\int_x^3 (u^2 + u)\,du = \int_1^x (-2t + 4)\,dt$

c) $\int_1^x p\ln(p^2)\,dp = \frac{1}{2}$, $x > 0$

1.31 På figur 1.15 er givet arealerne af nogle punktmænger i forbindelse med to funktioner f og g. Bestem følgende bestemte integraler v.hj.a. figuren:

a) $\int_2^7 (g-f)(x)\,dx + \int_7^{13} (f-g)(x)\,dx$ b) $\int_7^2 g(x)\,dx$ c) $\int_2^{13} (g-f)(x)\,dx$

1.32 Skitsér grafen for funktionen $g(x) = 0{,}4\cdot x^{1{,}9}$.
Bestem en ligning for tangenten til grafen for g i punktet (1, g(1)).
Grafen for g, tangenten og linien med ligningen x = 4 afgrænser en punktmængde.
Bestem arealet af denne punktmængde.

1.33 Skitsér graferne for funktionerne $f(x) = \frac{1}{4}e^x$ og $h(x) = -x^2 + 6x$ i samme koordinatsystem.
Løs ligningen: f(x) = h(x) v.hj.a. grafregneren.
Beregn arealet af mængden af punkter (x,y), som opfylder: $f(x) \le y \le h(x)$

1.34 Tegn i hvert af følgende tilfælde punktmængden M, og bestem arealet af M:

a) $M = \{(x,y) \mid -x+2y-6 \le 0 \ \wedge\ y \ge x^2+2x-3\}$

b) $M = \{(x,y) \mid -1 \le y \le x^3 \ \wedge\ x \le 1\}$

c) $M = \{(x,y) \mid 0 \le y \le \sqrt{x} \ \wedge\ 0 \le y \le -\frac{1}{2}x+1\}$

1.35 Bestem i hvert af følgende tilfælde arealet af den punktmængde, som afgrænses af graferne for funktionerne f og g:

a) $f(x) = x^2-2x-3$ og $g(x) = x+1$

b) $f(x) = \sqrt{x+4}$ og $g(x) = \frac{1}{4}x+1$

1.36 Tegn (på grundlag af en funktionsundersøgelse) grafen for funktionen:

$$f(x) = x + \frac{1}{x}\ ,\ \ x > 0$$

Angiv en ligning for tangenten til grafen i punktet (3, f(3)).
Denne tangent, grafen for f, samt linien med ligningen $x = \frac{1}{2}$ afgrænser en punktmængde.
Bestem arealet af denne punktmængde.

Opgaver med delvis integration og integration ved substitution – bestemte integraler

1.37 Beregn følgende tal:

a) $\int_2^7 5\sqrt{4x-1}\,dx$ b) $\int_1^3 50\cdot(5-4x)^5\,dx$ c) $\int_{\pi/4}^{\pi/2} x\cos x\,dx$

d) $\int_{\pi/4}^{\pi/2} x^2\cos x\,dx$ e) $\int_1^3 \frac{0{,}5x+1}{x^2+4x+11}\,dx$ f) $\int_{\pi/4}^{\pi} \sin(4x)\,dx$

g) $\int_{\pi/4}^{\pi} 2x\sin(4x)\,dx$ h) $\int_3^4 \sqrt[3]{4x+3}\,dx$ i) $\int_0^{\pi/3} (\mathrm{tg}x + \mathrm{tg}^3x)\,dx$

j) $\int_2^{\pi} (2x^2 + x\cdot 4^x)\,dx$ k) $\int_{\pi/4}^{\pi/2} 2\sin x\sqrt{1-\cos x}\,dx$ l) $\int_{\pi/3}^{2\pi/3} \mathrm{tg}^3x\,dx$

1.38 Udregn følgende bestemte integraler:

a) $\int_1^3 t\cdot\ln(t^2)\,dt$ b) $\int_2^4 \frac{0{,}5v+1}{v^2+4v+11}dv$ c) $\int_0^2 u^2\cdot 3^u\,du$ d) $\int_1^e \frac{5+\ln\lambda}{\lambda}d\lambda$

e) $\int_{20}^{30} 2(\ln q)^2\,dq$ f) $\int_2^e(\sigma^2+2)\cdot\ln\sigma\,d\sigma$ g) $\int_{-6}^{6}(3x+2)\cdot e^x dx$ h) $\int_0^1 \frac{5}{3m+2}dm$

