Kap. 3: Logaritme-, eksponential- og potensfunktioner. Differential- og integralregning.

3.1. Differentiation af logaritmefunktioner.

Sætning 3.1.1.

1) Enhver logaritmefunktion er differentiabel
2) Den naturlige logaritmefunktion ln opfylder: $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$
3) En vilkårlig logaritmefunktion med grundtal c opfylder: $\log_c'(x) = \dfrac{1}{\ln c} \cdot \dfrac{1}{x}$

Bevis: Pkt. 1) og 2) er bevist i Appendix 1 (sætning A.1.4 og sætning A.1.2), hvortil interesserede læsere henvises. Pkt. 3) følger direkte af pkt. 2) og sætning 1.1.9. ♥

Da ln(2) = 0,69315 og ln(10) = 2,30259 ser vi ifølge sætning 3.1.1 3), at

$$\log_2'(x) = \frac{1}{0{,}69315} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1{,}44270}{x}$$

og

$$\log'(x) = \frac{1}{2{,}30259} \cdot \frac{1}{x} = \frac{0{,}43429}{x}$$

I forbindelse med sammensætning af funktioner (jfr. Appendix 3) gælder der følgende sætning:

Sætning 3.1.2.

Hvis g er en positiv, differentiabel funktion, så kan $f(x) = \ln(g(x))$ defineres, og

$$f'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}$$

Bevis: Da $Dm(\ln) = R_+$ og da $g(x) > 0$ for alle $x \in Dm(g)$, så kan ln(g(x)) defineres. Ifølge reglen for differentiation af sammensatte funktioner (Appendix 3, sætning A.3.10) gælder der, at:

$$f'(x) = \ln'(g(x)) \cdot g'(x) = \frac{1}{g(x)} \cdot g'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}$$

Hermed er sætningen bevist. ♥

Eksempel 3.1.3.

Hvis $f(x) = \ln(x^2 + x^3)$, så er $f'(x) = \dfrac{(x^2+x^3)'}{x^2+x^3} = \dfrac{2x+3x^2}{x^2+x^3} = \dfrac{2+3x}{x+x^2}$ ♥

3.2. Differentiation af eksponentialfunktioner.

Sætning 3.2.1.

Funktionerne e^x , a^x og e^{kx} er differentiable, og der gælder følgende regler:

1) $(e^x)' = e^x$ 2) $(a^x)' = \ln a \cdot a^x$ 3) $(e^{kx})' = k \cdot e^{kx}$

Bevis:
Ad 1): Ifølge definition 1.2.2 (og indledningen til afsnit 1.3) er e^x den omvendte funktion til funktionen ln(x), dvs. $e^x = \ln^{-1}(x)$.
Ifølge sætning 3.1.1 er ln differentiabel, og $\ln'(x) = \frac{1}{x} \neq 0$ for alle $x \in \mathrm{Dm}(\ln)$ $(= \mathbb{R}_+)$. Heraf ser vi ifølge Appendix 2, sætning A.2.15, at e^x er differentiabel, og at

$$(e^x)' = (\ln^{-1})'(x) = \frac{1}{\ln'(\ln^{-1}(x))} = \frac{1}{\ln'(e^x)} = \frac{1}{\frac{1}{e^x}} = e^x$$

idet vi lader f i sætning A.2.15 svare til ln, og idet vi bytter rundt på de variables navne (de variable kan som bekendt kaldes hvad vi har lyst til). Hermed er regel 1 bevist.
Ad 2): Ifølge sætning 1.3.2 pkt. 2) har vi at: $a^x = e^{x \cdot \ln a}$, hvoraf det ses, at a^x er sammensat af funktionerne: $f(x) = e^x$ og $g(x) = x \cdot \ln a$, idet der gælder: $a^x = e^{x \cdot \ln a} = f(x \cdot \ln a) = f(g(x))$.
Da både f og g er differentiable, er a^x differentiabel. Og ifølge reglen for differentiation af sammensatte funktioner (Appendix 3, sætning A.3.10) ses, at:

$$(a^x)' = (f(g(x))' = f'(g(x)) \cdot g'(x) = e^{g(x)} \cdot (x \cdot \ln a)' = e^{x \cdot \ln a} \cdot \ln a = \ln a \cdot a^x$$

hvor vi har anvendt regel 1), samt at lna er en konstant.
Ad 3): Da e^{kx} er sammensat af e^x og af kx ses på samme måde som i beviset for pkt. 2), at:

$$(e^{kx})' = e^{kx} \cdot (kx)' = e^{kx} \cdot k$$

Hermed er sætningen bevist. ♥

Eksempel 3.2.2.
Vi vil finde differentialkvotienterne af funktionerne:

a) $f(x) = 2 \cdot 4^x - 5 \cdot 2^x$ b) $g(x) = e^{-x^2}$ c) $h(x) = 3^{x+\sqrt{x}}$

Ad a): Ifølge sætning 3.2.1 2) og simple regler for differentiation får vi:

$$f'(x) = 2 \cdot \ln 4 \cdot 4^x - 5 \cdot \ln 2 \cdot 2^x = 2{,}7726 \cdot 4^x - 3{,}4657 \cdot 2^x$$

Ad b): Da g er sammensat af funktionerne: $-x^2$ og e^x ser vi ifølge reglen for differentiation af sammensatte funktioner samt sætning 3.2.1 1), at:

$$g'(x) = e^{-x^2} \cdot (-x^2)' = e^{-x^2} \cdot (-2x) = -2x \cdot e^{-x^2}$$

Ad c): Da h er sammensat af funktionerne: $x + \sqrt{x}$ og 3^x ser vi på samme måde som i b), og ifølge sætning 3.2.1 2), at

$$h'(x) = \ln 3 \cdot 3^{x+\sqrt{x}} \cdot \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) \qquad ♥$$

Øvelse 3.2.3.
Bestem differentialkvotienten af følgende funktioner:
a) $f(x) = 8x \cdot 8^x$ b) $g(x) = 3^x + x^3$ c) $h(x) = 3{,}6^{-1{,}4x}$ ♥

Eksempel 3.2.4.
I sætning 1.3.2 6) blev det bevist, at a^x er voksende, hvis $a > 1$, og at a^x er aftagende, hvis $0 < a < 1$.
Dette kan vi nu også bevise v.hj.a. differentialregning:
Ifølge sætning 3.2.1 2) gælder, at $(a^x)' = \ln a \cdot a^x$. Da $a^x > 0$ for alle $a \in R_+$ og alle $x \in R$, bestemmes fortegnet for $(a^x)'$ af størrelsen $\ln a$. Og denne er netop positiv eller negativ, afhængig af om $a > 1$ eller $0 < a < 1$. Heraf følger resultatet, idet der som bekendt gælder, at
- en funktion er voksende i et interval (hér: R_+), hvis dens differentialkvotient er positiv i intervallet
- en funktion er aftagende i et interval, hvis dens differentialkvotient er negativ i intervallet. ♥

3.3. Differentiation af eksponentielle vækstfunktioner.

Da forskellen på en eksponentialfunktion og en eksponentiel vækstfunktion er en positiv konstant, ses direkte af sætning 3.2.1, at der gælder følgende sætning:

Sætning 3.3.1.

De eksponentielle vækstfunktioner $b \cdot e^x$, $b \cdot a^x$ og $b \cdot e^{kx}$ er differentiable, og der gælder følgende regler:
1) $(b \cdot e^x)' = b \cdot e^x$ 2) $(b \cdot a^x)' = b \cdot \ln a \cdot a^x$ 3) $(b \cdot e^{kx})' = b \cdot k \cdot e^{kx}$

Øvelse 3.3.2.
Bestem differentialkvotienten for hver af følgende funktioner:
a) $f(y) = 210 \cdot 1{,}6^{2y-2}$ b) $g(x) = 0{,}6 \cdot e^{-0{,}9x}$ c) $h(p) = 43 \cdot 2{,}3^p$ ♥

Øvelse 3.3.3.
Bevis sætning 1.4.6 v.hj.a. differentialregning. ♥

I forlængelse af sætning 3.3.1 og øvelse 3.3.2 bemærkes, at hvis f er en eksponentiel vækstfunktion givet på formen: $f(x) = b \cdot e^{kx}$, så er $f'(x) = b \cdot k \cdot e^{kx} = k \cdot f(x)$. Funktionen f opfylder altså, at dens differentialkvotient er lig med en konstant gange funktionen selv. Dette gælder i øvrigt kun for funktioner af typen $b \cdot e^{kx}$, idet der gælder følgende sætning:

<u>Sætning 3.3.4.</u>

Hvis en funktion f opfylder, at: $f'(x) = k\cdot f(x)$ for alle x i et interval I, hvor k er en given konstant, så findes der en anden konstant b, så funktionsforskriften for f er givet ved: $f(x) = b\cdot e^{kx}$, $x \in I$.

Bevis:
Vi laver et lille "trick" og betragter funktionen: $f(x)\cdot e^{-kx}$. Om denne funktion gælder:
$(f(x)\cdot e^{-kx})' = f'(x)\cdot e^{-kx} + f(x)\cdot e^{-kx}\cdot(-k) = k\cdot f(x)\cdot e^{-kx} - k\cdot f(x)\cdot e^{-kx} = 0$
hvor vi har anvendt sætningen om differentiation af et produkt samt forudsætningen: $f'(x) = k\cdot f(x)$.
Hvis en funktions differentialkvotient er 0 for alle x, så er funktionen konstant. Der findes altså en konstant b, så $f(x)\cdot e^{-kx} = b$ for alle x. Ved at gange på begge sider af lighedstegnet med e^{kx} får vi , at: $f(x) = b\cdot e^{kx}$, hvormed sætningen er bevist. (Detaljer vedrørende eventuelle intervalendepunkter og højre- eller venstredifferentialkvotienter er udeladt af hensyn til overskueligheden). ♥

<u>Eksempel 3.3.5.</u>
Hvis det om en funktion H(p) er givet, at $H'(p) = 0{,}5\cdot H(p)$ for alle p, samt at H(5) = 12000, så findes der ifølge sætning 3.3.4 en konstant b, så $H(p) = b\cdot e^{0,5\cdot p}$. Konstanten b findes ved at benytte oplysningen H(5) = 12000 på følgende måde:

$$H(5) = 12000 \Leftrightarrow b\cdot e^{0,5\cdot 5} = 12000 \Leftrightarrow b = 985{,}02$$

Vi ser dermed i alt, at:

$$H(p) = 985{,}02\cdot e^{0,5\cdot p} \quad , p \in R$$

Det overlades som en øvelse til læseren at tegne grafen for H(p) i et almindeligt koordinatsystem ♥

<u>Øvelse 3.3.6.</u>
Om en differentiabel funktion f oplyses, at $f'(x) = -\frac{1}{2}f(x)$ og f(3) = 100.
Bestem en funktionsforskrift for f. ♥

Betingelsen: $f'(x) = k\cdot f(x)$, som også kan anføres således: $\Delta f(x) \approx k\cdot f(x)\cdot\Delta x$, når $\Delta x \approx 0$, siger, at funktionens væksthastighed er proportional med den aktuelle funktionsværdi. Og det er forbavsende ofte, at denne betingelse (tilnærmelsesvist) kan siges at være opfyldt. Vi skal senere (i kapitel 4) give eksempler herpå.

<u>Eksempel 3.3.7.</u>
I afsnit 1.4 blev det omtalt, at eksponentielle vækstfunktioner er de eneste funktioner, der har konstante relative tilvækster svarende til bestemte absolutte tilvækster i den uafhængige variable, idet der gælder følgende sætning (sætning 1.4.11), som vi nu er i stand til at bevise:

Hvis det om en positiv, ikke-konstant, differentiabel funktion f defineret i et interval I gælder, at for en vilkårligt valgt værdi af tilvæksten h er den relative funktionstilvækst $\frac{f(x+h)-f(x)}{f(x)}$ konstant (dvs. uafhængig af x), så er f en eksponentiel vækstfunktion.

Beviset forløber således:

For en vilkårlig valgt værdi af tilvæksten h er brøken: $\frac{f(x+h)-f(x)}{f(x)}$ konstant, dvs. der findes en konstant (et tal) K_h, så $\frac{f(x+h)-f(x)}{f(x)} = K_h$, hvor indexet h på K'et betyder, at K afhænger af h, men ikke af x.

Ved division med h finder vi: $\frac{f(x+h)-f(x)}{f(x)\cdot h} = \frac{K_h}{h}$ og dermed: $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\cdot\frac{1}{f(x)} = \frac{K_h}{h}$.

Hvis vi lader h gå mod 0, vil venstre side af dette udtryk gå imod $f'(x)\cdot\frac{1}{f(x)}$, idet f er differentiabel i x. Men så vil forholdet $\frac{K_h}{h}$ også have en grænseværdi for h gående mod 0.

Da $\frac{K_h}{h}$ imidlertid er uafhængig af x, ser vi, at der findes en konstant k, så: $\frac{K_h}{h} \to k$ for $h \to 0$.

I alt får vi hermed, at: $f'(x)\cdot\frac{1}{f(x)} = k$, dvs. $f'(x) = k\cdot f(x)$.

Da dette gælder for alle $x \in I$ får vi ifølge sætning 3.3.4, at der findes en konstant b, så $f(x) = b\cdot e^{kx}$, $x \in I$. Da f er forudsat positiv, må der gælde, at $b > 0$, hvormed vi ser, at f er en eksponentiel vækstfunktion – og det ønskede er bevist. ♥

3.4. Differentiation af potensfunktioner og potentielle vækstfunktioner.

Sætning 3.4.1.

En vilkårlig potensfunktion x^r og en vilkårlig potentiel vækstfunktion $b\cdot x^r$ er differentiable, og der gælder, at:

$$(x^r)' = r\cdot x^{r-1} \qquad \text{og} \qquad (b\cdot x^r)' = b\cdot r\cdot x^{r-1}$$

Bevis:

Ifølge sætning 1.6.2 har vi, at $x^r = e^{r\cdot\ln x}$. Vi ser derfor, at x^r er sammensat af de to funktioner: $f(x) = e^x$ og $g(x) = r\cdot\ln x$. Da begge disse funktioner er differentiable, får vi ifølge Appendix 3, sætning A.3.10, at x^r er differentiabel, og at:

$$(x^r)' = (e^{r\cdot\ln x})' = e^{r\cdot\ln x}\cdot(r\cdot\ln x)' = x^r\cdot r\cdot\frac{1}{x} = r\cdot x^{r-1}$$

hvormed det ønskede er vist om potensfunktionen. Da den potentielle vækstfunktion blot er en konstant gange en potensfunktion, fås det ønskede om den potentielle vækstfunktion umiddelbart. Hermed er sætningen bevist. ♥

Øvelse 3.4.2.

Bestem differentialkvotienten for hver af følgende funktioner:

a) $f(x) = 12\cdot x^{2,7}$ b) $g(x) = x^{0,6}$ c) $h(x) = 3,1^x + x^{3,1}$ d) $j(x) = (5x^2)^{1,72}$ ♥

<u>Øvelse 3.4.3.</u>

a) Vis v.hj.a. omskrivningen: $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$, $x > 0$, at $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

b) Vis v.hj.a. omskrivningen: $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$, $x > 0$, at $(\sqrt[n]{x})' = \dfrac{\sqrt[n]{x}}{nx}$ ♥

<u>Eksempel 3.4.4.</u>

Vi vil bestemme nulpunkter, monotoniforhold og værdimængde for funktionen f givet ved:

$$f(x) = x^{2,8} - 4\cdot x^{1,2}\ , \quad x \in \left[\tfrac{1}{2};3\right]$$

Idet $x > 0$ har vi:

$$f(x) = 0 \iff x^{2,8} = 4\cdot x^{1,2} \iff x^{1,6} = 4 \iff 1{,}6\cdot \ln x = \ln 4 \iff x = \exp\left(\frac{\ln 4}{1{,}6}\right) \iff x = 2{,}378$$

Tallet 2,378 er således det eneste nulpunkt for f, og vi bemærker, at $2{,}378 \in \left[\tfrac{1}{2};3\right]$

Vi finder dernæst differentialkvotienten for f:

$$f'(x) = 2{,}8\cdot x^{1,8} - 4\cdot 1{,}2\cdot x^{0,2} = 2{,}8\cdot x^{1,8} - 4{,}8\cdot x^{0,2}$$

Heraf ser vi, at:

$$f'(x) = 0 \iff 2{,}8\cdot x^{1,8} = 4{,}8\cdot x^{0,2} \iff x^{1,6} = \tfrac{4,8}{2,8} \iff 1{,}6\cdot \ln x = \ln 4{,}8 - \ln 2{,}8$$

$$\iff x = \exp\left(\frac{\ln 4{,}8 - \ln 2{,}8}{1{,}6}\right) \iff x = 1{,}401$$

Vi bemærker, at $1{,}401 \in \left[\tfrac{1}{2};3\right]$. For at bestemme fortegnsvariationen for f ′, beregnes f ′ i et punkt $x_1 < 1{,}401$ og i et punkt $x_2 > 1{,}401$ (idet x_1 og x_2 naturligvis begge tilhører intervallet $\left[\tfrac{1}{2};3\right]$).

Vi kan f.eks. tage $x_1 = 1$ og $x_2 = 2$. Vi får her (kontrollér), at: $f'(1) = -2$ og $f'(2) = 4{,}236$.

Da f ′ er en kontinuert funktion, kan den ikke skifte fortegn i intervallet $\left]\tfrac{1}{2};1{,}401\right[$, idet den da skulle have et nulpunkt i dette interval – og det ved vi, at den ikke har (vi har jo fundet dens eneste nulpunkt, nemlig tallet 1,401). Da f ′ er negativ i tallet 1 er den altså negativ i hele intervallet $\left]\tfrac{1}{2};1{,}401\right[$

På samme måde ses, at f ′ er positiv i hele intervallet $\left]1{,}401;3\right[$. Vi får hermed følgende fortegnsvariation for f ′:

x	$\tfrac{1}{2}$		1,401		3
f ′(x)		– – – –	0	+ + + + + + +	

Vi ser således, at f er aftagende i $\left[\tfrac{1}{2};1{,}401\right]$ og voksende i $\left[1{,}401;3\right]$, og at der er minimum i 1,401.

Da f er kontinuert, finder vi herefter værdimængden for f ved at beregne funktionsværdierne i $\tfrac{1}{2}$, 1,401 og 3. Vi får at: $f(\tfrac{1}{2}) = -1{,}598$, $f(1{,}401) = -3{,}424$ og $f(3) = 6{,}725$.

Værdimængden for f er derfor givet ved: $Vm(f) = \left[-3{,}424;6{,}725\right]$.

Det overlades som en øvelse til læseren at skitsere grafen for f. ♥

Øvelse 3.4.5.
Bevis sætning 1.6.4 pkt.2 v.hj.a. differentialregning. ♥

Eksempel 3.4.6.
På figur 1.6.1 ses graferne for potensfunktionerne: $x^{-0,7}$, $x^{0,5}$ og $x^{1,88}$. Disse grafers forløb kan bl.a. beskrives på følgende måde:
$x^{-0,7}$ er aftagende, men hældningskoefficienten for dens tangenter bliver større og større (de er negative men nærmer sig nul), hvormed grafen ”krummer opad” og flader mere og mere ud.
$x^{0,5}$ er voksende, men hældningskoefficienten for dens tangenter bliver mindre og mindre, hvormed grafen ”krummer nedad”.
$x^{1,88}$ er voksende, og hældningskoefficienten for dens tangenter bliver større og større, hvormed grafen ”krummer opad”.

