

**Steen Bentzen**

# **Matematik for Gymnasiet**

**Logaritme-, eksponential-  
og potensfunktioner  
– og matematiske modeller.**

## **Indholdsfortegnelse:**

<b>Forord .....</b>	<b>s. 3</b>
<b>1. Logaritme-, eksponential- og potensfunktioner. Grundlæggende egenskaber .....</b>	<b>s. 4</b>
1.1. Logaritmefunktioner .....	s. 4
Logaritmiske skalaer .....	s. 9
1.2. Udvidelse af potensbegrebet .....	s. 11
1.3. Eksponentialfunktioner .....	s. 16
1.4. Eksponentielle vækstfunktioner .....	s. 19
Relativ funktionstilvækst .....	s. 22
Fremskrivningsfaktorer .....	s. 24
Halverings- og fordoblingskonstanter .....	s. 25
1.5. Enkeltlogaritmisk koordinatsystem .....	s. 28
1.6. Potensfunktioner. Potentielle vækstfunktioner .....	s. 32
Potensfunktioner .....	s. 32
Potentielle vækstfunktioner .....	s. 34
1.7. Dobbeltlogaritmisk koordinatsystem .....	s. 39
1.8. Regression ved eksponentielle og potentielle vækstfunktioner .....	s. 42
Eksponentiel regression .....	s. 42
Potentiell regression .....	s. 44
<b>2: Eksempler på modeller – uden anvendelse af differential- eller integralregning .....</b>	<b>s. 46</b>
2.1. Logaritmefunktioner .....	s. 46
Måleenheder og logaritmiske sammenhænge .....	s. 46
<i>Kemiske opløsninger</i> .....	s. 46
<i>Lydstyrke</i> .....	s. 47
<i>Elektroniske komponenter</i> .....	s. 50
<i>Stjerners lysstyrke</i> .....	s. 51
<i>Fotografering</i> .....	s. 55
<i>Toneintervaller og musikskalaer</i> .....	s. 61
Grafisk beskrivelse af data v.h.j.a. logaritmiske skalaer .....	s. 66
2.2. Eksponentielle vækstfunktioner .....	s. 68
<i>Radioaktivitet og stråling</i> .....	s. 69
<i>Biologi og medicin</i> .....	s. 71
<i>Befolkningsudvikling</i> .....	s. 72
2.3. Enkeltlogaritmisk koordinatsystem og eksponentiel regression .....	s. 73
Forsøg til belysning af eksponentiel vækst .....	s. 75
2.4. Potentielle vækstfunktioner .....	s. 79
<i>Geometriske objekter</i> .....	s. 79
<i>Ligefrem og omvendt proportionalitet – primært i fysik</i> .....	s. 80
<i>Afstandskvadratloven</i> .....	s. 83
<i>Andre eksempler fra fysik</i> .....	s. 86
<i>Biologi og medicin</i> .....	s. 90
<i>Økonomisk-afsetningsmæssige forhold</i> .....	s. 92
<b>3. Logaritme-, eksponential- og potensfunktioner. Differential- og integralregning ...</b>	<b>s. 94</b>
3.1. Differentiation af logaritmefunktioner .....	s. 94
3.2. Differentiation af eksponentialfunktioner .....	s. 95



## **Forord**

Formålet med denne bog kan inddeles i tre elementer:

- At præsentere en sammenhængende matematisk velfunderet beskrivelse af emnerne logaritme-, eksponential- og potensfunktioner
- At give en række eksempler på matematiske modeller indenfor disse emner.
- At diskutere begrebet: en matematisk model og betydningen heraf.

Bogens indhold og titel afspejler naturligvis dette tredelte formål, men lad det være sagt med det samme: bogen er så omfattende, at det næppe i nogen sædvanlig undervisningssituation vil være muligt at nå det hele. Man må i sådanne tilfælde derfor foretage passende udvalg og overspringelser, og evt. overlade det resterende stof til de særligt interesserede.

Bogens struktur bevirker imidlertid, at der let kan skæres i materialet, bl.a. så det passer til specielle behov (f.eks. bestemte modelområder/fag osv.) eller til specielle ressourcetsituationer (tid, omfang, niveau osv.). Bogens struktur bevirker desuden, at læseren kan nøjes med at søge et eller to af de omtalte formål realiseret, hvis det ønskes. Læsere der f.eks. kun ønsker at beskæftige sig med logaritme-, eksponential- og potensfunktioner på rent matematisk grundlag, kan fokusere på kapitel 1, 3 og 5, medens læsere, der kender til teorien – men ønsker at vide mere om matematiske modeller i tilknytning hertil – kan fokusere på kapitel 2, 4 og 6.

Der vil også i nogle sammenhænge være emner, som (langt) overstiger det aktuelle undervisningsniveau. Bogen er derfor klart struktureret i emner, der ikke har med differentialregning eller integralregning at gøre, og emner der forudsætter kendskab til disse discipliner. Og desuden kan man nemt læse afsnittene som bygger på differentialregning uden at læse de få afsnit som bygger på integralregning. Det er bogens ambition at omtalte sætninger, der vedrører emnet, også bevises – og dette kan man afhængig af temperament udelade helt eller dele af.

Bogen er forsynet med fire appendices (jfr. indholdsfortegnelsen). Appendix 1 giver det teoretiske grundlag for eksistens af og egenskaber ved logaritmefunktioner. Læsning af dette forudsætter kendskab til både differential- og integralregning. Appendix 2 er medtaget for at hjælpe læsere, der ikke har kendskab til omvendte funktioner, og til kontinuitet og differentiation i denne sammenhæng. Appendix 3 spiller samme rolle som appendix 2, blot i forbindelse med sammensatte funktioner. Endelig introducerer Appendix 4 begrebet elasticitet som er et generelt begreb, men i teksten bruges det kun i nogle af de økonomiske eksempler i kapitel 4.

Bogen er beregnet på undervisning i matematik på gymnasialt niveau. Men bogen kan også anvendes på første studieår på en række matematisk orienterede studier.

Bogens struktur og indhold gør den oplagt at bruge i tværfagligt samarbejde og i projekter med fysik, biologi, erhvervsøkonomi og evt. samfundsfag – specielt i en undervisningsstruktur, hvor eleverne/de studerende er på samme hold i både matematik og de nævnte fag.

I forbindelse med modelbeskrivelserne har det været en udfordring at begrænse sig. Man kan derfor altid diskutere hvorfor dette eller hint eksempel er nævnt medens et andet eksempel ikke er nævnt. Det er imidlertid mit håb, at læseren synes om udvalget af eksempler.

Opgavesamlingen består af ”træningsopgaver” inden for den omhandlede teori. Der er således ikke lagt yderligere modelopgaver ind i opgavesamlingen.

Der anvendes markeringen ♥ til at angive afslutningen af en øvelse, et eksempel eller et bevis. Ved beskrivelse af specielle lommeregnerfunktioner er anvendt grafregneren TI-83/TI-84

Steen Bentzen  
Herning, April 2008