1.39 Beregn værdien af følgende bestemte integraler:

a) $\int_0^1 \frac{x-3}{x^2-9}dx$ b) $\int_2^5 \frac{1}{2}x\cdot e^{-x^2}dx$ c) $\int_4^9 \frac{1}{2}x\ln(x^2+1)\,dx$ d) $\int_0^{2,5} 2x\cdot 4^x\,dx$

e) $\int_6^7 \frac{2x}{x^2-4}dx$ f) $\int_1^3(x\ln x+x)\,dx$ g) $\int_1^2 x\cdot e^{3x+2}\,dx$ h) $\int_7^{10}\frac{1}{x-6}dx$

i) $\int_1^2 2x^2\cdot 4^{x^3}\,dx$ j) $\int_1^5 \log_2(x)\log_3(x)\,dx$ k) $\int_1^4 x^{\frac{2}{5}}\cdot\ln x\,dx$ l) $\int_3^5 2^{\ln x}\cdot\frac{1}{x}dx$

m) $\int_0^2 x^2\cdot 2^{4x}\,dx$ n) $\int_5^{2e}\frac{\ln(\ln(x))}{x}dx$ o) $\int_e^{e^2} x\cdot(\ln x)^2\,dx$ p) $\int_2^4\frac{6x}{2x-1}dx$

1.40 Bestem konstanten k, så: $\int_0^6 k\cdot\log_5(4t+1)\,dt = 1$

1.41 Lad f(x) = $\int_1^x \frac{(\log_2(t))^2}{t}dt$. Løs ligningen: f(x) = 2 , x > 0

1.42 Betragt funktionen f fra eksempel 1.6.20

a) Linien y = x skærer grafen for f i tre punkter.
Bestem koordinaterne til disse skæringspunkter.

b) Linien y = x og grafen for f afgrænser en ”todelt” punktmængde.
Tegn en skitse, som viser situationen. Beregn arealet af denne punktmængde.

c) For alle t > 0 afgrænser linierne med ligningerne x = t og x = t + 1,5 sammen med grafen for f en punktmængde, der betegnes T_t
Beregn den værdi af t, som giver punktmængden T_t det størst mulige areal, og beregn dette største areal.

1.43 Omskriv udtrykket $\frac{x^3+3x^2+4x+2}{x^2+2x+3}$ ved polynomiers division, og beregn herefter det bestemte integrale: $\int\frac{x^3+3x^2+4x+2}{x^2+2x+3}dx$

1.44 Beregn følgende integraler – og kontrollér resultaterne i b) og c) v.hj.a. grafregneren:

a) $\int\frac{2000}{1+0{,}3\cdot e^{-0{,}002x}}dx$ b) $\int_0^{200}\frac{50000}{10+35\cdot e^{-0{,}0042q}}dq$ c) $\int_{20}^{50}\frac{300\cdot 1{,}02^x}{3+1{,}02^x}dx$

1.45 Beregn følgende integraler:

a) $\int_{-0,5}^{0,3} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ b) $\int_{-2}^{2} \frac{7}{\sqrt{5-y^2}}\,dy$

(*Vejledning:* a) Omvendt substitution, x = sin(t) b) Noget tilsvarende).

1.46 Lad a > 0 være et givet tal. Bestem integralet $\int_0^{\sqrt{a}} \sqrt{a-x^2}\,dx$ udtrykt ved a.

(*Vejledning:* Omvendt substitution, $x = \sqrt{a}\cdot\cos t$)

Uegentlige integraler

1.47 Beregn følgende tal: a) $\lim\limits_{q\to\infty} \int_5^q x^{-3}\,dx$ b) $\lim\limits_{s\to\infty} \int_2^s \frac{2x}{(x^2+4)^4}\,dx$

1.48 Udregn $\int_3^{\infty} \frac{1}{(2+t)^3}\,dt$

1.49 Udregn værdien af hvert af følgende uegentlige integraler:

a) $\int_2^{\infty} 5e^{-0,6q}dq$ b) $\int_8^{\infty} (2\cdot y^{-2,6} + \frac{1}{y^2})\,dy$

c) $\int_2^{\infty} 8\cdot 1,4^{-2p}\,dp$ d) $\int_8^{\infty} (4\cdot x^{-3} + 2\cdot 3^{-x})\,dx$

e) $\int_3^{\infty} \frac{1}{s\cdot(\ln s)^2}\,ds$ f) $\int_1^{\infty} k\cdot t\cdot e^{-0,5t^2}\,dt$