Dette er et udtryk for et generelt princip, idet beskrivelsen for $x^{-0,7}$ gælder for enhver potensfunktion x^r, hvor $r < 0$, idet beskrivelsen for $x^{0,5}$ gælder for enhver potensfunktion x^r, hvor $0 < r < 1$, og idet beskrivelsen for $x^{1,88}$ gælder for enhver potensfunktion x^r, hvor $r > 1$.
Argumentationen for dette bygger på, at hældningskoefficienten for tangenten er det samme som differentialkvotienten, dvs. $r \cdot x^{r-1}$. Og der gælder (overvej !), at hvis $r > 1$, så er funktionen $r \cdot x^{r-1}$ voksende, hvis $0 < r < 1$, så er funktionen $r \cdot x^{r-1}$ aftagende, og hvis $r < 0$, så er funktionen $r \cdot x^{r-1}$ voksende, hvormed det ønskede ses. ♥

Eksempel 3.4.7.
I slutningen af afsnit 1.6 blev det omtalt, at potentielle vækstfunktioner er de eneste funktioner, der har konstante relative tilvækster svarende til bestemte relative tilvækster i den uafhængige variable, idet der gælder følgende sætning (sætning 1.6.17), som vi nu er i stand til at bevise:

Hvis det om en positiv, ikke-konstant, differentiabel funktion f defineret i R_+ gælder, at for en vilkårlig valgt værdi r af den relative tilvækst i den uafhængige variable x, er den relative funktionstilvækst $\dfrac{f(x\cdot(1+r))-f(x)}{f(x)}$ konstant (dvs. uafhængig af x), så er f en potentiel vækstfunktion.

Beviset forløber således:
Hvis vi kan bevise, at der findes en konstant a, så $(\ln(f(x)))' = a\cdot\dfrac{1}{x}$ for alle $x \in R_+$, så er vi færdige.
For dette vil give os, at der findes en konstant q, så $(\ln(f(x)))' = (a\cdot\ln x + q)'$, og dermed at:
$(\ln(f(x)) - a\cdot\ln x - q)' = 0$, hvoraf vi ser, at der findes en konstant p, så: $\ln(f(x)) - a\cdot\ln x - q = p$.
Da $Vm(\ln) = R$ og $Dm(\ln) = R_+$ findes der herefter et positivt tal k, så $\ln k = p + q$, hvormed vi får:
$\ln(f(x)) - a\cdot\ln x = \ln k$, og dermed: $\ln(f(x)) = a\cdot\ln x + \ln k = \ln(x^a) + \ln k = \ln(k\cdot x^a)$.
Da ln er en injektiv funktion ser vi endelig, at: $f(x) = k\cdot x^a$, hvormed det ønskede er bevist.
(Bemærk, at vi her benytter benævnelsen a for eksponenten, idet r er ”optaget” til at beskrive den relative tilvækst i x-værdien).
Vi skal altså bevise, at der findes en konstant a, så $(\ln(f(x)))' = a\cdot\dfrac{1}{x}$ for alle $x \in R_+$

Ifølge sætning 3.1.2 har vi, at $(\ln(f(x)))' = \frac{f'(x)}{f(x)}$, hvorfor vi skal bevise, at der findes en konstant a, så $\frac{f'(x)}{f(x)} = a \cdot \frac{1}{x}$ for alle $x \in R_+$.

Vi ved, at for enhver værdi af den relative tilvækst r er størrelsen $\frac{f(x\cdot(1+r))-f(x)}{f(x)}$ uafhængig af x, men naturligvis afhængig af r. Der findes derfor et tal K_r, som er uafhængig af x, men afhængig af r, som opfylder: $\frac{f(x\cdot(1+r))-f(x)}{f(x)} = K_r$.

Lad nu $x \in R_+$ være vilkårlig valgt og herefter fastholdt, og sæt $h = x\cdot r$. Ved at gange x ind i parentesen (1+r) kan det ovenstående udtryk herefter skrives således: $\frac{f(x+h)-f(x)}{f(x)} = K_r$.

Ved division med h på begge sider af lighedstegnet får vi: $\frac{f(x+h)-f(x)}{f(x)\cdot h} = \frac{K_r}{h}$, hvilket kan omskrives til:

$$(*) \qquad \frac{f(x+h)-f(x)}{h}\cdot\frac{1}{f(x)} = \frac{K_r}{r}\cdot\frac{1}{x}.$$

Da $h = x\cdot r$, (hvor x som omtalt er vilkårligt valgt, men fastholdt), har vi, at: $r \to 0 \;\Leftrightarrow\; h \to 0$.
Hvis vi lader r – og dermed h – gå mod 0, så vil venstre side af $(*)$ gå imod $f'(x)\cdot\frac{1}{f(x)}$, idet f er differentiabel i x. Men så vil højre side af $(*)$, og dermed forholdet $\frac{K_r}{r}$, også have en grænseværdi for r gående mod 0. Da $\frac{K_r}{r}$ er uafhængig af x findes derfor en konstant a, så $\frac{K_r}{r} \to a$ for $r \to 0$.
I alt ser vi dermed, at venstre side af $(*)$ går mod $\frac{f'(x)}{f(x)}$ og højreside af $(*)$ går imod $a\cdot\frac{1}{x}$, begge for $r \to 0$. Disse to størrelser er dermed ens, dvs. $\frac{f'(x)}{f(x)} = a\cdot\frac{1}{x}$.
Da dette gælder for et vilkårligt valgt x er det ønskede bevist. ♥

3.5. Integration af logaritme-, eksponential- og potensfunktioner.

Som bekendt siges en funktion F at være stamfunktion til en funktion f i et interval I, hvis det for alle $x \in I$ gælder, at $F'(x) = f(x)$ (for et evt. venstre endepunkter $a \in I$ skal der gælde, at $F'_+(a) = f(a)$ og for et evt. højre endepunkt $b \in I$ skal der gælde, at $F'_-(b) = f(b)$).
Hvis F er en stamfunktion til f i et interval I, så skriver vi:

$$F(x) = \int f(x)dx$$

og vi siger, at F fremkommer ved af <u>integrere</u> f.
$\int f(x)dx$, der altså er en funktion (stamfunktion til f), kaldes et <u>ubestemt integrale.</u>

At en given funktion F er en stamfunktion til f kan kontrolleres ved at undersøge, om $F' = f$.

Ved det bestemte integrale af f fra a til b, hvor $[a; b] \subseteq Dmf$, forstår vi tallet $F(b) - F(a)$, og det skrives således:

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Hvis f er en ikke-negativ funktion, er $\int_a^b f(x)dx$ lig med arealet under grafen for f imellem tallene a og b, og hvis f antager både positive og negative værdier, så er $\int_a^b f(x)dx$ lig med arealet under grafen for f, men over 1.aksen, minus arealet under 1. aksen, men over grafen – imellem tallene a og b.

I forbindelse med logaritme-, eksponential- og potensfunktioner gælder der følgende sætning vedrørende stamfunktioner. I sætningen indgår en vilkårlig konstant c, som kan lægges til enhver af stamfunktionerne, idet denne forsvinder ved differentiation. En stamfunktion til en given funktion er altså ikke helt entydig fastlagt. Værdien af konstanten kan i en konkret situation fastlægges ud fra kendskab til en funktionsværdi for stamfunktionen (se eksempel 3.5.2 og øvelse 3.5.3).

Sætning 3.5.1.

I de følgende regneregler er c en vilkårlig konstant:

1) $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$

2) $\int \ln x \, dx = x \cdot \ln x - x + c$

3) $\int e^x dx = e^x + c$

4) $\int e^{kx} dx = \frac{1}{k} \cdot e^{kx} + c \qquad (k \neq 0)$

5) $\int a^x dx = \frac{1}{\ln a} \cdot a^x + c \qquad (a > 0, a \neq 1)$

6) $\int x^r dx = \frac{1}{r+1} \cdot x^{r+1} + c \qquad (r \neq -1)$

Bevis:
For at bevise sætningen, skal vi altså i hvert tilfælde kontrollere, at når vi differentierer højresiden (dvs. udtrykket for stamfunktionen), så giver det funktionen inde i integraltegnet (dvs. funktionen som integreres). (Jfr. den første linie på denne side).
Da en konstant lagt til en funktion forsvinder ved differentiation, (idet den giver 0), og da en konstant ganget på en funktion blot bliver stående ved differentiation, fremkommer regel 3), 4), 5) og 6) direkte ud fra sætning 3.2.1 og 3.4.1. (Detaljerne overlades til læseren).
Tilbage er regel 1) og 2). Vi starter med nr. 2):

Ad 2): Ved anvendelse af sætning 3.1.1 og reglen for differentiation af et produkt får vi følgende:

$$(x \cdot \ln x - x + c)' = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} - 1 + 0 = \ln x + 1 - 1 = \ln x$$

hvormed det ønskede er vist.
Ad 1):
Funktionen $\ln|x| + c$ er en stamfunktion til $\frac{1}{x}$ både i R_+ og i R_-.

For hvis x > 0, så er $(\ln|x| + c)' = (\ln|x|)' = (\ln x)' = \dfrac{1}{x}$

Og hvis x < 0, så er $(\ln|x| + c)' = (\ln|x|)' = (\ln(-x))' = \dfrac{1}{-x} \cdot (-x)' = \dfrac{1}{-x} \cdot (-1) = \dfrac{1}{x}$

hvor vi i den sidste omskrivning har brugt dels, at $|x| = -x$ for negative x, dels regnereglen for differentiation af en sammensat funktion.
Hermed er sætningen bevist. ♥

Bemærk, at regnereglen $\int b \cdot f(x)\,dx = b \cdot \int f(x)\,dx$ for ubestemte integraler, hvor b er en konstant, giver os, at sætning 3.5.1 også kan bruges til at finde stamfunktioner til vilkårlige logaritmefunktioner (jfr. sætning 1.1.9), og til eksponentielle vækstfunktioner og potentielle vækstfunktioner.

Eksempel 3.5.2.
Vi vil finde den stamfunktion F til funktionen $f(x) = 12 \cdot 1{,}8^x$, hvis graf går igennem punktet (2,200)
Vi har, at: $F(x) = \int 12 \cdot 1{,}8^x\,dx = 12 \cdot \dfrac{1}{\ln 1{,}8} \cdot 1{,}8^x + c$, hvor konstanten c endnu er ukendt. Den fastlægges ud fra kravet om, at F(2) = 200, hvoraf vi får:

$$200 = 12 \cdot \frac{1}{\ln 1{,}8} \cdot 1{,}8^2 + c \quad \Leftrightarrow \quad c = 133{,}85$$

Den søgte stamfunktion har altså forskriften:

$$F(x) = \frac{12}{\ln 1{,}8} \cdot 1{,}8^x + 133{,}85 = 20{,}416 \cdot 1{,}8^x + 133{,}85 \quad ♥$$

Øvelse 3.5.3.
Bestem til hver af de følgende funktioner en stamfunktion, hvis graf går igennem punktet: (3,10)
a) $f(x) = x^2$ b) $f(x) = e^x$ c) $f(x) = 8 \cdot x^{0,7}$ d) $f(x) = 1{,}6^x + x^{1,6}$ e) $f(x) = 3 \cdot e^{0,9x}$ ♥

Eksempel 3.5.4.
Vi vil bestemme arealet A under grafen for $\log_2$ i intervallet fra 1 til 10 (jfr. figur 1.1.1).
Vi har:

$$A = \int_1^{10} \log_2(x)\,dx = \int_1^{10} \tfrac{1}{\ln 2} \cdot \ln x\,dx = \tfrac{1}{\ln 2} \cdot \int_1^{10} \ln x\,dx \quad \tfrac{1}{\ln 2} \cdot [x \cdot \ln x - x + c]_1^{10}$$

$$= \tfrac{1}{\ln 2}((10 \cdot \ln 10 - 10 + c - (1 \cdot \ln 1 - 1 + c)) = \tfrac{1}{\ln 2}(10 \cdot \ln 10 - 9) = 20{,}235$$

Det søgte areal er altså 20,235. Bemærk, at værdien af konstanten c er uden betydning, idet c forsvinder i beregningen. Dette gælder i udregningen af ethvert bestemt integrale. ♥

I forbindelse med såvel ubestemte som bestemte integraler gælder der nogle regneregler, bl.a.
$\int (f(x)+g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$, $\int (f(x)-g(x))\,dx = \int f(x)\,dx - \int g(x)\,dx$ og
$\int k\cdot f(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$, hvor f og g er to funktioner og k er en konstant, og hvor reglerne her er formuleret for ubestemte integraler. Tilsvarende regler gælder for bestemte integraler.

I forbindelse med produkt af funktioner og sammensatte funktioner gælder følgende regneregler:

Delvis (eller Partiel) Integration: $\int f(x)g(x)\,dx = F(x)\cdot g(x) - \int F(x)\cdot g'(x)\,dx$ (ubestemt)

$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = \big[F(x)g(x)\big]_a^b - \int_a^b F(x)g'(x)\,dx$ (bestemt)

hvor F er en stamfunktion til f.

Denne metode kaldes delvis eller partiel integration, idet vi ikke får udregnet integralet helt, men får det udtrykt ved et nyt integrale (som så forhåbentlig er lettere at regne ud).

Integration ved substitution: $\int f(g(x))\cdot g'(x)\,dx = F(g(x))$, (ubestemt)

$\int_a^b f(g(x))\cdot g'(x)\,dx = F(g(b)) - F(g(a))$ (bestemt)

hvor F er en stamfunktion til f.

Denne metode kaldes integration ved substitution, idet regnereglerne kan omskrives til:

$$\int f(g(x))\cdot g'(x)\,dx = \int f(t)\,dt \quad \text{, hvor } t = g(x).$$
$$\int_a^b f(g(x))\cdot g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)\,dt$$

Vi har således substitueret (indsat, erstattet) t i stedet for g(x), og dermed bliver $dt = g'(x)dx$ (i overensstemmelse med reglerne for differentialer).
I reglen for det bestemte integrale ses desuden, at når x går fra a til b, så går t fra g(a) til g(b).

<u>Eksempel 3.5.5.</u>

a) Ved delvis integration ser vi, at $\int_1^2 x^2\cdot \ln x\,dx = \left[\tfrac{1}{3}x^3\cdot \ln x\right]_1^2 - \int_1^2 \tfrac{1}{3}x^3\cdot\tfrac{1}{x}\,dx =$

$\tfrac{8}{3}\ln 2 - 0 - \int_1^2 \tfrac{1}{3}x^2\,dx = \tfrac{8}{3}\ln 2 - \left[\tfrac{1}{9}x^3\right]_1^2 = \tfrac{8}{3}\ln 2 - \tfrac{7}{9} = 1{,}07061$

b) Ved substitutionen $t = g(x) = 1 + x^2$ og $dt = g'(x)dx = 2x\,dx$, (og dermed: $x = 1 \Rightarrow t = 2$ og: $x = 3 \Rightarrow t = 10$), ser vi, at:

$\int_1^3 \frac{x}{1+x^2}\,dx = \tfrac{1}{2}\int_2^{10}\tfrac{1}{t}\,dt = \tfrac{1}{2}\big[\ln|t|\,\big]_2^{10} = \tfrac{1}{2}(\ln 10 - \ln 2) = \frac{\ln 5}{2} = 0{,}80472$ ♥

<u>Øvelse 3.5.6.</u>

Udregn følgende fire integraler:

a) $\int 5x\cdot e^x dx$ b) $\int x\cdot \ln(2x^2+3)\,dx$ c) $\int_2^5 5x\cdot e^x dx$ d) $\int_2^3 x\cdot\ln(2x^2+3)\,dx$ ♥

3.6. Beslægtede funktioner.

Med "beslægtede funktioner" menes funktioner, som ikke direkte er logaritmefunktioner, eksponentielle vækstfunktioner eller potentielle vækstfunktioner, men som i deres funktionsforskrift indeholder sådanne funktioner. Vi vil i dette afsnit kun se på 2-3 af de mest anvendte af den omtalte type.
Det bør nævnes, at også sandsynlighedsfordelingen f for en normalfordelt stokastisk variabel:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

nødvendigvis må omtales som "en meget anvendt funktion", men den vil ikke blive behandlet yderligere i det følgende. Der henvises i stedet for til bogen: "Sandsynlighedsregning for Gymnasiet".

Funktioner af typen: $f(x) = p + q \cdot e^{rx}$

Vi vil først se på et par eksempler på sådanne funktioner og deres grafer:

Eksempel 3.6.1.
Vi vil betragte funktionerne f, g og h givet ved:
$f(x) = 200 - 180 \cdot e^{-0,3x}$, $g(x) = 100 + 70 \cdot e^{-0,1x}$ og $h(x) = 300 - 20 \cdot e^{0,12x}$
Det overlades til læseren at argumentere for at f er voksende, og at g og h er aftagende (f.eks. v.hj.a. differentiation). Graferne for de tre funktioner ses i nedenstående koordinatsystem (figur 6.3.1):

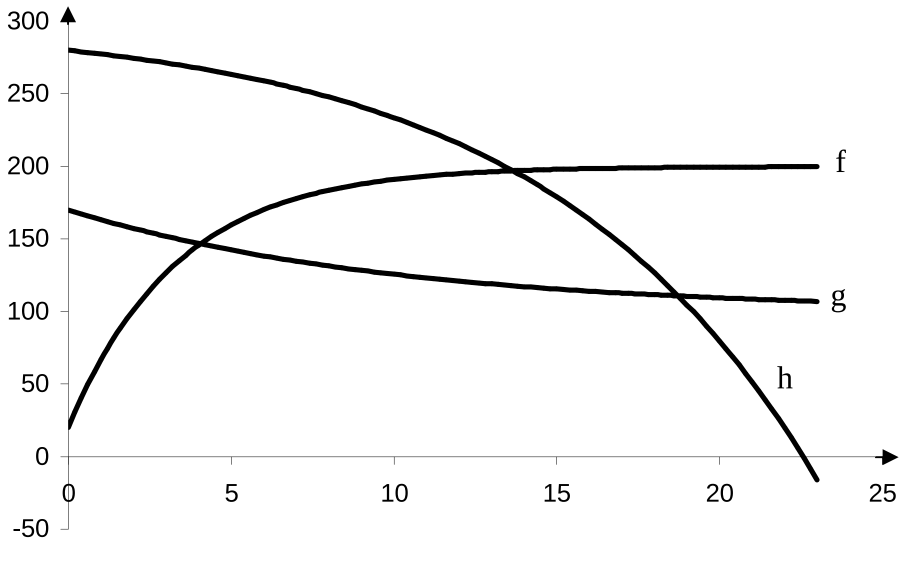


Fig. 3.6.1

Det fremgår måske allerede her af disse grafer (specielt f og g), hvorfor funktioner af typen $f(x) = p + q \cdot e^{rx}$ finder anvendelse ved fænomener, der indeholder en mætning eller en udligning. (bemærk, at: $f(x) \to 200$ for $x \to \infty$, og $g(x) \to 100$ for $x \to \infty$). Dette omtales yderligere i det følgende og specielt i kapitel 4. ♥

Øvelse 3.6.2.
Tegn graferne for følgende funktioner – og kommentér resultaterne:
a) $f_1(x) = e^{-0,25x}$ b) $f_2(x) = 90 \cdot e^{-0,25x}$ c) $f_3(x) = -90 \cdot e^{-0,25x}$ d) $f_4(x) = 120 - 90 \cdot e^{-0,25x}$ ♥

Til beskrivelse af fænomener, der vokser op fra værdien 0 og efterhånden når en mætning, kan man undertiden bruge funktioner af typen: $f(x) = M\cdot(1-e^{-kx})$, hvor M og k er positive konstanter.

Øvelse 3.6.3.
Tegn graferne for funktionerne: $f(x) = 80\cdot(1-e^{-0{,}2x})$, $x \geq 0$ og $g(x) = 100\cdot(1-e^{-0{,}1x})$, $x \geq 0$ i samme koordinatsystem (sørg for mindst at have x = 50 med på figuren). Kommentér resultatet. ♥

I lighed med sætning 3.3.4 kan vi fremsætte og bevise følgende sætning:

Sætning 3.6.4.
Hvis en funktion f opfylder, at: $f'(x) = b - k\cdot f(x)$ for alle x i et interval I, hvor k og b er givne konstanter ($k \neq 0$), så findes der en anden konstant c, så funktionsforskriften for f er givet ved:

$$f(x) = \frac{b}{k} + c\cdot e^{-k\cdot x} \quad , x \in I$$

Bevis: Funktionen f opfylder ”næsten” forudsætningerne i sætning 3.3.4, hvis det ikke var for konstanten b. Vi prøver derfor i stedet for at se på funktionen: $b - k\cdot f(x)$. Om den gælder der:
$(b - k\cdot f(x))' = 0 - k\cdot f'(x) = -k\cdot(b - k\cdot f(x))$, hvor vi har brugt forudsætningerne om f.
Det ses altså, at funktionen $b - k\cdot f(x)$ opfylder betingelserne i sætning 3.3.4, hvormed der findes en konstant c_1, så: $b - k\cdot f(x) = c_1\cdot e^{-kx}$ (konstanten kaldes c_1 og ikke c, idet vi om et øjeblik skal omskrive lidt på udtrykket og dér indføre en ny konstant, som så får navnet c. Bemærk i øvrigt, at der skal stå –k og ikke bare k i udtrykket. Hvorfor ?). Vi omskriver nu:

$$b - k\cdot f(x) = c_1\cdot e^{-kx} \iff k\cdot f(x) = b - c_1\cdot e^{-kx} \iff f(x) = \frac{b}{k} + \left(\frac{-c_1}{k}\right)\cdot e^{-kx}$$

Brøken $\frac{-c_1}{k}$ er en konstant, som vi kalder c. Hermed er sætningen bevist. ♥

Øvelse 3.6.5.
a) Om funktionen f er givet, at f er defineret og kontinuert i intervallet [0; 30] , at f(10) = 200 og at $f'(x) = 30 - 0{,}2\cdot f(x)$ for alle $x \in\,]0;30[$. Bestem en forskrift for f og tegn grafen.
b) Om funktionen g er givet, at g er defineret og kontinuert i intervallet [0; 25] , at g(20) = 30 og at $g'(x) = -12 + 0{,}3\cdot g(x)$ for alle $x \in\,]0;25[$. Bestem en forskrift for g og tegn grafen.
(Vejledning: Bemærk, at $-12 + 0{,}3\cdot g(x) = -12 - (-0{,}3)\cdot g(x)$). ♥

Sætning 3.6.4 kan i specielle tilfælde med fordel formuleres således:

Sætning 3.6.6.
Lad f være en funktion, som er kontinuert i et interval I og differentiabel i det tilsvarende åbne interval I_o , hvor det om I gælder, at $0 \in I$. Hvis funktionen f opfylder, at: $f'(x) = -k\cdot(f(x) - K)$ for alle $x \in I_o$, hvor k og K er givne konstanter ($k \neq 0$), så er funktionsforskriften for f givet ved:

$$f(x) = K + (f(0) - K)\cdot e^{-k\cdot x}, \quad x \in I$$

hvor f(0) er funktionsværdien af f i 0.

Bevis:
Forudsætningen $f'(x) = -k\cdot(f(x) - K)$ kan omskrives til: $f'(x) = k\cdot K - k\cdot f(x)$. Vi ser hermed, at f opfylder forudsætningerne i sætning 3.6.4, hvor $b = k\cdot K$. Ifølge sætning 3.6.4 findes derfor en konstant c, så: $f(x) = \frac{kK}{k} + c\cdot e^{-k\cdot x} = K + c\cdot e^{-kx}$. Ved at indsætte x = 0 får vi: $f(0) = K + c\cdot 1$ og dermed at $c = f(0) - K$. Hermed er sætningen bevist. ♥

Eksempel 3.6.7:
Om en funktion T gælder, at $T'(x) = -s\cdot(T(x) - T_{opt})$, $x \geq 0$, hvor s og T_{opt} er givne konstanter (for x = 0 er der tale om: $T'_+(0)$). Ifølge sætning 3.6.6 har funktionen T derfor funktionsforskriften:

$$T(x) = T_{opt} + (T(0) - T_{opt})\cdot e^{-sx} \ , \ x \geq 0$$

Øvelse: Tegn grafen for T, hvis T(0) = 200, $T_{opt} = 70$ og s = 0,3. Kommentér resultatet. ♥

Øvelse 3.6.8.
Funktionerne f, g og h er definerede og kontinuerte i [0; ∞[og differentiable i]0; ∞[.
Bestem en forskrift for hver af dem, tegn deres grafer og kommentér resultatet, idet de opfylder, at:
a) $f(0) = 500$, $f'(x) = -0{,}12\cdot(f(x) - 200)$ for alle x > 0
b) $g(0) = 500$, $g'(x) = -0{,}12\cdot(g(x) - 600)$ for alle x > 0
c) $h(0) = 500$, $h'(x) = 0{,}12\cdot(h(x) - 600)$ for alle x > 0 ♥

Til sidst skal det bemærkes, at betingelsen i sætning 3.6.4: $f'(x) = b - k\cdot f(x)$, (som også kan anføres således: $\Delta f(x) \approx (b - k\cdot f(x))\cdot\Delta x$, når $\Delta x \approx 0$) siger, at funktionens væksthastighed er givet ved forskellen mellem en konstant og en størrelse, der er proportional med den aktuelle funktionsværdi. Det er forbavsende ofte, at denne betingelse (tilnærmelsesvist) kan siges at være opfyldt, og vi skal senere (i kapitel 4) give eksempler herpå.

Logistisk vækst.

I forbindelse med eksponentielle vækstfunktioner er der som nævnt tale om en vækstform, hvor funktionens væksthastighed er proportional med den aktuelle funktionsværdi, idet der gælder: $f'(x) = k\cdot f(x)$ eller $\Delta f(x) \approx k\cdot f(x)\cdot\Delta x$, når $\Delta x \approx 0$ (jfr. sætning 3.3.4 og kommentarerne hertil).
Undertiden er der for voksende funktioner tale om, at funktionen højst kan antage en given værdi M, og at funktionens væksthastighed både afhænger af den aktuelle funktionsværdi f(x) og af afstanden mellem f(x) og M, således at væksthastigheden bliver mindre, jo tættere f(x) kommer på M. Vi kan i denne sammenhæng have en ligning af typen: $f'(x) = k\cdot f(x)\cdot(M - f(x))$, og der gælder her følgende sætning:

Sætning 3.6.9.
Hvis en positiv funktion f opfylder, at: $f'(x) = k\cdot f(x)\cdot(M - f(x))$ for alle x i et interval I, hvor k og M er positive konstanter, og hvor $M > f(x)$ for alle x, så findes der en anden positiv konstant c, så funktionsforskriften for f er givet ved:

$$f(x) = \frac{M}{1 + c\cdot e^{-kMx}} \ , \ x \in I$$

Sætningen bevises ikke her. Interesserede læsere henvises til bogen: "Differentialligninger og matematiske modeller".

Eksempel 3.6.10.
Om en funktion f er givet, at $f'(x) = 0{,}00004 \cdot f(x) \cdot (500 - f(x))$, at $0 < f(x) < 500$ for alle $x \in R$, samt at $f(120) = 400$. Ifølge sætning 3.6.9 findes der en positiv konstant c, så:

$$f(x) = \frac{500}{1 + c \cdot e^{-0{,}00004 \cdot 500 \cdot x}} = \frac{500}{1 + c \cdot e^{-0{,}02x}}$$

Konstanten c findes ud fra informationen: f(120) = 400 på følgende måde:

$$400 = \frac{500}{1 + c \cdot e^{-0{,}02 \cdot 120}} \Leftrightarrow 1 + c \cdot e^{-2{,}4} = \frac{5}{4} \Leftrightarrow c = \frac{1}{4} \cdot e^{2{,}4} \Leftrightarrow c = 2{,}755794$$

Funktion f har altså forskriften: $f(x) = \dfrac{500}{1 + 2{,}7558 \cdot e^{-0{,}02 \cdot x}}$, $x \in R$

Øvelse: Tegn grafen for f(x) og kommentér dens udseende. ♥

Funktioner af den type, der omtales i sætning 3.6.9, kaldes logistiske vækstfunktioner, og størrelsen M kaldes ofte for mætningsværdien eller bærekapaciteten. En logistisk vækstmodel benyttes i sammenhænge, hvor der "i begyndelsen" kan foregå en relativt fri (uhindret, uhæmmet) vækst, men hvor der efterhånden forekommer en slags "mætning". Der kan f.eks. være tale om

- alkoholprocenten i en vin under gæringen som funktion af tiden
- graden af solbrændthed som funktion af den tilbragte tid i solen
- det ugentlige salgstal af en ny ikke-sæsonpræget vare som funktion af tiden efter introduktionen på markedet. (Der er tale om en forgængelig forbrugsvaretype som f.eks. en bestemt slags madvarer. Det forudsættes, at varen er et kvalitetsprodukt, der er i stand til at bevare en bestemt markedsandel, samt at der er tale om en nogenlunde konstant reklameindsats).
- størrelsen af en population i et givet miljø som funktion af tiden, når der ikke er ubegrænsede ressourcer (plads, næring, mv.).
- indlæringsgraden (dvs. den brøkdel, der er indlært af en given vidensmængde (f.eks. indholdet i en given matematikbog)) som funktion af den tid, der er anvendt på at studere stoffet
- udbredelsen, dvs. den samlede bestand på markedet, af en ny vare (en såkaldt "varig forbrugsgode", f.eks. DVD-maskiner, hardisk recordere, iPods eller HD fladskærms-TV) som funktion af tiden efter introduktionen af varen på markedet.

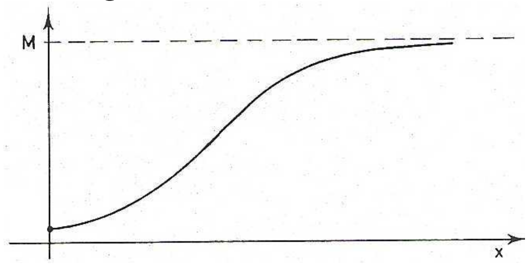
I kapitel 4 gives en mere indgående omtale af nogle eksempler på logistisk vækst.

Øvelse 3.6.11.
Lad f være en given logistisk vækstfunktion. Benyt udtrykket: $f'(x) = k \cdot f(x) \cdot (M - f(x)) = kM \cdot f(x) \cdot \left(1 - \dfrac{f(x)}{M}\right)$ til at argumentere for, at når f(x) er meget mindre end M (dvs. "i begyndelsen" af væksten), så er f næsten givet ved en eksponentiel vækstfunktion, altså en fri/uhæmmet vækst. ♥

I forlængelse af det ovenstående skal omtales, at der gælder følgende sætning om logistiske vækstfunktioner. Beviset for og kommentarer til sætningen overlades til læseren som en øvelse.

Sætning 3.6.12.
Hvis f er den logistiske vækstfunktion fra sætning 3.6.9, så gælder der:

- Konstanten c givet ved: $c = \dfrac{M}{f(0)} - 1$
- $f(x) \to M$ for $x \to \infty$
- Grafen for f, der kaldes en logistisk kurve, har et udseende som vist på følgende figur:



Figur 3.6.2

Forelagt et givet sæt af registrerede data kan det være vanskeligt umiddelbart at afgøre, om de kan beskrives ved en logistisk vækstfunktion. Der findes nogle relativt avancerede sætninger til løsning af dette problem. Vi vil imidlertid ikke komme nærmere ind på disse sætninger her (interesserede læsere henvises til bogen: ”Differentialligninger og matematiske modeller”). Vi vil i stedet for omtale, hvordan grafregneren TI-83/84 kan bruges til at hjælpe med problemstillingen.

Eksempel 3.6.13.
Vi vil prøve at eftervise, at de følgende data med rimelighed kan siges at ligge på en logistisk kurve:

x	20	30	50	60	70	100	110	115	125
f(x)	30800	37800	52200	59500	65200	77800	80000	81100	82700

og vi vil bestemme en funktionsforskrift for f.

Mange grafregnere (lommeregnere), bl.a. TI-83/84-serien, har en logistisk regressionsfunktion, hvormed det bedste bud på en logistisk vækstfunktion svarende til givne data kan findes. På TI-83 gøres følgende: De registrerede værdier lægges som ved andre regressionstyper (jfr. afsnit 1.8) ind i listerne L_1 og L_2, hvorefter der trykkes [STAT] [CALC] og B:Logistic vælges. I displayet står nu Logistic, og man kan hér tilføje diverse parametre. Da der standard vælges L_1 og L_2, hvis ikke andet er anført, kan man nøjes med at tilføje Y_1, hvis man vil gemme funktionsforskriften i Y_1 og bl.a. herudfra vil se grafen i et almindeligt koordinatsystem. Herefter tastes [ENTER] og funktionsforskriften vises i displayet, men desværre uden korrelationskoefficienten r , og dermed uden en vurdering af, hvor tæt de målte data ligger på en logistisk vækstfunktion.
V.hj.a. [2nd] [STAT PLOT] sat til ”on” kan man imidlertid ved anvendelse af [GRAPH] og tilpasning af vinduet se, hvordan punkterne ligger i fht. den tilnærmende graf og dermed få en idé herom.

I det konkrete tilfælde får vi funktionsforskriften: $f(x) = \dfrac{86902}{1 + 3{,}617 \cdot e^{-0{,}03413x}}$

Det overlades til læseren at tegne såvel de givne punkter som grafen for f på grafregneren. ♥

Vi slutter behandlingen af logistisk vækst med at finde en stamfunktion til vækstfunktionen:

<u>Sætning 3.6.14.</u>
Hvis f er en logistisk vækstfunktion, så er en stamfunktion til f givet ved følgende formel:

$$\int \frac{M}{1+c\cdot e^{-kMx}}dx \;=\; \frac{1}{k}\cdot \ln(e^{kMx}+c) \;+q \quad=\; Mx+\frac{1}{k}\cdot \ln(1+c\cdot e^{-kMx}) \;+q$$

hvor $q\in$ R er en vilkårlig konstant.

Bevis:
Indholdet i sætningen kan kontrolleres ved at differentiere funktionerne på højre side af lighedstegnet og se, at det giver funktionen under integraltegnet.
Et egentligt bevis for sætningen forløber således:

Brøken inde i integraltegnet forlænges med e^{kMx}. Vi får: $\int \frac{M}{1+c\cdot e^{-kMx}}dx \;=\; \int \frac{M\cdot e^{kMx}}{e^{kMx}+c}dx$

I dette sidste integral anvender vi substitutionen: $t = e^{kMx}+c$ og $dt = kM\cdot e^{kMx}dx$, hvormed det kan omskrives således: $\int \frac{M\cdot e^{kMx}}{e^{kMx}+c}dx \;=\; \frac{1}{k}\int\frac{1}{t}dt \;=\; \frac{1}{k}\cdot \ln|t|$ + q, hvor q er en vilkårlig konstant .

Hvis vi i dette udtryk indsætter, at $t = e^{kMx}+c$ og husker, at både e^{kMx} og c er positive størrelser, så fås den første del af formelen.

Det andet udtryk for stamfunktionen fås ved at konstatere, at $e^{kMx}+c \;=\; e^{kMx}\cdot(1+c\cdot e^{-kMx})$ og derefter anvende regneregler for ln og for almindelig reduktion. Detaljerne overlades til læseren.
Hermed er sætningen bevist. ♥

Det er en smagssag, om man vil anvende det første eller det andet udtryk for stamfunktionen, men i en given anvendelse kan det afhænge af bl.a. traditioner indenfor faget, hvilket af de to udtryk man vælger.

Kap. 4: Eksempler på modeller – med anvendelse af differential- eller integralregning.

4.1. Fysiske emner.

Radioaktivitet og stråling:

Modelbeskrivelse:
I det følgende regnes der på deterministiske (dvs. forudbestemmelige, eksakte) modeller. I virkeligheden er der ikke tale om eksakte værdier, men om statistiske udsving p.gr.a. det radioaktive henfalds og absorptionens statistiske natur (der er en vis sandsynlighed for henfald hhv. for absorption). Det vi omtaler her svarer i virkeligheden til middelværdien af de stokastiske variable involveret i problemstillingen.
Vi tillader os desuden at regne funktioner, der egentlig kun antager heltallige værdier, som differentiable eller kontinuerte funktioner, hvilket skyldes, at der er tale om så store tal, at én enhed ikke er nogen væsentlig forandring, hvormed der som model udmærket kan bruges en kontinuert funktion i stedet for en diskret, heltallig funktion. (*Denne problemstilling gælder i mange andre model-sammenhænge, og den omtales igen under økonomiske modeller senere i teksten).*

Vedr. elementære øvelser om radioaktivitet og stråling: Se øvelse 2.2.2, 2.2.3, 2.2.5 og 2.2.6.

Eksempel 4.1.1.
I eksempel 2.2.1 omtalte vi, at visse atomkerner har den egenskab, at de før eller siden ”går i stykker” under udsendelse af radioaktiv stråling (som består af små ”partikler”), hvorefter den tilbageblevne del af kernen ordner sig i en ny slags atomkerne, samt at vi i denne situation siger, at den radioaktive kerne *henfalder*.
Vi omtalte desuden, at den radioaktive stråling kan måles med et Geiger-Müller-rør (en ”Geigertæller”), idet man måler *strålingens aktivitet* (dvs. antal registrerede partikler pr. sekund – se mere herom i øvelse 4.1.2)

For radioaktive atomkerner forholder det sig således, at uanset hvor lang tid en kerne har eksisteret, så vil der være den samme sandsynlighed for, at kernen henfalder i løbet af det næste sekund. (Man sammenligner her ofte kernen med en terning: Uanset hvor mange gange man har kastet en terning (svarende til: uanset hvor lang tid der er gået), så vil der være den samme sandsynlighed for at få en 6’er i det næste kast (hvor det at få en 6’er svarer til, at kernen henfalder)).