1.50 Udregn værdien af hvert af følgende uegentlige integraler:

a) $\int_{39}^{\infty} \frac{0,38x^2}{1,37^x}\,dx$ b) $\int_{10}^{\infty} \frac{3\log x}{x^{2,1}}\,dx$ c) $\int_e^{\infty} \frac{2+3\ln x}{x^4}\,dx$ d) $\int_4^{\infty} 5x\cdot 0,3^x\,dx$

1.51 Lad α være en positiv konstant.

Vis ved anvendelse af delvis integration, at $\int_0^{\infty} \alpha t\cdot e^{-\alpha t}\,dt = \frac{1}{\alpha}$

Kapitel 2

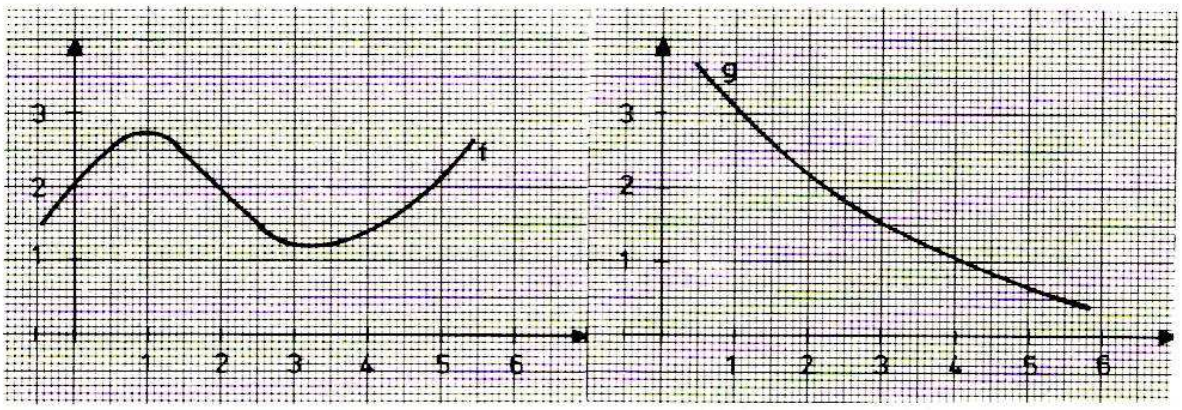
2.1 Bestem $\int_0^9 (x - 3\sqrt{x})dx$ på følgende to måder, og sammenlign resultatet:

a) V.hj.a. en stamfunktion til $x - 3\sqrt{x}$
b) V.hj.a. en trapezsum, hvor $[0;9]$ inddeles i 9 lige store delintervaller.

2.2 Bestem $\int_{-4}^4 (\frac{1}{2}x^3 - 5x + 3)dx$ på følgende to måder, og sammenlign resultatet:

a) V.hj.a. en stamfunktion til $\frac{1}{2}x^3 - 5x + 3$
b) V.hj.a. en trapezsum, hvor $[-4;4]$ inddeles i 16 lige store delintervaller.

2.3 Betragt funktioner f og g, hvis grafer ses på følgende figurer:



Bestem for hver af disse funktioner en middelsum, samt venstresummen, højresummen og trapezsummen svarende til en inddeling af intervallet $[1;5]$ i 4 lige store delintervaller. Kommentér resultaterne.

2.4 Angiv tilnærmede værdier af $\int_5^8 \frac{6}{x^2+1}dx$ v.hj.a. venstresummen, højresummen, trapezsummen og en middelsum svarende til en inddeling af integrationsintervallet i 6 lige store delintervaller.
Bestem desuden værdien af integralet ved anvendelse af grafregneren (se evt. appendix 2)

2.5 Bestem v.hj.a. af grafregneren (se evt. appendix 2) og/eller et PC-program som f.eks. TI-interactive værdien af følgende integraler:

a) $\int_{-3}^7 \frac{2}{x^2+5}dx$ b) $\int_1^{15} 0{,}7e^{\sqrt{x}}dx$ c) $\int_2^6 \cos(\ln(x))dx$ d) $\int_1^5 x^x dx$