Hvis vi til tiden t har et stort antal kerner N(t) af et givet radioaktivt stof, som endnu ikke er henfaldet, så vil antallet af kerner, der henfalder i løbet af det næste sekund, være proportional med N(t).
Hvis vi betragter et lille tidsrum Δt (”lille” i fht. den ”hastighed”, hvormed kernerne henfalder), så vil antallet af kerner, der henfalder i løbet af tidsrummet Δt stort set være proportional med Δt.
Ændringen (”tilvæksten”) ΔN i antallet af radioaktive kerner i løbet af et lille tidsrum Δt vil derfor alt i alt tilnærmelsesvist være givet ved:

$$\Delta N \approx -k \cdot N(t) \cdot \Delta t$$

hvor ”cirka-lig-med-tegnet” $\approx$ mere og mere bliver til et lighedstegn, jo tættere Δt er på 0.
k er proportionalitetsfaktoren, som kaldes henfaldskonstanten for det givne radioaktive materiale. (Mere præcist er k lig med sandsynligheden pr. tidsenhed for at en given kerne henfalder – se nedenfor). Minusset foran k medtages, idet N bliver mindre, dvs. idet ΔN er negativ, og idet vi ønsker at k skal være en positiv konstant. Ved division med Δt får vi differenskvotienten for N(t):

$\dfrac{\Delta N}{\Delta t} \approx -k \cdot N(t)$, og hvis vi lader Δt gå mod 0 får vi, at tegnet $\approx$ erstattet af et lighedstegn, samtidig med at differenskvotienten bliver til differentialkvotienten.
Funktionen N(t), som beskriver antallet af ikke-henfaldne kerner til tiden t, opfylder altså ligningen:

$$N'(t) = -k \cdot N(t)$$

Ifølge sætning 3.3.4 har vi derfor, at der findes en konstant K, så $N(t) = K \cdot e^{-kt}$.
Hvis antallet af kerner til tiden 0 (altså når målingen begynder) kaldes N_o, så får vi:
$N_o = N(0) = K \cdot e^{-k \cdot 0} = K$, og dermed:

$$N(t) = N_o \cdot e^{-kt} \qquad \text{eller:} \qquad N(t) = N_o \cdot \exp(-kt)$$

Antallet af ikke-henfaldne kerner er eksponentielt aftagende.

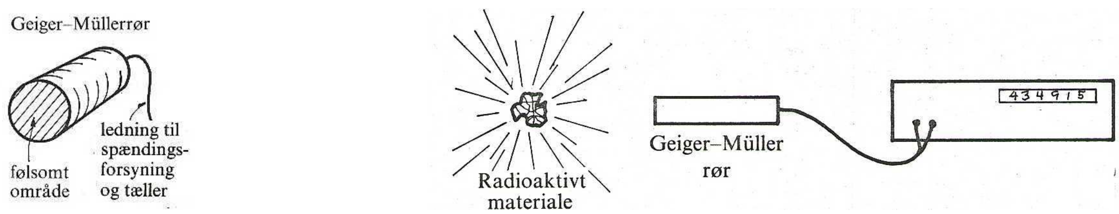
Som ved andre eksponentielt aftagende funktioner kan vi tale om og regne med halveringskonstanter. I dette tilfælde er der – som også omtalt i eksempel 2.2.1 – tale om halveringstiden $T_{½}$ (dvs. den tid der går inden halvdelen af de radioaktive kerner i det givne radioaktive materiale er henfaldet), og halveringstiden $T_{½}$ og henfaldskonstanten k er knyttet sammen af følgende ligninger:

$$T_{½} = \frac{\ln 2}{k} \quad \text{og} \quad k = \frac{\ln 2}{T_{½}} .$$

Af udtrykket: $\Delta N \approx -k \cdot N(t) \cdot \Delta t$ får vi ved omskrivning, at $\dfrac{-\Delta N}{N(t)} \approx k \cdot \Delta t$.

Idet $-\Delta N$ angiver antallet af kerner, der henfalder i løbet af det lille tidsinterval Δt, og idet N(t) angiver hvor mange kerner vi har ved starten af dette tidsinterval, er brøken $\dfrac{-\Delta N}{N(t)}$ det samme som (den frekventielle) sandsynlighed for, at en kerne vil henfalde i løbet af tidsrummet Δt.
Da denne brøk er lig med $k \cdot \Delta t$ ser vi (som omtalt ovenfor), at henfaldskonstanten k er det samme som sandsynligheden pr. tidsenhed for, at en given kerne henfalder. ♥

Øvelse 4.1.2.
I eksempel 4.1.1 omtalte vi, at antallet N(t) af radioaktive kerner, som til tiden t er tilbage (dvs. endnu ikke henfaldet) af et givet radioaktivt materiale, kan beskrives ved funktionen N(t) = $N_o \cdot e^{-kt}$, hvor N_o er antallet af ikke-henfaldne kerner til tiden 0, og hvor k er en for det pågældende radioaktive materiale karakteristisk konstant (henfaldskonstanten).
Dette fremkom, fordi $\Delta N \approx -k \cdot N(t) \cdot \Delta t$, når Δt er lille. Når radioaktiv stråling registreres, f.eks. af et Geiger-Müller-rør, så måler vi ikke N(t), men derimod de partikler, som udsendes af de henfaldende kerner (og vi registrerer endda kun en bestemt brøkdel af disse partikler, se figur 4.1.1).



a) b)

Fig. 4.1.1

Ved at måle (tælle) i relativt små tidsintervaller Δt, kan vi bestemme aktiviteten A(t) (dvs. henfaldshastigheden), som er lig med antal henfaldne kerner pr. tidsenhed.

a) Argumentér for, at $A(t) \approx \frac{|\Delta N|}{\Delta t} = \frac{-\Delta N}{\Delta t}$

b) Vis dernæst, at $A(t) = A_o \cdot \exp(-kt)$, hvor $A_o = N_o \cdot k$ er aktiviteten til tiden 0.
Der gælder altså:

$$A(t) = A_o \cdot e^{-kt} \quad \text{eller} \quad A(t) = A_o \cdot \exp(-kt)$$

Aktiviteten fra et radioaktivt stof er eksponentielt aftagende
– med samme værdi af konstanten k som ved kernernes henfald !

c) Argumentér for, at vi med opstillingen på figur 4.1.1 i virkeligheden ikke måler A(t), men en bestemt procentdel af A(t), som er fast så længe opstillingen ikke ændres, og at vores måletal derfor hele tiden er proportionale med A(t).

I nedenstående tabel ses aktiviteten A(t) af den radioaktive stråling fra et givet radioaktivt materiale som funktion af tiden t. t måles i sekunder og A(t) måles i antal partikler pr. sekund.

t	0	15	30	45	60	75	90	105	120	135	150
A(t)	300	270	253	232	210	200	181	167	149	141	129

d) Indtegn disse værdier i et semilogaritmisk koordinatsystem, og tegn den ”bedste” rette linie igennem disse punkter (dvs. tegn den rette linie, som bedst tilnærmer alle punkterne).
At punkterne ikke ligger præcis på en ret linie skyldes statistiske ”udsving” (statistiske fluktuationer), som fremkommer p.gr.a. henfaldets tilfældighedsmæssige karaktér – eller mere matematisk udtrykt: idet k står for sandsynligheden pr. tidsenhed for henfald.

e) Find en funktionsforskrift for A(t) på grundlag af den tegnede linie og/eller v.hj.a. en eksponentiel regression på grafregneren eller i Excel.

f) Hvor stor er henfaldskonstanten (husk enheder) ?

g) Beregn på baggrund heraf halveringstiden $T_{½}$, og sammenlign denne med $T_{½}$ bestemt v.hj.a. grafen for A(t), (dvs. den tegnede linie). ♥

Eksempel 4.1.3.

I eksempel 2.2.4 omtalte vi absorption af stråling, når den trænger ind igennem et stof/materiale. (Der er tale om gammastråling, røntgenstråling og i en række sammenhænge også betastråling).

Strålingens intensitet et givet sted defineres som antallet af ”partikler”, som pr. sekund passerer en arealenhed (f.eks.1 cm^2) placeret vinkelret på strålingsretningen det pågældende sted.
Strålingens intensitet i dybden x af materialet betegnes med I(x). På grund af absorption vil I(x) aftage efterhånden som strålingen trænger ind igennem stoffet, dvs. efterhånden som x forøges.

Efter samme princip som anvendtes i eksempel 4.1.1 på N(t) vil vi nu undersøge intensiteten I(x). Hvis intensiteten i dybden x er lig med I(x), så vil intensitetsændringen ΔI i et smalt materialelag Δx (se figur 4.1.2) tilnærmelsesvist være proportional med I(x) og med Δx. (At materialelaget er ”smalt”, og at Δx dermed er ”lille”, skal ses i forhold til den ”hastighed” hvormed materialet absorberer strålingen på sin vej ind igennem materialet).

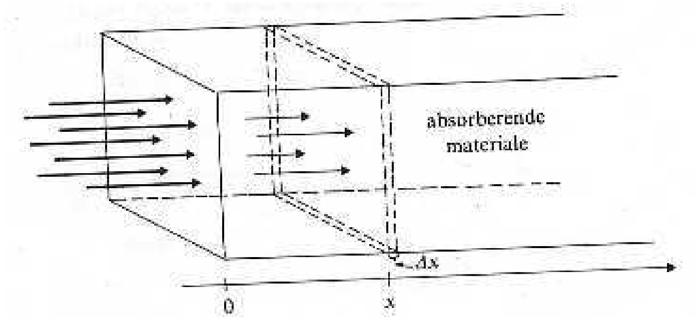


Fig. 4.1.2

Vi har således, idet ΔI er negativ, at $\Delta I \approx -\mu \cdot I(x) \cdot \Delta x$, hvor proportionalitetsfaktoren μ kaldes absorptionskoefficienten for det pågældende materiale i relation til den givne stråling. μ måles i m^{-1}. Ved at dividere med Δx og anvende, at Δx er meget lille (dvs. lade Δx gå mod 0), får vi, at funktionen I(x), der beskriver intensiteten af strålingen i dybden x i et givet materiale, opfylder ligningen:

$$I'(x) = -\mu \cdot I(x).$$

Som i eksempel 4.1.1 ser vi, at

$$\boxed{I(x) = I_o \cdot e^{-\mu x} \quad \text{eller} \quad I(x) = I_o \cdot \exp(-\mu x)}$$

Intensiteten af strålingen er eksponentielt aftagende.

hvor I_o er strålingens intensitet ved overfladen af materialet (dvs. $I_o = I(0)$ = intensiteten inden strålingen begynder at trænge ind i materialet).
Vi ser desuden, at halveringstykkelsen $x_{½}$ (dvs. den tykkelse materialet skal have for at absorbere halvdelen af den pågældende stråling) er knyttet sammen med absorptionskoefficienten μ i følgende ligninger:

$$x_{½} = \frac{\ln 2}{\mu} \quad \text{og} \quad \mu = \frac{\ln 2}{x_{½}} .$$

Det bemærkes, at absorptionskoefficienten (og dermed halveringstykkelsen) afhænger af absorptionsmaterialet, af strålingstypen og af strålingsenergien. ♥

Eksempel 4.1.4.

a) I øvelse 4.1.2 så vi, at aktiviteten fra en radioaktiv kilde (dvs. antal udstrålede partikler pr. tidsenhed) er eksponentielt aftagende, idet der gælder: $A(t) = A_o \cdot e^{-kt}$, hvor k er henfaldskonstanten for det pågældende stof. Da $kt \to \infty$ for $t \to \infty$, idet $k > 0$, ser vi, at $A(t) \to 0$ for $t \to \infty$.
Aktiviteten af f.eks. radioaktivt affald fra et atomkraftværk vil altså efterhånden forsvinde.
Problemet er bare, hvor længe dette varer (dvs. hvornår aktiviteten er på et ufarligt niveau).

b) I eksempel 4.1.3 så vi, at intensiteten I af radioaktiv stråling aftager eksponentielt, når strålingen passerer igennem et materiale, idet der gælder, at $I(x) = I_o \cdot e^{-\mu x}$, hvor μ er absorptionskoefficienten for det absorberende materiale i fht. den givne stråling.
Vi ser derfor, at $I(x) \to 0$ for $x \to \infty$.
Vi ser hermed, at det i punkt a) omtalte radioaktive affald i princippet kan uskadeliggøres ved at indkapsle det i ”uendeligt” tykke beholdere.
Da dette i praksis er umuligt, må man vælge en ”tilstrækkelig” tyk beholder (som så forhåbentlig kan holde i det antal år, det tager inden materialets radioaktivitet er ufarlig). ♥

Temperatur-udligning.

Eksempel 4.1.5.
Hvis et givet legeme A har temperaturen T(t) til tiden t, og hvis dette legeme bringes i kontakt med et ”stort legeme” B med temperaturen T_o , så vil A’s temperatur efterhånden indstille sig på temperaturen T_o. (Det ”store legeme” er så stort, at dets temperatur praktisk talt er konstant – dets temperatur er altså i praksis upåvirket af, at det afkøler eller opvarmer A. Overvej dette !! Vi kan f.eks. tænke på en ovnplade med småkager, som tages ud af den varme ovn og anbringes på køkkenbordet. Det ”store legeme” er her køkkenbordet, al luften og principielt alle øvrige objekter i lokalet).

Den temperaturtilvækst ΔT, som sker i løbet af et lille tidsrum Δt, må tilnærmelsesvist være proportional med forskellen imellem temperaturerne T(t) og T_o, og med Δt selv. Vi har altså, at

$$(*) \qquad \Delta T \approx -a\cdot(T(t) - T_o)\cdot \Delta t$$

hvor a er en positiv konstant. (Det overlades til læseren at argumentere for, at minusset skal medtages i udtrykket !). Konstanten a afhænger af en række ting, bl.a. af A’s overfladeareal, af den hastighed hvormed varmen i legemet B kan føres bort fra eller hen imod A, og af varmeledningsevnen af en eventuel grænseoverflade mellem A og B (tænk f.eks. på forskellen i afkøling af te i en tekande uden tehætte, med tehætte og i en termokande).

Udtrykket (∗) kan, idet Δt er lille, omskrives til:

$$T'(t) = -a\cdot(T(t) - T_o)$$

Dette udtryk kaldes Newton’s afkølingslov (selvom den både gælder for afkøling og opvarmning) under de beskrevne forudsætninger om legeme A (”lille legeme”) og B (”stort legeme”).

Ifølge sætning 3.6.6 ser vi, at hvis T(t) opfylder Newtons afkølingslov, så gælder der:

$$\boxed{T(t) = (T(0) - T_o)\cdot e^{-at} + T_o}$$
Newtons afkølingslov for termisk kontakt mellem et lille og et stort legeme.

hvor T(0) er begyndelsestemperaturen af legeme A (det lille legeme). ♥

Øvelse 4.1.6.
Antag at temperaturfunktionen T(t) opfylder Newtons afkølingslov (se eksempel 4.1.5).
a) Tegn grafen for T(t), hvis $T(0) = 100\ ^oC$, $T_o = 20\ ^oC$ og $a = 0{,}03$
b) Tegn grafen for T(t), hvis $T(0) = 10\ ^oC$, $T_o = 200\ ^oC$ og $a = 0{,}1$
Kommentér udseendet af graferne. ♥

Øvelse 4.1.7.
Gør rede for, at temperaturfunktionen T(t) i eksempel 4.1.5 opfylder det vi må forvente, nemlig at: $T(t) \to T_o$ for $t \to \infty$, og at vi dermed får temperaturudligning i modelberegningen. ♥

Øvelse 4.1.8.
Familien von Hansen har en del flasker rødvin liggende i deres vinkælder, hvor der næsten konstant året rundt er 8 ^oC. Hr. von Hansen mener, at rødvinen skal op på en temperatur af 17 ^oC, før vinen bør drikkes, og at vinen straks efter at være hentet i vinkælderen skal trækkes op, så den kan stå og ilte, medens den tempereres.
Hr. von Hansen, der er en meget omhyggelig vinentusiast, har konstateret, at det tager 52 minutter for vinen at nå op på de 17 ^oC, når den står til iltning i deres stue, hvor der er 22 ^oC.
a) Bestem konstanten a i Newtons afkølingslov for rødvinsflasken.
b) Beregn den hastighed, hvormed temperaturen stiger til tidspunktet 30 minutter efter ophentning fra vinkælderen.

En dag får Familien von Hansen besøg af deres venner hr. og fru Schlechthausen, som helst vil have vinen ved en temperatur på 19 ^oC.
c) Hvor lang tid før brug skal rødvinen tages op af vinkælderen, hvis Schlechthausens ønske skal imødekommes ? ♥

Øvelse 4.1.9.
En norsk hytteudlejer har en såkaldt "hyttegrend" med flere hytter i nærheden af hinanden. Hytterne udlejes hele året, og vi ser i denne opgave på en bestemt periode (vinterferien) i den kolde årstid. Som en service overfor gæsterne har ejeren på forskellig måde gjort klar til at modtage dem, bl.a. ved at tænde for varmen, så der er 23 ^oC inde i hytterne.
Kort efter at gæsterne er ankommet til hytterne sker der en strømafbrydelse, idet en storm i bjergene vælter en ustabil højspændingsmast. Gæsterne får at vide, at det desværre vil tage et par dage at få genetableret strømforsyningen, og temperaturen i hytterne begynder langsomt at aftage.

Familien Hansen har lejet den billige hytte "Istappen", hvor der kun er elvarme, men ingen brændeovn eller pejs. Vi regner med (jfr. det ovenstående), at temperaturen f(t) i huset til tiden t efter strømafbrydelsen er givet ved udtrykket:

$$f(t) \;=\; -2 + 25\cdot e^{-0{,}023\cdot t}$$

hvor t måles i timer og f(t) måles i ^oC.
a) Hvor lang tid går der efter strømafbrydelsen inden temperaturen kommer under 13 ^oC.
b) Med hvilken hastighed ændrer temperaturen sig 10 timer efter strømafbrydelsen.

Familien Jensen har lejet den store hytte "Oasen", hvor der er en brændeovn i stuen, og hvor der er rigeligt med brænde i hyttens brændeskur. Ved at tænde op i brændeovnen og konstant tilføre nyt brænde er de i stand til at opvarme størsteparten af stuen til en temperatur på 19 ^oC og fastholde denne, medens temperaturen i de tilstødende soverum, toilet og køkken følger funktionen:

$$g(t) = 5 + 18\cdot e^{-0{,}014\cdot t}.$$

c) Hvilken temperatur er der i soverummene, når strømmen efter 42 timer kommer igen.
d) Forklar, hvorfor der i funktionsudtrykket (modellen) for temperaturen i soveværelserne står 5 i modsætning til –2 ovenfor, samt hvorfor konstanten i eksponentialfunktionen, dvs. 0,014, er mindre end de 0,023 ovenfor. ♥

Øvelse 4.1.10.
En virksomhed har en ovn, som benyttes til hærdning af nogle materialer. Når ovnen tændes, har den temperaturen 20 ^oC, og den varmes efterhånden op til driftstemperaturen 430 ^oC.

Temperaturen i ovnen kan beskrives ved en funktion af typen: $T(t) = b - c \cdot e^{-a \cdot t}$, hvor a, b og c er positive konstanter, og hvor t er tiden der er gået siden ovnen blev tændt. t måles i minutter og T(t) måles i ^{o}C. Det oplyses, at temperaturen efter 8 minutter er 250 ^{o}C

a) Bestem konstanterne a, b og c.
b) Tegn grafen for T(t)
c) Ovnen kan tages i anvendelse, når temperaturen er blevet 400 ^{o}C. Beregn hvor lang tid der går inden ovnen er klar til brug.

Ved at anskaffe et nyt varmelegeme kan ovnens temperatur forøges hurtigere fra 20 ^{o}C til 430 ^{o}C. (Det nye varmelegeme bevirker, at konstanten a får værdien: a = 0,51).
Ovnen er imidlertid konstrueret af nogle materialer, der højst kan tåle en temperaturforøgelseshastighed på 150 ^{o}C pr. minut.

d) Undersøg, om det er muligt at anvende det nye varmelegeme i ovnen uden at ødelægge den. ♥

Øvelse 4.1.11.
Når man skal lave flødeis må nedfrysningen ikke foregå for hurtigt, idet isen ellers krystalliserer. En fryser af mærket I.C.E. er på tre forskellige indstillinger A, B og C af reguleringsknappen blevet testet med ti portioner á 1 liter – lavet efter samme opskrift, og alle med starttemperaturen 20 ^{o}C.

Der fremkom følgende resultater:
A: Efter 1,5 timer var temperaturen af isen –10 ^{o}C, og sluttemperaturen var –24 ^{o}C
B: Efter 1 time var temperaturen af isen 0 ^{o}C, og og sluttemperaturen var –22 ^{o}C
C: Efter 4 timer var temperaturen –10 ^{o}C, og sluttemperaturen var –18 ^{o}C

Antag at temperaturen af flødeisen som funktion af tiden opfylder Newtons afkølingslov.

a) Bestem en funktionsforskrift for isens temperatur for hver af de tre indstillinger A, B og C. Tegn grafen for hver af de tre funktioner i tidsintervallet 0 – 8 timer.

Hvis flødeisen i over ½ time bliver udsat for en nedfrysningshastighed på –6 ^{o}C/time eller mere, efter at selve indfrysningen er begyndt (hvilket sker omkring 0 ^{o}C), så vil isen krystallisere og vil dermed være ubrugelig (til at sælge mm.)

b) Undersøg om isen vil krystallisere ved nogen af de tre indstillinger A, B og C.

Opgave for de fysikkyndige:

c) Hvorfor står der: ”Antag at temperaturen af flødeisen som funktion af tiden opfylder Newtons afkølingslov” ? Gør den da ikke det ?
Og hvis ikke: Spiller det nogen rolle for svaret på opgaven ? ♥

Opladning og afladning af en kondensator.

Eksempel 4.1.12.
I kapitel 2 så vi bl.a. på et forsøg, hvor en kondensator oplades og aflades igennem en stor modstand (se side 75-76). Vi vil nu foretage teoretiske beregninger på disse forsøg/processer.
Først skal vi imidlertid have lidt mere basal teori om kondensatorer mm. på plads.

En kondensator kaldes også en kapacitor. Den består som antydet af to fra hinanden isolerede ledere (i sin simpleste form af to parallelle metalplader), som kan oplades med modsatte elektriske ladninger Q og –Q, som tiltrækker hinanden uden at kunne flytte hinanden. Der vil derfor være en spændingsforskel U imellem de to ledere, og denne spændingsforskel er proportional med ladningen Q.

For en <u>given</u> kondensator/kapacitor findes altså en konstant K som opfylder, at: $Q = K \cdot U$.
Det ses, at jo større værdi K har, desto mere ladning kan kondensatoren indeholde pr. volts spændingsforskel. K kaldes kondensatorens <u>kapacitans</u>, og den måles i enheden F (farad). Da ladning måles i C (Coulomb) og spændingsforskel i V (Volt) ser vi, at F = C/V.

Kondensatoren indsættes i et kredsløb med en spændingskilde (strømforsyning) og en stor modstand (se figur 2.3.3 b)). I startsituationen er der ingen ladning på kondensatoren, og den er altså elektrisk neutral. Men efterhånden som tiden går, strømmer der positiv ladning hen mod den leder i kondensatoren, som er nærmest på spændingskildens positive pol (den lange), ligesom der strømmer positiv ladning væk fra den leder, der er nærmest spændingskildens negative pol (den korte). Dette skyldes, at spændingskilden gerne vil have en strøm til at gå i kredsløbet, og det er der egentlig ingen mulighed for, idet de to ledere i kondensatoren er isolerede fra hinanden. Men netop fordi disse ledere er i stand til at indeholde en del ladning, går der en strøm, medens opladningen står på. Spændingskildens positive pol frastøder positive ladninger og forsøger at skubbe dem rundt i kredsløbet, hvormed de havner på kondensatorens ene leder (der bliver kondensatorens positivt ladede side), og spændingskildens negative pol tiltrækker positive ladninger og fjerner dem dermed fra kondensatorens anden leder (som bliver kondensatorens negativt ladede side).

Denne proces går efterhånden i stå, idet ladningen på kondensatoren – og dermed spændingsforskellen over kondensatoren – gradvist opbygges. Når der er samme elektriske spænding på kondensatorens positive leder som ved spændingskildens positive pol, kan der ikke flyttes mere ladning, idet der ikke længere er en spændingsforskel imellem disse – og tilsvarende med de negative sider.

Dette kan også indses på følgende måde: Det samlede spændingsfald over modstanden (U_R) og over kondensatoren (U) er lig med spændingsstigningen over spændingskilden U_{sp} , dvs. $U_{sp} = U_R + U$. Heraf ses, at: $U_R = U_{sp} - U$. Ifølge Ohms lov (se eksempel 2.4.7 c)) gælder der, at $U_R = R \cdot I$, hvor R er modstandens størrelse (målt i Ohm (Ω)) og I er strømstyrkens størrelse (målt i Ampere (A)). Strømstyrken i en leder (en ledning) er defineret som den ladningsmængde, der pr. tidsenhed passerer et tværsnit af lederen. Hvis $U = U_{sp}$ får vi, at $U_R = 0$ V, og dermed at strømstyrken I igennem modstanden er I = 0 A. Dette er den laveste strømstyrke man kan have – og den svarer til, at der ikke transporteres nogen ladning. (Bemærk, at strømstyrken altså også aftager i løbet af processen). Den maksimale spændingsforskel over en kondensator i en opladningsproces er altså lig med spændingsforskellen over den spændingskilde, som bevirker opladningen, dvs. $U_{max} = U_{sp}$.

Lad os nu prøve at regne på problemstillingen:
Hvis der til tiden t i løbet af et <u>lille</u> tidsinterval Δt flyttes ladningen ΔQ igennem modstanden og over på kondensatorens positive plade, så er strømstyrken I(t) givet ved: $I(t) \approx \dfrac{\Delta Q}{\Delta t}$, og da Δt er meget lille kan vi altså skrive, at: $Q'(t) = I(t)$.
Kombineres dette med ligningen: $U_R(t) = U_{sp} - U(t)$, hvor vi har fremhævet at spændingsforskellen over såvel modstanden som kondensatoren afhænger af tiden, med ligningen: $Q(t) = K \cdot U(t)$, og med Ohms lov: $U_R(t) = R \cdot I(t)$ får vi i alt (kontrollér), at:

$$(*) \quad R \cdot Q'(t) = U_{sp} - \frac{Q(t)}{K}$$

Hvis Q_{max} betegner den maksimale ladning på kondensatorens positive leder, så får vi, at $Q_{max} = K \cdot U_{max}$ (idet vi har den maksimale ladning, når der er den maksimale spændingsforskel). Da vi ovenfor fandt, at $U_{max} = U_{sp}$ ser vi i alt, at $U_{sp} = \frac{Q_{max}}{K}$. Indsættes dette i (∗) får efter lidt omskrivninger (kontrollér), at:

$$Q'(t) = \frac{1}{RK}(Q_{max} - Q(t)) = -\frac{1}{RK}(Q(t) - Q_{max})$$

Ifølge sætning 3.6.6 får vi hermed, at

$$Q(t) = Q_{max} + (Q(0) - Q_{max}) \cdot e^{-\frac{1}{RK} \cdot t}$$

og da $Q(0) = 0$, idet der ikke er nogen ladning på kondensatoren fra starten, får vi (kontrollér), at:

$$Q(t) = Q_{max} \cdot (1 - e^{-\frac{1}{RK} \cdot t})$$

Ved division på begge sider af lighedstegnet med K får vi endelig resultatet:

$$\boxed{U(t) = U_{sp} \cdot (1 - e^{-\frac{1}{RK} \cdot t})}$$

Opladning af kondensator.

Denne ligning beskriver spændingsforskellen U(t) over en kondensator med kapacitansen K, når den oplades af en spændingskilde med spændingsforskellen U_{sp} i et kredsløb med en modstand med resistansen R.

Når en opladet kondensator aflades gennem en modstand – i forsøget på figur 2.3.3 b) sker det ved at udelukke spændingskilden fra kredsløbet v.hj.a. kontakten K –, så vil tiltrækningen mellem den negative og den positive ladning på kondensatorens ledere forsøge at hindre strømmen i at gå igennem modstanden. Men det lykkes ikke, da der jo er en spændingsforskel mellem de to plader og dermed over modstanden. Efterhånden som strømmen går, vil pladerne derfor blive afladet igen og spændingsforskellen aftage. Ud fra ligningen: $U + U_R = 0$ kan der på samme måde som ved opladningen argumenteres for den følgende ligning (hvilket overlades til den interesserede læser):

$$Q'(t) = -\frac{1}{RK} \cdot Q(t) ,$$

hvoraf vi ifølge sætning 3.3.4 får, at der findes en konstant L, så: $Q(t) = L \cdot e^{-\frac{1}{RK} \cdot t}$. Hvis ladningen på kondensatoren til tiden t = 0 kaldes Q_{start}, så får vi: $L = Q_{start}$, og dermed: $Q(t) = Q_{start} \cdot e^{-\frac{1}{RK} \cdot t}$

Ved division med K på begge sider af lighedstegnet får vi endelig resultatet:

$$\boxed{U(t) = U_{start} \cdot e^{-\frac{1}{RK} \cdot t}}$$

Afladning af kondensator.

Denne ligning beskriver spændingsforskellen U(t) over en kondensator med kapacitansen K, når den aflades gennem en modstand med resistansen R, som den sidder i kredsløb med.

Kondensatorer bruges i et utal af sammenhænge i elektriske og elektroniske kredsløb, og det vil ikke yde kondensatoren retfærdighed at nævne et eksempel frem for et andet.
Alligevel vil vi omtale et eksempel, som ikke har med mikroprocessorer, elektroniske printkort og lignende at gøre, hvor man ellers oftest møder kondensatorer. Det drejer sig om, at kondensatorens evne til at opbevare ladning udnyttes som ”glattekondensator” på udgangen fra spændingsforsyninger og på indgangen til køleskabe, forstærkere, fjernsyn osv. Ved at placere en kondensator med stor kapacitans imellem ud- eller indgangenes to poler undgås voldsomme variationer i strømstyrken i disse apparater, når de tændes eller slukkes, hvormed der bl.a. undgås skader på apparaturet og signalstøj i nærværende radioer, TV’er mm.
Vi vil desuden omtale, at kondensatorer bruges i forstærkere til at forbedre signal/støj-forholdet (se eksempel 2.1.11). Dette skyldes, at kondensatorer ikke lader jævnstrøm passere, hvorimod vekselstrøm godt kan ”passere”, og herved fjernes en del af det der normalt kaldes ”brum” fra det vekselstrømssignal, man ønsker at forstærke. At jævnstrøm ikke kan passere skyldes ganske simpelt, at der ikke er forbindelse igennem kondensatoren – se det ovenstående. At vekselstrøm godt kan ”passere” skyldes populært fortalt, at kondensatorens ene leder skiftevis oplades positivt, aflades, oplades negativt, aflades osv. p.gr.a. vekselstrømmen. Og p.gr.a. den elektriske tiltrækningskraft bevirker dette en tilsvarende skiftevis op- og afladning af kondensatorens anden leder (blot med modsat fortegn), hvilket resulterer i, at der på den ”modsatte side” af kondensatoren konstateres en vekselstrøm med samme frekvens som den oprindelige. ♥

<u>Øvelse 4.1.13.</u>
Om figur 2.3.4 oplyses, at 1 cm på 1.aksen svarer til 2 sek., at 1 cm på 2.aksen svarer til 10 V, samt at op- og afladning foregik gennem en modstand på 300.000 Ω.
Bestem en (tilnærmet) værdi for kondensatorens kapacitans. ♥

<u>Øvelse 4.1.14.</u>
En kondensator med kapacitansen K oplades af en spændingskilde på 50 V igennem en modstand med resistansen R. Bestem i hvert af følgende tilfælde, hvor lang tid der går inden spændingsforskellen U(t) over kondensatoren er oppe på 35 V, og bestem $\lim_{t\to\infty} U(t)$:

a) K = $200\cdot 10^{-6}$ F og R = $500\cdot 10^{3}\,\Omega$
b) K = $2\cdot 10^{-6}$ F og R = $500\cdot 10^{3}\,\Omega$
c) K = $2\cdot 10^{-6}$ F og R = $5\cdot 10^{3}\,\Omega$
d) K = $20\cdot 10^{-3}$ F og R = $5\cdot 10^{6}\,\Omega$

Kommentér resultaterne i punkt a, b, c og d. ♥

<u>Øvelse 4.1.15.</u>
En kondensator med kapacitansen K er opladt til spændingsforskellen 200 V og aflades gennem en modstand med resistansen R. Bestem i hvert af følgende tilfælde, hvor lang tid der går inden spændingsforskellen U(t) over kondensatoren er nede på 75 V, og bestem $\lim_{t\to\infty} U(t)$:

a) K = $200\cdot 10^{-6}$ F og R = $500\cdot 10^{3}\,\Omega$
b) K = $2\cdot 10^{-6}$ F og R = $500\cdot 10^{3}\,\Omega$
c) K = $2\cdot 10^{-6}$ F og R = $5\cdot 10^{3}\,\Omega$
d) K = $20\cdot 10^{-3}$ F og R = $5\cdot 10^{6}\,\Omega$

Kommentér resultaterne i punkt a, b, c og d. ♥

<u>Øvelse 4.1.16.</u>
a) Vis at halveringstiden for afladningen af en kondensator med kapacitansen K gennem en modstand med resistansen R er givet ved: $T_{½} = R\cdot K\cdot \ln 2$
b) Udregn halveringstiden for tilfældene a) – d) i øvelse 4.1.15 – og kommentér resultaterne. ♥

Geometriske objekter (oppustning af ballon)

Eksempel 4.1.17.
En kugleformet ballon pustes op v.hj.a. en gasflaske.
På et givet tidspunkt er radius i ballonen 6 cm og gassens indstrømningshastighed 400 cm^3/sek.
Vi vil bestemme den hastighed, hvormed radius i ballonen forøges til det pågældende tidspunkt.

Ifølge eksempel 2.4.2 har vi, at: $r = \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}} \cdot V^{\frac{1}{3}}$. Da både r og V afhænger af tiden, får vi således:

$$r(t) = k \cdot V(t)^{\frac{1}{3}} \qquad \text{hvor } k = \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}}$$

Heraf finder vi (ved anvendelse af reglen for differentiation af sammensatte funktioner (se sætning A.3.10), at:

$$r'(t) = k \cdot \tfrac{1}{3} \cdot V(t)^{-\frac{2}{3}} \cdot V'(t)$$

$r'(t)$ er den søgte hastighed, og $V'(t)$ er den hastighed, hvormed rumfanget forøges til tiden t.
Ved indsættelse af de opgivne tal (og ved anvendelse af, at rumfanget af en kugle er givet ved: $V = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3$) finder vi, at:

$$V(t) = \tfrac{4}{3}\pi \cdot 6^3 \text{ cm}^3 = 904{,}8 \text{ cm}^3 \qquad \text{og} \qquad V'(t) = 400 \text{ cm}^3\text{/sek.}$$

Vi får hermed:

$$r'(t) = \sqrt[3]{\tfrac{3}{4\pi}} \cdot \tfrac{1}{3} \cdot 904{,}8^{-\frac{2}{3}} \text{ cm}^{-2} \cdot 400 \text{ cm}^3\text{/sek} = 0{,}88 \text{ cm/sek.}$$

Ballonens radius vil altså til det pågældende tidspunkt forøges med hastigheden 0,88 cm/sek. ♥

Øvelse 4.1.18.
Efter at ballonen i eksempel 4.1.17 er pustet op, og oppustningshullet er lukket, går der et lille hul på ballonen.
a) Når diameteren er 28 cm, formindskes diameteren med en hastighed på 1,2 cm/sek.
Bestem gassens udstrømningshastighed til dette tidspunkt.
b) Find den hastighed hvormed radius formindskes til det tidspunkt, hvor radius er 9 cm, når gassen da strømmer ud med en hastighed på 300 cm^3/sek. ♥

Øvelse 4.1.19.
Betragt ballonen i eksempel 4.1.17 – og se eksempel 2.4.2 b)
Bestem overfladearealets størrelse og dets ændringshastighed til det tidspunkt, hvor:
a) radius er 6 cm og gassens indstrømningshastighed er 400 cm^3/sek.
b) radius er 8 cm og gassens indstrømningshastighed er 350 cm^3/sek.♥

Afstandskvadratloven

Eksempel 4.1.20.
Den kendte rumhelt Nuke Skytalker (NS) har erfaret, at den underskønne prinsesse Lulu Banana (LB) er i fare, idet hendes rumskib er gået i stykker og den lede Fat O'Bob er på vej i sit rumskib for at tage hende til fange. Den gode Nuke Skytalker kender sin matematik og ved, at den korteste

vej imellem to punkter er en ret linie – og vil derfor så hurtigt som muligt via en ret linie flyve direkte over til Lulu's rumskib. Problemet er bare, at hans rumskib befinder sig næsten på den modsatte side af planeten R-227 i forhold til Lulu's rumskib (se figur 4.1.3, som ikke angiver de korrekte indbyrdes størrelsesforhold). Og at flyve tæt forbi R-227 er forbundet med stor risiko p.gr.a. strålingsfaren – selv for en helt som Nuke. R-227 er nemlig en lille, men overopfyldt affaldsplanet for radioaktivt affald.

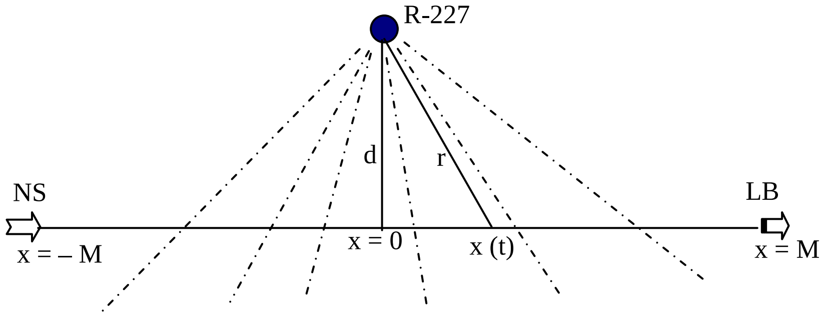


Fig. 4.1.3.

Vi vil beregne den samlede strålingsmængde pr. m^2, som NS's rumskib udsættes for ved flyvningen langs den rette linie fra x = – M til x = M. Men vi starter med at se på, hvordan man generelt beregner den samlede strålingsmængde pr. m^2 som i et tidsinterval fra t_1 til t_2 rammer et givet objekt.

Intensiteten I er antal strålingspartikler pr. sekund pr. m^2. Hvis intensiteten er konstant, så er strålingsmængden, der i løbet af et tidsinterval Δt rammer 1 m^2, givet ved: $I\cdot\Delta t$. I tidsintervallet fra t_1 til t_2 er den samlede strålingsmængde pr. m^2 altså givet ved: $I\cdot(t_2 - t_1)$.
Hvis intensiteten derimod ændres med tiden, (dvs. hvis I er en funktion af tiden t, således at I(t) angiver intensiteten til tiden t), så er strålingsmængden, som rammer 1 m^2 i løbet af et lille tidsinterval Δt omkring tidspunktet t givet ved: $I(t)\cdot\Delta t$. (Δt skal være så lille, at intensiteten stort set kan betragtes som konstant lig med I(t) i tidsintervallet). Den samlede strålingsmængde S, der rammer 1 m^2 i tidsintervallet fra tiden t_1 til tiden t_2 er derfor summen af stor mængde led af typen $I(t)\cdot\Delta t$, dvs.

$$S = \int_{t_1}^{t_2} I(t)dt$$

Hvis vi sætter tiden t = 0, når NS er i x = – M og t = T når NS er i x = M, så er den samlede strålingsmængde pr. m^2, som rammer NS's rumskib, givet ved: $S = \int_0^T I(t)dt$

Strålingsintensiteten opfylder afstandskvadratloven (se eksempel 2.4.10 !). P.gr.a. rumskibets bevægelse ændres afstanden r til R-227 hele tiden, dvs. r er en funktion af tiden t.
Ifølge Pythagoras får vi: $r(t)^2 = x(t)^2 + d^2$ (se figur 4.1.3), hvoraf vi ser, at strålingsintensiteten I i virkeligheden er en funktion af x, som er en funktion af t, dvs.

$$I(t) = I(x(t)) = I_1 \cdot \frac{1}{x(t)^2 + d^2}$$

hvor I_1 er intensiteten i afstanden 1 km fra R-227, og hvor r – og dermed x(t) og d – måles i km (jfr. eksempel 2.4.10).