2.6 Nedenstående tabel viser hastigheden v(t) af en bil registreret med 5 sekunders mellemrum i løbet af en køretur.
Af bekvemmelighedshensyn er hastigheden omregnet fra km i timen til meter pr. sekund.
Tiden t måles altså i sekunder og v(t) i m/s:

t	v(t)	t	v(t)	t	v(t)
0	0	55	14	110	24
5	6	60	8	115	26
10	10	65	10	120	24
15	14	70	10	125	22
20	16	75	12	130	20
25	16	80	16	135	16
30	18	85	18	140	14
35	20	90	20	145	12
40	20	95	22	150	8
45	22	100	22	155	4
50	18	105	24	160	0

Tegn en kurve (”blød kurve”) over v(t) som funktion af t.
Beregn (tilnærmelsesvist), hvor langt bilen kørte i løbet af de 160 sekunder, som turen varede.

2.7 Bestem ved numerisk integration:
a) Det samlede vandforbrug i eksempel 2.1.1
b) Den gennemsnitlige udstrømningshastighed i eksempel 2.1.1
c) Den samlede nettoindtægt i eksempel 2.1.2
d) Gennemsnitstemperaturen i eksempel 2.1.6

2.8 Bestem middelværdien af:
a) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x + 6$ i intervallet $[-4;5]$
b) $f(x) = 2 - e^x$ i intervallet $[-3;4]$

2.9 Bestem gennemsnitsværdien af funktionen $\cos^2 x$ i intervallet $\left[\frac{\pi}{3};\frac{2\pi}{3}\right]$

2.10 Betragt lagerstørrelsen LS(t) for en given vare på et lager. Lagerstørrelsen er en funktion af tiden t, idet der hhv. fjernes varer fra lageret (f.eks. ved salg) og tilføres varer til lageret (f.eks. ved produktion af den givne vare).
a) Argumentér for, at hvis λ angiver lageromkostningerne pr. enhed pr. dag, så er de samlede lageromkostninger $SLO(t_1,t_2)$ fra tiden t_1 til tiden t_2 givet ved:

$$SLO(t_1,t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \lambda \cdot LS(t)dt$$

b) Argumentér for, at hvis λ er konstant i tidsintervallet $[t_1;t_2]$, så er

$$SLO(t_1,t_2) = \lambda \cdot (t_2 - t_1) \cdot LS_{middel}$$

hvor LS_{middel} er den gennemsnitlige lagerstørrelse i tidsintervallet.

2.11 Grafen for funktionen $f(x) = 10 \cdot x^{-0,25}$, $1 \le x \le 9$, roteres 360^o omkring førsteaksen. Bestem voluminet V af det herved fremkomne omdrejningslegeme.

2.12 En punktmængde M er givet ved: $M = \{(x,y) \mid 1 \le x \le 4 \ \wedge \ 0 \le y \le \ln x\}$
M drejes om førsteaksen, hvorved der fremkommer et omdrejningslegeme.
Find rumfanget af dette.

2.13 Bestem rumfanget af det omdrejningslegeme, der fremkommer ved at rotere grafen for funktionen h om førsteaksen, idet h er givet ved:

a) $h(x) = 3\sin(2x)$, $x \in [-\pi;\pi]$ b) $h(x) = 5\cdot(1-e^{-2x})$, $x \in [1;4]$

2.14 a) Skitsér graferne for funktionerne
$f(x) = 1{,}3\sqrt{x}$, $x \in [0;16]$ og $g(x) = 1{,}3\sqrt{x-2}$, $x \in [2;16]$
i samme koordinatsystem.
b) Ved at rotere området mellem graferne for f og g omkring 1.aksen fremkommer ”bægeret” i et ølglas. (Foden af glasset indgår ikke i betragtningen). Ølglasset laves af krystalglas. Hvor mange cm^3 krystalglas skal der bruges hertil ?
c) Hvor meget øl (uden skum) kan der være i ølglasset ?

2.15 a) Skitser grafen for funktionen $g(x) = \frac{1}{6}\cdot(\frac{1}{2}x+2)\cdot\sqrt{36-x^2}$, $0 \le x \le 6$
b) Ved at rotere grafen for g omkring 1.aksen fremkommer et rundt dørhåndtag, som skal laves i messing. Massefylden for messing er 8,3 g/cm^3.
Hvor meget vejer dørhåndtaget ?