Vi ser nu, at $$S = \int_0^T I_1 \cdot \frac{1}{x(t)^2 + d^2} dt$$

Hvis Nuke's rumskib flyver med hastigheden v, så har vi (overvej !), at $x(t) = -M + v\cdot t$, og dermed

$$S = I_1 \cdot \int_0^T \frac{1}{(-M + v\cdot t)^2 + d^2}\,dt$$

Ved substitutionen: $x = -M + v\cdot t$ (og dermed: $dx = vdt$, $t = 0 \Rightarrow x = -M$ og $t = T \Rightarrow x = -M + vT$) og ved anvendelse af, at $T = \frac{2M}{v}$, ser vi (kontrollér !), at følgende omskrivninger gælder:

$$S = \frac{I_1}{v}\cdot\int_{-M}^{-M+vT}\frac{1}{x^2+d^2}\,dx = \frac{I_1}{v}\cdot\int_{-M}^{M}\frac{1}{x^2+d^2}\,dx = \frac{I_1}{v\cdot d^2}\cdot\int_{-M}^{M}\frac{1}{\left(\frac{x}{d}\right)^2+1}\,dx$$

Hvis vi i det sidste integrale anvender substitutionen: $s = \frac{x}{d}$ får vi endelig (kontrollér !), at:

$$S = \frac{I_1}{v\cdot d}\cdot\int_a^b\frac{1}{s^2+1}\,ds$$

hvor $a = -\dfrac{M}{d}$ og $b = \dfrac{M}{d}$.

(Læsere, der ikke er bekendt med funktionen tangens, kan springe den følgende beregning over og gå ned til slutresultatet, og dér blot betragte $\tan^{-1}$ som en funktion der ligger på regnemaskinen).

For at udregne dette sidste integrale anvender vi et lille "trick" (omvendt substitution), idet vi sætter s = tan(p). Dette er muligt, idet Vm(tan) = R, så for enhver værdi af s findes en værdi p, så s = tan(p), og vi kan endda indskrænke os til at se på $p \in \left]-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$.
Med substitutionen s = tan(p) har vi: $ds = (1 + \tan(p)^2)dp$. Hvis $\alpha, \beta \in \left]-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$ vælges, så $a = \tan(\alpha)$ og $b = \tan(\beta)$, så kan integralet omskrives således:

$$S = \frac{I_1}{v\cdot d}\cdot\int_a^b\frac{1}{s^2+1}\,ds = \frac{I_1}{v\cdot d}\cdot\int_\alpha^\beta\frac{1+\tan(p)^2}{\tan(p)^2+1}\,dp = \frac{I_1}{v\cdot d}\cdot\int_\alpha^\beta 1\,dp = \frac{I_1}{v\cdot d}\cdot[p]_\alpha^\beta$$

dvs. $S = \dfrac{I_1}{v\cdot d}\cdot(\beta-\alpha)$.

Da $\beta = \tan^{-1}(b) = \tan^{-1}(\frac{M}{d})$ og $\alpha = \tan^{-1}(a) = \tan^{-1}(-\frac{M}{d}) = -\tan^{-1}(\frac{M}{d})$ (overvej !), ser vi:

$$S = \frac{I_1}{v\cdot d}\cdot 2\cdot\tan^{-1}\left(\frac{M}{d}\right)$$

Læseren opfordres til at overveje rimeligheden i, at S er proportional med I_1, omvendt proportional med v – og i øvrigt vokser med voksende værdi af M og med aftagende værdi af d.

Imedens vi har foretaget disse beregninger, har vores helt Nuke Skytalker for længst glemt alt om strålingsfarer og givet sig på vej mod LB. Så lad os prøve at finde ud af, hvilken samlet strålingsmængde han bliver udsat for på flyveturen. Der er følgende data til beregningen:
Rumskibets hastighed er v = 15 km/sek, afstanden M = 600.000 km, afstanden d = 400 km og strålingsintensiteten i 1 km's afstand fra R-227 er $I_1 = 2{,}8\cdot 10^{18}$ strålingspartikler pr. sek. pr. m^2.
Vi finder da:

$$S = \frac{2{,}8\cdot 10^{18}}{15\cdot 400}\cdot 2\cdot\tan^{-1}\left(\frac{600000}{400}\right) = 1{,}465\cdot 10^{15} \text{ strålingspartikler pr. } m^2$$

Den samlede strålingsmængde er altså $1{,}465\cdot 10^{15}$ strålingspartikler pr. m^2.

(Bemærk, at da enheden på x(t) og d som nævnt skal være i km, idet I_1 er intensiteten i 1 km's af-stand, så skal M og v·t også angives i km (idet x(t) = – M + v·t). Tiden t måles i samme tidsenhed som indgår i angivelsen af intensiteten, dvs. sekunder, idet tidsenheden skal "gå ud" ved udregning af strålingsmængden I(t)·Δt. v skal altså angives i km/sek. Når dette er sikret, spiller enhederne på v, d og M herefter ingen rolle for beregningen af den samlede strålingsmængde S).

Ca. 70 % af strålingen passerer igennem rumskibets vægge og ind til Nuke. Da han vejer 80 kg og vi kan regne med at hans overfladeareal i strålingens retning er ca. 0,9 m^2 ser vi, at han pr. kg kropsvægt ca. udsættes for: $\frac{1{,}465\cdot 10^{15}\cdot 0{,}7\cdot 0{,}9}{80} = 1{,}154\cdot 10^{13}$ strålingspartikler pr. kg.
Disse strålingspartikler har en gennemsnitlig energi på 1,1 MeV (mega elektronvolt), hvilket svarer til $1{,}1\cdot 10^{6}\cdot 1{,}602\cdot 10^{-19}\ \text{J} = 1{,}762\cdot 10^{-13}\ \text{J}$. (J = Joule). Den samlede strålingsenergi pr. kg krops-vægt, dvs. den samlede strålingsdosis, er derfor givet ved: $1{,}154\cdot 10^{13}\cdot 1{,}762\cdot 10^{-13} = 2{,}03$ J/kg.
Strålingsdosis måles ofte i enheden "rem" (1 rem = 0,01 J/kg) Vi ser derfor, at vores helt Nuke er blevet udsat for en strålingsdosis på 203 rem på sin redningsmission for prinsesse Lulu.

Vi kan ikke så godt lade læseren sidde uforløst tilbage, så det skal fortælles at – jo, Nuke nåede at redde Lulu fra den lede Fat O'Bob. Og sandelig: Nuke og Lulu indgik den hellige kosmiske pagt og levede lykkeligt til hans dages ende.

Den interesserede læser kan f.eks. via Internettet undersøge, om en strålingsdosis på 203 rem er skadelig – og i givet fald hvor skadelig. ♥

4.2. Biologiske og medicinske emner.

Eksponentiel populationsvækst

Eksempel 4.2.1.
I eksempel 2.2.7 omtalte vi en gærcellepopulation, som vokser ved celledeling under optimale vil-kår (fastlagt ved korrekt temperatur, rigelig næringsmængde og plads, o.lign.).
Vi vil nu vise det i eksempel 2.2.7 omtalte matematiske udtryk for gærcellepopulationens vækst.

Til et givet tidspunkt t har vi N(t) gærceller pr. ml i en næringsopløsning. Forøgelsen ΔN i antallet af gærceller, som p.gr.a. celledelingen sker i et lille tidsinterval Δt (hvor Δt er "lille" set i fht. den "hastighed" hvormed en celle deler sig), er tilnærmelsesvist proportional med både N(t) og med Δt, hvormed vi får, at $\Delta N \approx r\cdot N(t)\cdot \Delta t$, hvor r er en positiv proportionalitetsfaktor. (r beskriver sand-synligheden for celledeling pr. celle pr. tidsenhed).
Ved division med Δt på begge sider af lighedstegnet får vi differenskvotienten for N(t), og ved at lade Δt gå mod 0 (Δt er "lille") får vi, at tegnet ≈ erstattet af et lighedstegn samtidig med, at diffe-renskvotienten bliver til differentialkvotienten.
Funktionen N(t), som beskriver antallet af gærceller pr. ml til tiden t, opfylder altså ligningen, at

$$N'(t) = r\cdot N(t)$$

Ifølge sætning 3.3.4 findes en konstant K, så $N(t) = K\cdot e^{rt}$. Hvis antallet af gærceller pr. ml til tiden 0 (altså ved starten af forsøget/målingen) kaldes N_o, så får vi: $N_o = N(0) = K\cdot e^{r\cdot 0} = K$, og dermed:

$N(t) = N_o \cdot e^{rt}$ eller: $N(t) = N_o \cdot \exp(rt)$
Under optimale vilkår vokser antallet af gærceller eksponentielt.

Som også omtalt i eksempel 2.2.7 gælder denne model for en gærcelle-populations vækst kun ved optimale vilkår. Hvis der bliver pladsmangel, næringsmangel, for høj koncentration af affaldsstoffer eller en forkert temperatur, vil reproduktionsraten (dvs. det enkelte "individs" evne til reproduktion pr. tidsenhed) begynde at aftage. Dette vil vi behandle senere (se eksempel 4.2.14).

Det skal fremhæves, at den omtalte matematiske model også kan beskrive andre populationers vækst. Og hvis der i en given population både er tale om "fødsler" og "dødsfald", så angiver størrelsen r forskellen imellem fødselsraten (dvs. antallet af fødsler pr. individ pr. tidsenhed) og dødsraten (dvs. antallet af dødsfald pr. individ pr. tidsenhed). ♥

Øvelse 4.2.2.
En bananflue-population lever under optimale vilkår. Populationen størrelse er eksponentielt voksende og kan som gærcellerne i eksempel 4.2.1 beskrives ved en funktion af typen $N(t) = N_o \cdot e^{rt}$.
a) Bestem r, idet $N_o = 30$ og $N(192 \text{ timer}) = 400$.
b) Bestem fordoblingstiden for bananflue-populationen.
c) Hvor lang tid går der, før $N(t) = 750$? ♥

Weber-Fechners lov.

Eksempel 4.2.3.
I eksempel 2.1.3 omtalte vi, at for auditive sanseindtryk (dvs. høreindtryk) og til dels for visuelle sanseindtryk (synsindtryk) gælder Weber-Fechners lov, som kan udtrykkes således:

> Til lige store *relative tilvækster* i den fysiske påvirkning (intensiteten) svarer lige store *absolutte tilvækster* i det sansemæssige indtryk.

Vi vil nu vise, at denne lovmæssighed nødvendigvis må føre til den i eksempel 2.1.3 omtalte logaritmiske beskrivelse (og vi vil som i eksemplet tage beskrivelsesmæssig udgangspunkt i lyd):
Hvis intensiteten benævnes I og det sansemæssige indtryk benævnes L, og hvis vi har en lille tilvækst ΔI i intensiteten, så gælder der ifølge Weber-Fechners lov, at den relative tilvækst $\frac{\Delta I}{I}$ i intensiteten er proportional med den tilsvarende absolutte tilvækst ΔL i det sansemæssige indtryk.
Dette kan indses på følgende måde, hvor vi for simpelheds skyld vil nøjes med at argumentere for, at hvis $\frac{\Delta I}{I}$ bliver dobbelt så stor, så bliver den tilsvarende ΔL dobbelt så stor:

1) Hvis intensiteten ændres fra I til $I_1 = I + \Delta I$, så får L en tilvækst på ΔL
2) Hvis intensiteten ændres fra I_1 til $I_2 = I_1 + \Delta I$, så får L en tilvækst på ΔL_1
3) Hvis intensiteten ændres fra I til I_2, så får L en tilvækst på $\Delta L + \Delta L_1$

Den relative tilvækst i situation 1) er: $\frac{\Delta I}{I}$, og den relative tilvækst i situation 2) er: $\frac{\Delta I}{I_1}$.

Da $\Delta I \approx 0$ har vi, at: $\frac{\Delta I}{I_1} = \frac{\Delta I}{I + \Delta I} \approx \frac{\Delta I}{I}$, dvs. at den relative tilvækst i situation 1) og 2) (stort set) er lige store. Men ifølge Weber-Fechner får vi dermed, at $\Delta L \approx \Delta L_1$.

Den relative tilvækst i situation 3) er: $\frac{2 \cdot \Delta I}{I} = \frac{\Delta I}{I} + \frac{\Delta I}{I}$, og hertil svarer $\Delta L + \Delta L_1 \approx \Delta L + \Delta L = 2 \cdot \Delta L$, hvormed vi ser, at når ΔI er lille, så vil en dobbelt så stor relativ tilvækst i I give en dobbelt så stor absolut tilvækst i L. Der findes altså en konstant k, så:

$$\Delta I \approx 0 \;\Rightarrow\; \frac{\Delta I}{I} = k \cdot \Delta L \text{ , hvilket kan omskrives til: } \frac{\Delta I}{\Delta L} = k \cdot I$$

Da $\Delta I \approx 0$ – og dermed $\Delta L \approx 0$ –, så gælder der, at $\frac{\Delta I}{\Delta L} \approx I'(L)$, hvormed vi ser, at $I'(L) = k \cdot I$

Ifølge sætning 3.3.4 findes der derfor en konstant b, så: $I(L) = b \cdot e^{kL}$

Hvis vi lader I_o være den lavest hørbare intensitet, så har vi, at L = 0, når $I = I_o$, hvormed vi får, at: $I_o = I(0) = b \cdot e^{k \cdot 0} = b$. Alt i alt kan vi derfor skrive: $I(L) = I_o \cdot e^{kL}$ eller kortere: $I = I_o \cdot e^{kL}$

Dette kan omskrives til (kontrollér !): $L = \frac{1}{k} \cdot \ln\left(\frac{I}{I_o}\right)$

Konstanten k kan vælges som vi vil, idet vores valg blot fastlægger enheden på den sansemæssige lydstyrkeskala (den subjektive lydstyrke).

Man har <u>valgt</u> at sætte $k = \frac{1}{10 \cdot c}$, hvor c er den konstant, som er givet ved, at: $\log = c \cdot \ln$ (jfr. sætning 1.1.3 pkt. 2) eller sætning A.1.6 pkt. 3)). Heraf får vi, at:

$$L = \frac{1}{k} \cdot \ln\left(\frac{I}{I_o}\right) = 10 \cdot c \cdot \ln\left(\frac{I}{I_o}\right) = 10 \cdot \log\left(\frac{I}{I_o}\right)$$

hvormed vi har det i eksempel 2.1.3 omtalte udtryk for den subjektive lydstyrke. Og enheden for subjektiv lydstyrke kaldes da som omtalt decibel (dB). I måles i W/m^2 og $I_o = 10^{-12}\ W/m^2$ ♥

<u>Øvelse 4.2.4.</u>

a) En trommeslager i et kendt heavy-metal band er under en trommesolo ved en koncert udsat for en gennemsnitlig lyd-intensitet på 0,126 W/m^2. Find den tilsvarende subjektive lydstyrke – og kommentér resultatet.

b) Som bekendt (se eksempel 2.4.12 c)) følger lydintensitet afstandskvadratloven.
Hvor stor er den subjektive lydstyrke hos sceneteknikeren, som sidder 12 m fra trommesættet ?
Og hvor stor er den subjektive lydstyrke hos de nærmeste af publikum, som er 35 m fra trommesættet (der ses her bort fra den elektroniske forstærkning gennem PA-anlægget) ? ♥

<u>Diffusion, optagelse og udskillelse af stoffer i organisme.</u>

<u>Eksempel 4.2.5.</u>

Alt levende væv er opbygget af <u>celler</u>. Disse celler består bl.a. af en cellekerne, noget ”cellevæske” (<u>cytoplasma</u>) og en cellevæg (<u>cellemembranen</u>) (se figur 4.2.1).

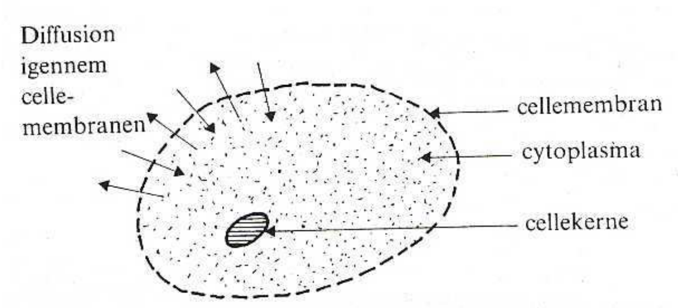


Fig. 4.2.1

Der kan gennem cellemembranen diffundere stoffer både ind og ud af cellen. Det er bl.a. på denne måde, at næring optages og affaldsstoffer udskilles af cellen.

Lad os nu prøve at undersøge den situation, hvor et bestemt stof findes i en given koncentration c_o udenfor cellen, medens koncentrationen c(t) af stoffet inde i cellen er en funktion af tiden. Vi antager altså, at cellens omgivelser er så ”store”, at koncentrationen dér kan betragtes som konstant, uanset om cellen optager (eller udskiller) lidt af det pågældende stof.
Spørgsmålet er nu: Hvordan vil koncentrationen c(t) opføre sig efterhånden som tiden går ?
Vi må forvente, at stoffet vil diffundere igennem cellemembranen i en retning, som udligner forskellen i koncentrationen.
Vi må ligeledes forvente, at den ændring $\Delta c(t)$ af koncentrationen af stoffet inde i cellen, som sker i løbet af et lille tidsrum Δt, tilnærmelsesvist er proportional med Δt og med forskellen i koncentrationerne c(t) og c_o. Vi kan derfor tillade os at skrive:

$$\Delta c(t) \approx -k\cdot(c(t) - c_o)\cdot\Delta t$$

Her er k en positiv konstant, som fortæller noget om cellemembranens ”gennemtrængelighed” for det pågældende stof. Minusset medtages, idet c(t) aftager, hvis $c(t) > c_o$, dvs. hvis $c(t) - c_o > 0$, medens c(t) vokser, hvis $c(t) < c_o$, dvs. hvis $c(t) - c_o < 0$.
Idet Δt er meget lille, kan udtrykket (efter division med Δt) omskrives til: $c'(t) = -k(c(t) - c_o)$

Ifølge sætning 3.6.6 ser vi, at funktionsforskriften for c(t) er givet ved:

$$\boxed{c(t) = (c(0) - c_o)\cdot e^{-kt} + c_o}$$
Udligning af koncentration via diffusion

Funktionen c(t) angiver altså udviklingen i koncentrationen af stoffet i cellen efterhånden som tiden går, idet c(0) er startkoncentrationen i cellen og c_o er koncentrationen af stoffet udenfor cellen. ♥

Øvelse 4.2.6.
Find $\lim_{t\to\infty} c(t)$ for koncentrationen c(t) omtalt i eksempel 4.2.5, og kommentér/fortolk resultatet. ♥

Øvelse 4.2.7
Skitsér grafen for c(t) fra eksempel 4.2.5 – og kommentér dens udseende og betydningen heraf –, idet $c(0) = 20$ µg pr. ml , $c_o = 38$ µg pr. ml og $k = 0{,}082$ timer^{-1}. ♥

Eksempel 4.2.8.
Visse giftstoffer, tungmetaller o.l., herunder bly, udskilles meget langsomt af organismen, bl.a. fordi de optages i knogler o.l. Vi vil i dette eksempel se nærmere på bly.

En person har igennem en kortere tidsperiode (dvs. gennem mindre end et par måneder – eller blot ved en engangshændelse) været udsat for blyforgiftning. Hvis personen ikke optager yderligere bly, vil blyindholdet langsomt udskilles (primært gennem nyrerne), idet der vil gælde følgende ligning: $B'(t) = -U_{Pb} \cdot B(t)$, hvor B(t) er blymængden i organismen til tiden t og U_{Pb} er en konstant, der kaldes udskillelseskoefficienten for bly. (Det overlades som en øvelse til læseren at argumentere for denne ligning).

Ifølge sætning 3.3.4 ser vi dermed (detaljerne overlades til læseren), at blymængden i organismen er eksponentielt aftagende, og at

$$B(t) = B(0) \cdot e^{-U_{Pb} \cdot t}$$

Blymængden i organismen efter en "engangsforgiftning" er eksponentielt aftagende.

hvor B(0) er blymængden i organismen til tiden 0 (dvs. når målingerne begynder), og hvor U_{Pb} er et mål for udskillelseshastigheden for bly fra organismen. ♥

Øvelse 4.2.9.
Man ved erfaringsmæssigt, at efter en blyforgiftning er halveringstiden for blyindholdet ca. 8 år for et voksent menneske.
a) Vis at udskillelseskoefficienten U_{Pb} ca. er lig med: $2{,}374 \cdot 10^{-4}$ døgn^{-1}

Hvis den betragtede person i blyforgiftningsperioden i alt har optaget 72 mg bly i organismen, og hvis vi sætter tiden t = 0 ved blyforgiftningsperiodens ophør, så har vi med meget god tilnærmelse, at: $B(t) = 72 \cdot e^{-2{,}374 \cdot 10^{-4} \cdot t}$
b) Hvor lang tid går der inden blyindholdet i organismen er nede på 10 mg ? ♥

Eksempel 4.2.10.
Dette eksempel er en fortsættelse af eksempel 4.2.8.
Det forholder sig desværre ofte således, at man gennem maden af forskellige årsager jævnligt optager en smule bly. Hvis vi antager, at der pr. døgn optages O_{Pb} mg bly, så kan ændringshastigheden $B'(t)$ (målt i mg pr. døgn) af organismens blyindhold udtrykkes således (overvej dette !):

$$B'(t) = O_{Pb} - U_{Pb} \cdot B(t)$$ ♥

Øvelse 4.2.11.
Betragt organismens blyindhold B(t) i eksempel 4.2.10. Vis at der gælder følgende ligning:

$$B(t) = \frac{O_{Pb}}{U_{Pb}} + \left(B(0) - \frac{O_{Pb}}{U_{Pb}}\right) \cdot e^{-U_{Pb} \cdot t}$$

Blymængden i organismen efter en "engangsforgiftning" og en vedvarende forgiftning.

(Vejledning: Se sætning 3.6.4. Brug t = 0 til at finde den ubekendte konstant i sætningen). ♥

Øvelse 4.2.12.
Vi ser på den samme person som i øvelse 4.2.9, og vi antager, at vedkommende efter blyforgiftningsperioden yderligere optager 0,01 mg bly pr. døgn.
a) Opskriv en funktionsforskrift for blyindholdet B(t) i personen.
b) Skitsér grafen for B(t) og kommentér resultatet.
c) Bestem $\lim_{t \to \infty} B(t)$ og forklar, hvad denne værdi står for.
d) Løs pkt. a)-c) igen, idet vi nu antager, at vedkommende efter blyforgiftningsperioden optager 0,03 mg bly pr. døgn. ♥

Øvelse 4.2.13.
Et medicinalfirma har i samarbejde med en afdeling på et universitetshospital forsket i og udviklet et nyt præparat, som er så hemmeligt, at man endnu ikke vil fortælle, hvad det skal bruges imod. (Der går dog rygter – som man imidlertid ikke vil bekræfte – om, at det kan være fugleinfluenza).
I forbindelse med doseringen af præparatet diskuteres forskellige muligheder. Præparatet skal foreløbig gives som en eller flere indsprøjtninger – og man skal have testet dette. (Man diskuterer også muligheden af at udvikle tabletter – evt. i form af såkaldte depottabletter, som gradvist sender præparatet ud i organismen, men vi vil her kun se på indsprøjtning af præparatet).
Præparatet har en høj gennemtrængelighed i organismens celler, og man kan derfor regne med, at det indsprøjtede stof praktisk talt omgående fordeler sig til såvel det intracellulære område (væskemængden inden i cellerne) som i den extracellulære væske. Dette betyder erfaringsmæssigt, at præparatet alt i alt fordeler sig i ca. 58 % af kropsvægten.
Efter en indsprøjtning begynder nedbrydning i organismen og udskilning via nyrerne af præparatet. Vi betragter en forsøgsperson på 82 kg.

a) Forsøgspersonen gives en engangsindsprøjtning på 15 g.
Efter 18 timer tages en blodprøve, og koncentrationen af præparatet viser sig at være: 0,0253 %
Bestem udskillelseskoefficienten for præparatet (jfr. eksempel 4.2.8) og halveringstiden.
b) Hvor lang tid går der inden koncentrationen er nede på det skønnede minimale niveau 0,005 % ?

P.gr.a. mulige problemer med overdosering, ubehaget ved så stor en indsprøjtning (ca. 15 ml) og muligheden for at personen bedre selv kan indsprøjte stoffet, undersøges en 5 g's dosering.

c) Hvor lang tid efter indsprøjtning af 5 g går der inden koncentrationen er nede på 0,005 % ? ♥

Logistisk populationsvækst

Eksempel 4.2.14.
I eksempel 4.2.1 beskrev vi den situation, hvor antallet af individer i en given population (i det konkrete tilfælde gærceller) vokser under optimale vilkår. En sådan vækst kan imidlertid ikke fortsætte i det uendelige, idet populationstætheden efterhånden bliver så stor, at der begynder at være mangel på føde eller plads (herunder områder med tilstrækkelig lav koncentration af affaldsstoffer) for de enkelte individer. Populationens vækstrate vil derfor aftage.

Hvis vi antager, at det miljø, som populationen lever i, har en given bærekapacitet K, (dvs. en øvre grænse for antallet af individer, der kan eksistere i miljøet), så kan vi opstille en tæthedsafhængig model for populationsvæksten på følgende måde:

Den forøgelse ΔN i antallet af individer i populationen, som foregår i et lille tidsinterval Δt, antages tilnærmelsesvist at være proportional med det aktuelle antal individer N(t), med det antal individer K – N(t), som der endnu er plads til i miljøet, samt med Δt. (Overvej rimeligheden af disse antagelser !!). Vi får således:

$$\Delta N \approx s \cdot N(t) \cdot (K - N(t)) \cdot \Delta t$$

hvor proportionalitetskonstanten s er en positiv størrelse, der fortæller noget om den hastighed hvormed populationsstørrelsen nærmer sig til bærekapaciteten.
Ved at dividere med Δt på begge sider af lighedstegnet samt udnytte, at Δt er lille, får vi følgende ligning, der beskriver udviklingen i antallet af individer N(t) i det betragtede miljø:

$$N'(t) = s \cdot N(t) \cdot (K - N(t))$$

Ifølge sætning 3.6.9 findes der derfor en positiv konstant c, så: $N(t) = \dfrac{K}{1 + c \cdot e^{-sKt}}$

Ifølge sætning 3.6.12 gælder der, at konstanten c er givet ved: $c = \dfrac{K}{N_o} - 1$, hvor $N_o = N(0)$,

at $N(t) \to K$ for $t \to \infty$ (hvilket stemmer fint overens med forudsætningerne i modellen (forklar!)), samt at det grafiske billede af N(t) er en såkaldt logistisk kurve med følgende udseende:

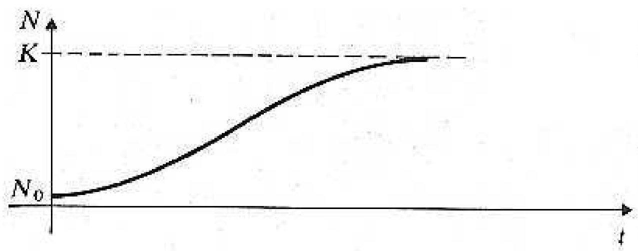


Fig. 4.2.2

Vi kan opsummere resultaterne til, at den logistiske vækstmodel for populationer med bærekapacitet K og begyndelsesantal $N_o = N(0)$ i et afgrænset, veldefineret miljø er givet ved formlen:

$$\boxed{N(t) = \frac{K}{1 + c \cdot e^{-sKt}} \quad , \quad \text{hvor } c = \frac{K}{N_o} - 1}$$

Logistisk vækst af en population (en tæthedsafhængig model med en bærekapacitet på K individer)

Øvelse 4.2.15.

Tegn grafen for N(t), hvis $K = 5600$, $N_o = 700$ og $s = 1{,}78 \cdot 10^{-5}$ og kommentér resultatet. ♥

<u>Øvelse 4.2.16.</u>
I et givet miljø (på en større øde ø) udsættes 500 får. Størrelsen N(t) af fårepopulationen kan tilnærmelsesvist beskrives ved en logistisk vækstfunktion

$$N(t) = \frac{K}{1 + c \cdot e^{-sKt}}$$

hvor K er miljøets bærekapacitet for får.

a) Fem år senere tælles der 800 får på øen. Find en tilnærmet værdi af størrelsen s·K, idet vi antager, at 800 er væsentlig mindre end miljøets bærekapacitet.

(*Vejledning*: (Jfr. tilsvarende problemstilling i øvelse 3.6.11).
N(t) opfylder forudsætningen $N'(t) = s \cdot N(t) \cdot (K - N(t))$ for den logistiske vækstmodel.
Dette udtryk kan omskrives til $N'(t) = s \cdot K \cdot N(t) \cdot \frac{K - N(t)}{K}$, hvor vi bemærker, at brøken
$\frac{K - N(t)}{K}$ er relativt tæt på 1, dvs. $N'(t) \approx s \cdot K \cdot N(t)$)

b) Efter 40 år er der ca. 4900 får på øen.
Beregn værdien af bærekapaciteten og bestem en funktionsforskrift for N(t).

(*Vejledning*: Benyt værdien af s·K fundet under pkt. a) samt at konstanten c kan udtrykkes ved:
$c = \frac{K}{500} - 1$, hvorefter der kan opstilles en ligning med K som eneste ubekendte). ♥

<u>Øvelse 4.2.17.</u>
For en bestemt "laverestående" dyreart er der under kontrollerede forhold (dvs. i et laboratorieeksperiment) målt følgende populationsstørrelser:

tid (dage)	6	9	12	15	18	21	24	27	30	34	37
Antal	6	12	25	49	70	102	160	221	262	286	324

Opstil en logistisk model (altså en logistisk vækstfunktion) tilpasset disse data.
(*Vejledning*: jfr. eksempel 3.6.13) ♥

<u>4.3. Økonomiske, behavioristiske emner.</u>

<u>*Indledning*</u>

De følgende modeller kaldes som anført "økonomiske, behavioristiske modeller".
Den økonomiske benævnelse er medtaget, idet der arbejdes med størrelser, som spiller en rolle for de betragtede virksomheders økonomiske resultater. Den behavioristiske benævnelse skyldes, at de medtagne eksempler (bortset fra evt. omkostningsberegninger) bygger på menneskers/kunders opfattelse og adfærd, hvormed der bestemt ikke kun er tale om økonomi, men også en række andre faktorer (behavioristisk = adfærds-/handlings-/reaktionsmæssigt).

Modeller af denne type er særdeles nyttige, såvel i forbindelse med økonomiske og sociologiske uddannelser som ved arbejdet med de relevante, grundlæggende mekanismer i "virkeligheden".
I forbindelse med uddannelser drejer det sig om de studerendes indlæring (forståelse og erkendelse) af økonomiske, behavioristiske sammenhænge, og om at have et kvantitativt beskrivelsesmiddel til mekanismer, der er vanskeligt forklarlige i en kvalitativ formulering.

Også i "virkeligheden" drejer det sig – for de mennesker, der arbejder med disse emner – om at have en grundlæggende og solid forståelse af og kendskab til økonomiske, behavioristiske sammenhænge. Mulighederne for i praksis at opstille brugbare modeller begrænses af en række faktorer. Først og fremmest skal de relevante medarbejdere kunne håndtere dette, men hertil kommer, at noget af det vanskeligste ved de økonomiske, behavioristiske modeller i praksis er at vælge en korrekt modeltype og at bestemme størrelsen/værdien af de parametre, der indgår i modellerne. Desuden spiller det behavioristiske element en sådan rolle, at der ofte bør arbejdes med stokastiske modeller (dvs. modeller der tager højde for tilfældigheder i og sandsynligheder for f.eks. kunders reaktionsmønster) som supplement til de her præsenterede deterministiske modeller (dvs. modeller hvor der på forhånd og med sikkerhed kan beskrives, hvad der vil ske). Men de grundlæggende mekanismer, der præsenteres her via de deterministiske modeller, fungerer imidlertid fint i "virkeligheden".

Matematiske forudsætninger for modellerne.

Ofte vil man i matematiske modeller ved bl.a. økonomiske beregninger antage både kontinuitet og differentiabilitet af de implicerede funktioner, selvom f.eks. et kronebeløb og eller et salgstal i sagens natur ikke kan variere helt glat og sammenhængende på ”mikroskopisk” niveau.
Vi interesserer os altså for matematiske modeller, hvor der såvel ved den uafhængige variable (den variable på 1. aksen) som ved den afhængige variable (funktionsværdien på 2.aksen) med rimelighed kan anlægges en kontinuert fortolkning (opfattelse), og hvor der derfor med rimelighed kan tegnes en (glat), sammenhængende kurve.
Differentialregning handler om beregning, fortolkning og vurdering af ændringer i funktionsværdier som konsekvens af mindre ændringer i de uafhængige variable. Dette harmonerer med forudsætningen om, at der kan anlægges en kontinuert fortolkning af de variable, og at de relevante funktioners grafer kan beskrives ved ”glatte” kurver – dvs. de betragtede funktioner er differentiable.
(Bemærk, at der ved en ”mindre ændring” forstås en ændring, som højst er nogle få procent af hele variationsområdet (definitionsmængden)).

Hvis vi f.eks. ser på den skat, der betales af en given skattepligtig indkomst, så gælder der følgende: Selv om den skattepligtige indkomst angives i hele kroner, så er en forskel på 1 kr. meget lille set i forhold til det variationsområde, der betragtes for skattepligtige indkomster (f.eks. fra 0 kr. til 1.000.000 kr. pr. år). Det er derfor rimeligt at benytte en kontinuert model for skatten og den skattepligtige indkomst.
Tilsvarende kommentarer kan anføres, hvis vi f.eks. ser på

- afsætningen af et givet produkt på et marked som funktion af prisen, (og dermed også på omsætningen for produktet). Der skal være så stor en afsætning, at en afsætningsændring på 1 enhed kan betragtes som meget lille - og at der dermed kan benyttes en kontinuert model, dvs. en kontinuert variation af afsætningen ved en gradvis (kontinuert) ændring af prisen.
- produktionsomkostningerne som funktion af produktionsantallet ved produktion af f.eks. sikkerhedsnåle, konservesdåser eller strygejern. Men hvis det derimod drejer sig om produktion af boreplatforme eller tankskibe, så vil en ”enhed” være så ”stor”, at en kontinuert model vil være urimelig.

Afsætning.

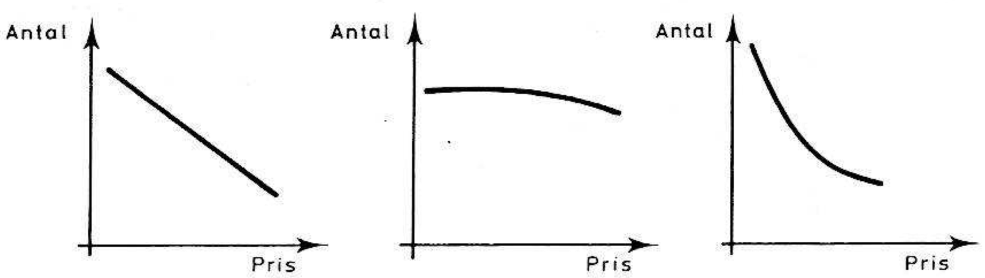
(Nogle få elementer af den følgende tekst er allerede omtalt i slutningen af kapitel 2, men medtages her igen for helhedens skyld).

Ved en virksomheds *afsætning* af en given vare (et givet produkt) forstår vi antallet af vareenheder, som virksomheden afsætter (kan sælge) på et givet marked indenfor et bestemt tidsrum.

En virksomheds afsætning (af en given vare på et givet marked indenfor en given tidsperiode) afhænger af mange ting, bl.a. af varens pris, varens kvalitet, den reklameindsats virksomheden ofrer for varen på markedet, konkurrencen på markedet, markedets demografiske struktur, salgskanalerne (hvem sælger varen) og evt. sæsonforhold.
Vi vil hér primært se på afsætningens afhængighed af prisen, men vi vil dog også berøre reklameindsatsens betydning.

Lad os betragte en virksomhed, som producerer en given vare (f.eks. termokander, cigaretter, vægtæpper eller småkager). Antallet q af vareenheder, som virksomheden pr. tidsperiode (f.eks. pr. uge, pr. måned eller pr. år) kan afsætte på markedet, afhænger af den pris p, virksomheden forlanger pr. vareenhed. Det vil her almindeligvis gælde, at jo højere pris der fastsættes, desto mindre er det antal, der kan afsættes/sælges.
Vi må således forvente, at den funktion f, som er fastlagt ved: $q = f(p)$, er aftagende. (f er altså den funktion, som til en given pris p giver os det antal vareenheder q, som det er muligt at afsætte til prisen p). Funktionen f kaldes virksomhedens *afsætningsfunktion* for den pågældende vare.

På nedenstående figur 4.3.1 ses tre mulige grafer for sådan en funktion f:



a) b) c)

Fig. 4.3.1

Vi kan knytte følgende kommentarer til graferne:

a) Denne graf illustrerer, at det afsætningsmulige antal falder jævnt, når prisen stiger. En kurve med dette udseende vil være typisk for en vare, som kunderne egentlig har behov for, men som man dog kan undvære, hvis varen bliver ”for dyr” (hvilket jo er et relativt begreb).
Vi kan formodentlig forvente, at afsætningen af termokander vil følge denne kurve.
b) Denne graf illustrerer, at det afsætningsmulige antal næsten ikke falder selvom prisen sættes væsentligt op. En kurve med dette udseende vil være typisk for en vare, som kunderne føler et stærkt behov for (næsten) ”uanset prisen”, f.eks. cigaretter.
c) Denne graf illustrerer, at det afsætningsmulige antal falder relativt hurtigt, hvis prisen øges. En kurve med dette udseende vil være typisk for en vare, som kunderne ikke har særligt stort behov for, og som man derfor vil undlade at købe, hvis prisen bliver ”for høj”, f.eks. vægtæpper eller småkager.