2.16 Bestem længden af grafen for f i intervallet $[1;4]$, idet:
a) $f(x) = e^{-x}$ b) $f(x) = e^{x}$ c) $f(x) = 2x^{1,5}$

2.17 Bestem den eksakte værdi af overfladearealet af det omdrejningslegeme der fremkommer, hvis grafen for funktionen f roteres omkring førsteaksen, idet f er givet ved:
a) $f(x) = x^2$, $x \in [0;3]$ b) $f(x) = x^3$, $x \in [-2;0]$

2.18 Bestem den eksakte værdi af overfladearealet af det omdrejningslegeme der fremkommer, hvis grafen for funktionen $f(x) = 2x - 4$, $x \in [0;6]$, roteres omkring førsteaksen.

2.19 Bestem overfladearealet af det omdrejningslegeme der fremkommer, hvis grafen for funktionen h roteres omkring førsteaksen, idet h er givet ved:

a) $h(t) = 3\ln t$, $t \in [1;5]$ b) $h(t) = 2^t$, $t \in [-1;2]$

Stikordsregister.

Tabel over nogle funktioners stamfunktioner og differentialkvotienter.

Nr.	stamfunktion F(x)	funktion f(x)	differentialkvotient $f'(x)$
1	x	1	0
2	$\frac{1}{2}x^2$	x	1
3	$\frac{1}{3}x^3$	x^2	$2x$
4	$\frac{1}{2}ax^2+bx$	$ax+b$	a
5	$\frac{1}{r+1}x^{r+1}$	$x^r \ , \ r\neq -1$	$r\cdot x^{r-1}$
6	$\ln\|x\|$	$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
7	$\frac{1}{a(r+1)}\cdot(ax+b)^{r+1}$	$(ax+b)^r \ , \ r\neq -1, a\neq 0$	$ar(ax+b)^{r-1}$
8	$\frac{1}{a}\cdot\ln\|ax+b\|$	$\frac{1}{ax+b} \ , \ a\neq 0$	$-\frac{a}{(ax+b)^2}$
9	$\frac{2}{3}x\sqrt{x}$	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
10	$\frac{2}{3a}(ax+b)\sqrt{ax+b}$	$\sqrt{ax+b} \ , \ a\neq 0$	$\frac{a}{2\sqrt{ax+b}}$
11	$2\sqrt{x}$	$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$-\frac{1}{2x\sqrt{x}}$
12	e^x	e^x	e^x
13	$\frac{1}{k}e^{kx}$	$e^{kx} \ , \ k\neq 0$	$k\cdot e^{kx}$
14	$\frac{1}{\ln a}\cdot a^x$	$a^x \ , \ a\neq 1$	$\ln(a)\cdot a^x$
15	$x\cdot\ln(x)-x$	$\ln x$	$\frac{1}{x}$
16	$-\cos x$	$\sin x$	$\cos x$
17	$\sin x$	$\cos x$	$-\sin x$
18	$-\ln\|\cos x\|$	$\tan x$	$1+\tan^2(x)$
19	$-\frac{1}{a}\cos(ax+b)$	$\sin(ax+b) \ , \ a\neq 0$	$a\cdot\cos(ax+b)$
20	$\frac{1}{a}\cdot\sin(ax+b)$	$\cos(ax+b) \ , \ a\neq 0$	$-a\cdot\sin(ax+b)$
21	$-\frac{1}{a}\ln\|\cos(ax+b)\|$	$\tan(ax+b) \ , \ a\neq 0$	$a(1+\tan^2(ax+b))$
22	$\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin(2x)$	$\sin^2(x)$	$2\sin x\cdot\cos x$
23	$\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin(2x)$	$\cos^2(x)$	$-2\sin x\cdot\cos x$
24	$\tan(x)-x$	$\tan^2(x)$	$2\tan x+2\tan^3(x)$
25	$\frac{1}{k}\ln\|e^{kMx}+c\|$	$\frac{M}{1+c\cdot e^{-kMx}} \ , \ k\neq 0$	$\frac{kcM^2\cdot e^{-kMx}}{(1+c\cdot e^{-kMx})^2}$

Tabel over nogle funktioners stamfunktioner og differentialkvotienter.