Uanset om vi er i situation a), b) eller c), er afsætningsfunktionen aftagende – og dette er også det almindelige. Der findes dog specielle situationer ved specielle varer, hvor afsætningen stiger med en forøgelse af prisen, bare prisen er høj nok. (Dette kaldes Veblen-effekten, og man kan lidt populært sige, at denne effekt bygger på en psykologisk mekanisme af typen: jo højere prisen er, desto mere attraktivt er det at vise omverdenen at man har råd til at købe varen).
Vi vil imidlertid holde os til almindelige aftagende afsætningsfunktioner – som vist på figuren.

På dette tidspunkt skal det omtales, at der findes et begreb, der hedder *efterspørgsel*. Efterspørgslen af en given vare(type) i en given tidsperiode er en størrelse knyttet til markedet, nemlig det samlede antal vareenheder der kan afsættes på markedet (når varen har en given pris). I modsætning hertil står en størrelse knyttet til virksomheden og markedet, nemlig afsætningen, dvs. antallet af vareenheder, som den konkrete virksomhed afsætter på markedet.
Som bekendt er der almindeligvis mange producenter (virksomheder), som leverer den samme vare(type) til et givet marked – tænk. f.eks. på køkkenruller, cykler, æg, PC'er eller kattemad. Der er m.a.o. *konkurrence* på markedet, og de enkelte leverandører (virksomheder) har kun en vis markedsandel (som man så almindeligvis kæmper for at udvide – eller i det mindste fastholde).
Undertiden findes der "storleverandører" til markedet, som enten har *monopol* (dvs. de er den eneste leverandør af den givne vare til markedet) eller som har de facto monopol (dvs. de har så stor en markedsandel, at de mere eller mindre kan opføre sig, som om de har monopol). Dette gælder f.eks. forsyningen af mejeriprodukter i Danmark.
Bemærk, at der antalsmæssigt kun er sammenfald mellem afsætning og efterspørgsel for monopolvirksomheder – og selv her kan det tænkes, at efterspørgslen er større end afsætningen, men at monopol-virksomheden ikke kan eller vil levere yderligere varer til markedet. Vi bevæger os imidlertid nu for langt væk fra intentionerne med disse sider – og slutter emnet her.

Hvis vi igen vender tilbage til omtalen af figur 4.3.1 a), b) og c), så kan en af årsagerne til at afsætningen falder, hvis varen bliver "for dyr" altså netop være, at der findes konkurrerende produkter på markedet, og at (nogle af) kunderne derfor skifter til disse.
Der findes imidlertid en række "mekanismer" som har med beskatning af varer, gennemsigtighed af markedet, tilgængeligheden af varer mm. at gøre, som bevirker, at mange varer stort set koster det samme uanset leverandøren – og at det så er andet end prisen, man må konkurrere på.

En matematisk beskrivelse af afsætningsfunktioner

De tre modeller præsenteret på figur 4.3.1 kan beskrives ved følgende fire modelforskrifter: $q = f(p)$

a) moderat prisafhængighed / moderat udvikling (figur 4.3.1. a)):

$$q = a\cdot p + q_o \,, \qquad \text{hvor } a < 0 \text{ og } q_o > 0$$

b) lille prisafhængighed / ufølsom udvikling (figur 4.3.1. b)). En mulig model er her følgende:

$$q \;=\; w - s\cdot e^{r\cdot p} \text{ , hvor } w > 0,\ s > 0,\ r > 0 \text{ og r er ”lille”.}$$

c) stor prisafhængighed / følsom udvikling (figur 4.3.1 c)). En mulig model bygger på, at en given prisændring giver en bestemt relativ/procentuel ændring i afsætningen, dvs. at afsætningen er givet ved en eksponentiel vækstfunktion (eksponentielt aftagende):

$$q \;=\; c\cdot b^{p} \,, \quad \text{hvor } c > 0 \text{ og } 0 < b < 1$$

d) stor prisafhængighed / følsom udvikling (figur 4.3.1 c)). En anden mulig model bygger på, at en given procentuel prisændring giver en bestemt procentuel ændring i afsætningen, dvs. at afsætningen er givet ved en (aftagende) potentiel vækstfunktion:

$$q \;=\; k\cdot p^{-d} \,, \qquad \text{hvor } k > 0 \text{ og } d > 1$$

Forudsætningen $d > 1$ (i stedet for blot $d > 0$) for modellen i pkt. d) forklares i eksempel 4.3.14. Det er i øvrigt – uanset hvilken model man ser på – vigtigt at bemærke, at modellen (forskriften) kun gælder i et mere eller mindre begrænset interval (definitionsmængden for forskriften). Begrænsninger fastlægges af en lang række faktorer der har med forudsætningerne for modellen og dens parametres størrelse at gøre.
Bemærk i forlængelse af dette, at det er klart, at hvis $p \approx 0$, men dog $p > 0$ (dvs. hvis prisen er ganske lille), så vil q blive meget stor i alle tilfælde uanset model (hvorfor mon ?), ligesom det er klart, at vi f.eks. ikke kan have $q < 0$, hvilket matematisk set er muligt i model a) og b) bare p er stor nok.

<u>Øvelse 4.3.1.</u>
Tegn grafen for $q = f(p)$ i hver sit koordinatsystem for hver af følgende afsætningsfunktioner:
a) $q = 35.000 - 260 \cdot p \quad , \quad p \in [47; 90]$
b) $q = 55.000 - 8000 \cdot e^{0,02 \cdot p} \quad , \quad p \in [12; 50]$
c) $q = 655.000 \cdot 0,958^{p} \quad , \quad p \in [80; 140]$
d) $q = 30.000 \cdot p^{-1,13} \quad , \quad p \in [0,5; 6]$
Kommentér resultaterne. ♥

Selvom lineære modeller ikke lige hører hjemme i den matematiske sammenhæng, der er temaet for denne bog, så medtages de for at komplettere beskrivelsen. De er de simpleste og ofte brugbare til forklaring inden for begrænsede variationsområder. Men vægten vil i det følgende blive lagt på de tre øvrige modeller.

<u>Omsætning.</u>
Ved en virksomheds *omsætning* Oms for en given vare på et givet marked indenfor en given tidsperiode forstås afsætningen q gange prisen p, dvs. omsætningen er antallet af kroner (eller anden møntenhed) som virksomheden får ind ved salget af varen på markedet indenfor det givne tidsrum.
Virksomhedens omsætning Oms vil altså med de indførte betegnelser være givet ved:

$$\text{Oms}(p) = q \cdot p = f(p) \cdot p$$

Hvis virksomheden f.eks. sælger 8000 enheder til prisen 140 kr. pr. enhed, så er omsætningen $8000 \cdot 140 = 1.120.000$ kr.
Vi har her set på omsætningen som funktion af prisen, men som vi straks skal se, kan vi også angive omsætningen som funktion af den afsatte mængde.

Da $q = f(p)$ og da f er injektiv (idet f er aftagende) har vi: $p = f^{-1}(q)$.
Funktionen $f^{-1}(q)$ kaldes ofte for *prisfunktionen*, og den angiver den (maksimale) pris p som virksomheden kan forlange, for at virksomheden i den betragtede tidsperiode kan få afsat q enheder.
Vi ser hermed, at omsætningen som funktion af afsætningen (den afsatte mængde) q er givet ved:

$$\text{Oms}(q) = q \cdot p = q \cdot f^{-1}(q)$$

<u>Øvelse 4.3.2.</u>
a) Bestem den omvendte funktion til hver af de fire funktioner omtalt i øvelse 4.3.1 (husk definitionsmængden) (Jfr. Appendix 2).
b) Bestem et funktionsudtryk for Oms(q) i hvert af de fire tilfælde.
c) Find omsætningen ved et salg på 44.000 vareenheder i modellen fra øvelse 4.3.1 b) ♥

I forlængelse af øvelse 4.3.2 anfører vi følgende resultater:

Omsætningsfunktionen Oms(q) som funktion af det afsatte antal vareenheder q er for hver af de fire anførte afsætningsmodeller q = f(p) givet ved:

a) $\text{Oms}(q) = \frac{1}{a}\cdot(q-q_o)\cdot q$, hvor $q = a\cdot p + q_o$, ($a < 0$ og $q_o > 0$)

b) $\text{Oms}(q) = \frac{1}{r}\cdot(\ln(w-q)-\ln s)\cdot q$, hvor $q = w - s\cdot e^{r\cdot p}$, ($w > 0$, $s > 0$, $r > 0$ og r er ”lille”)

c) $\text{Oms}(q) = \frac{\ln q - \ln c}{\ln b}\cdot q$, hvor $q = c\cdot b^p$, ($c > 0$ og $0 < b < 1$)

d) $\text{Oms}(q) = q\cdot e^{\frac{\ln k - \ln q}{d}} = q\cdot \exp\left(\frac{\ln k - \ln q}{d}\right)$, hvor $q = k\cdot p^{-d}$, ($k > 0$ og $d > 1$)

Bevis:
Vi beviser b) og d), og overlader a) og c) til læseren. Metoden er for alle fire funktioner, at da $\text{Oms}(q) = q\cdot p = q\cdot f^{-1}(q)$, skal vi finde et udtryk for $f^{-1}(q)$ og derefter gange dette med q.

<u>Ad b):</u> $q = w - s\cdot e^{r\cdot p} \Leftrightarrow e^{r\cdot p} = \frac{w-q}{s} \Leftrightarrow r\cdot p = \ln(w-q)-\ln s \Leftrightarrow p = \frac{1}{r}\cdot(\ln(w-q)-\ln s)$

hvoraf det anførte udtryk fremkommer ved at gange med q.

<u>Ad d):</u> $q = k\cdot p^{-d} \Leftrightarrow \ln q - \ln k = -d\cdot \ln p \Leftrightarrow \ln p = \frac{\ln k - \ln q}{d} \Leftrightarrow p = e^{\frac{\ln k - \ln q}{d}}$

hvoraf det anførte udtryk fremkommer ved at gange med q. Desuden kan e^x skrives som exp(x) ♥

Som bekendt (ellers se Appendix 2) er definitionsmængden for en omvendt funktion lig med værdimængden for den oprindelige funktion. Da alle fire afsætningsfunktioner er aftagende og kontinuerte, er definitionsmængden for prisfunktionerne og omsætningsfunktionerne (som funktion af antal afsatte vareenheder) givet ved: $[f(p_{max})\,;\,f(p_{min})\,]$, hvor p_{max} og p_{min} er hhv. den største og den mindste pris i definitionsmængden for afsætningsfunktionen f. (Jfr. øvelse 4.3.1 og 4.3.2).

Grænseomsætning
Hvis antallet af afsatte varer ændres fra q_o til q, så får vi tilvæksten: $\text{Oms}(q) - \text{Oms}(q_o)$ i omsætningen, hvormed den gennemsnitlige omsætningstilvækst pr. ekstra vareenhed er lig med:

$$\frac{\text{Oms}(q)-\text{Oms}(q_o)}{q-q_o}$$

Hvis $q - q_o$ er ”lille”, så er denne brøk ca. lig med $\text{Oms}'(q_o)$ – jfr. de indledende kommentarer om de matematiske forudsætninger om modellerne.
Størrelsen $\text{Oms}'(q_o)$ kaldes *grænseomsætningen* Groms(q_o) (eller marginalomsætningen).
Hvis en tilvækst på 1 enhed kan regnes for ”lille” (jfr. igen de indledende kommentarer om de matematiske forudsætninger for modellerne), så kan vi sige, at <u>grænseomsætningen angiver tilvæksten i omsætningen ved at afsætte en ekstra enhed.</u>

<u>Øvelse 4.3.3.</u>
Bestem Groms(44000) for afsætningsmodellen fra øvelse 4.3.1 b) (Se øvelse 4.3.2). ♥

Elasticitet.

Det anbefales, at læseren starter med at gennemarbejde Appendix 4 om elasticitet.
Alternativt kan man læse det følgende korte, bearbejdede uddrag af Appendix 4:

Som mål for funktioners "følsomhed" overfor ændringer i den uafhængige variable anvendes ofte – og specielt i økonomisk orienterede sammenhænge – begrebet elasticitet:
Elasticiteten angiver forholdet mellem den relative vækst i funktionsværdierne og den relative vækst i den uafhængige variable (x-værdierne). Når man benytter elasticitetsbegrebet, vil man altså hellere arbejde med relativ (procentuel) vækst end med absolutte størrelser. Hvis en positiv funktion f får tilvæksten Δf, når den uafhængige variable får tilvæksten Δx med udgangspunktet x, så defineres elasticiteten $E_f(x;\Delta x)$ altså på følgende måde:

$$E_f(x;\Delta x) = \frac{\frac{\Delta f}{f(x)}}{\frac{\Delta x}{x}}$$

Hvis Δx er ganske lille ($\Delta x \approx 0$), så kan dette udtryk omskrives til:

$$E_f(x;\Delta x) = \frac{\Delta f}{f(x)} \cdot \frac{x}{\Delta x} = \frac{\Delta f}{\Delta x} \cdot \frac{x}{f(x)} \approx f'(x) \cdot \frac{x}{f(x)}$$

hvor vi har anvendt, at $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ stort set er det samme som $f'(x)$, når $\Delta x \approx 0$.
I denne situation udelades Δx i opskrivningen efter E'et, så vi i alt for elasticiteten $E_f(x)$ får:

Elasticiteten $E_f(x)$ for en funktion f i et punkt x er givet ved: $\quad E_f(x) = f'(x) \cdot \frac{x}{f(x)}$

En "lille" elasticitet betyder ringe påvirkning af funktionsværdierne som resultat af forandring i den uafhængige variable, og tilsvarende kommentar gælder for en "stor" elasticitet. Der anvendes ofte følgende sprogbrug:
En funktion f siges at være:

- fuldstændig elastisk i x, når $|E_f(x)| \approx \infty$
- elastisk i x, når $|E_f(x)| > 1$
- neutral-elastisk i x, når $|E_f(x)| \approx 1$
- uelastisk i x, når $|E_f(x)| < 1$
- fuldstændig uelastisk i x, når $|E_f(x)| \approx 0$.

I økonomiske sammenhænge anvendes (bl.a.) begreberne afsætningselasticitet, omsætningselasticitet, priselasticitet og efterspørgselselasticitet. Disse begreber fremkommer rent matematisk ved at indsætte hhv. afsætningsfunktionen, omsætningsfunktionen, prisfunktionen og efterspørgselsfunktionen i stedet for f i udtrykket: $E_f(x) = f'(x) \cdot \frac{x}{f(x)}$, og samtidig anvende den rigtige variable: prisen p eller mængden q.
Hvis vi f.eks. har en afsætningselasticitet på $E_{afs}(p_1) = -0{,}6$ så betyder det, at hvis vi ud fra prisen p_1 f.eks. forøger prisen med 1,7 %, så aftager afsætningen med $0{,}6 \cdot 1{,}7$ % = 1,02 %. Og hvis $E_{afs}(p_2) = -1{,}2$, så betyder det, at hvis vi ud fra prisen p_2 f.eks. nedsætter prisen med 1,8 %, så stiger afsætningen med $1{,}2 \cdot 1{,}8$ % = 2,16 %.
Hvis vi f.eks. har en omsætningselasticitet på $E_{oms}(q) = 2{,}3$ så betyder det, at hvis vi ud fra afsætningsstørrelsen q forøger afsætningen med 1,4 %, så stiger omsætningen med $2{,}3 \cdot 1{,}4$ % = 3,22 %.
Tilsvarende kommentarer kan knyttes til priselasticiteten og efterspørgselselasticiteten.

Øvelse 4.3.4.

a) Bestem et udtryk for afsætningselasticiteten $E_{afs}(p)$ for hver af de fire funktioner i øvelse 4.3.1.
b) Bestem $E_{afs}(50)$ og $E_{afs}(80)$ for afsætningsfunktionen fra øvelse 4.3.1 a).
c) Bestem $E_{afs}(15)$ og $E_{afs}(40)$ for afsætningsfunktionen fra øvelse 4.3.1 b).
d) Bestem $E_{afs}(90)$ og $E_{afs}(130)$ for afsætningsfunktionen fra øvelse 4.3.1 c).
e) Bestem $E_{afs}(1)$ og $E_{afs}(5)$ for afsætningsfunktionen fra øvelse 4.3.1 d).
f) Kommentér resultaterne og deres betydning i hvert af spørgsmålene b), c), d) og e). ♥

Øvelse 4.3.5.

a) Bestem et udtryk for omsætningselasticiteten $E_{oms}(q)$ for hver af de fire omsætningsfunktioner omtalt i øvelse 4.3.2 b). (Se evt. rammen øverst på side 136).
b) Bestem $E_{oms}(22000)$ og $E_{oms}(14000)$ svarende til afsætningsfunktionen fra øvelse 4.3.1 a).
c) Bestem $E_{oms}(44200)$ og $E_{oms}(38000)$ svarende til afsætningsfunktionen fra øvelse 4.3.1 b).
d) Bestem $E_{oms}(13700)$ og $E_{oms}(2000)$ svarende til afsætningsfunktionen fra øvelse 4.3.1 c).
e) Bestem $E_{oms}(30000)$ og $E_{oms}(5000)$ svarende til afsætningsfunktionen fra øvelse 4.3.1 d).
f) Kommentér resultaterne og deres betydning i hvert af spørgsmålene b), c), d) og e). ♥

Øvelse 4.3.6.

Diskuter begrebet elasticitet i relation til graferne på figur 4.3.1. ♥

Omkostninger

En virksomheds *omkostninger* ved at producere en given vare kan deles i *de faste omkostninger* (FC), som for en eksisterende produktion ikke afhænger af produktionsstørrelsen, og *de variable omkostninger* (VC), som afhænger af hvor mange vareenheder der produceres.

De faste omkostninger dækker f.eks. el, vand og varme til virksomheden, forrentning af den investerede kapital i bygninger, løn til en ikke-producerende direktion osv., medens de variable omkostninger er knyttet direkte til produktion og distribution af varerne (f.eks. råvarer og lønninger).
VC er en voksende funktion af antallet q af producerede vareenheder (jo flere varer der produceres, desto mere koster det!).
Bemærk, at såvel ved FC som VC er der tale om omkostninger knyttet til produktionen i en given tidsperiode.

Hvis virksomheden kun producerer én vare, så er virksomhedens *totale omkostninger* TC (som undertiden også benævnes Tomk) givet ved: TC = VC + FC, eller mere udførligt:

$$TC(q) = VC(q) + FC$$

idet de faste omkostninger ikke afhænger af produktionsstørrelsen q.
Hvis virksomheden derimod producerer flere forskellige vare(typer), så er det kun i sjældne tilfælde muligt at fastlægge, hvor stor en del af de faste omkostninger, der hører til hver enkelt vare. (Man kan selvfølgelig forsøge sig med en procentuel andel af de faste omkostninger, svarende til den konkrete vares procentuelle andel af f.eks. omsætningen. Men som man nok let kan forestille sig, så vil også dette kun undtagelsesvist være rimeligt). Man må derfor i de samlede beregninger for virksomheden medtage VC(q) for den givne vare, og så indkalkulere de samlede faste omkostninger til sidst (se begrebet dækningsbidrag senere i teksten).

Ved analyse og beregning af VC(q) er man ofte interesseret i at se på *de variable enhedsomkostninger* VU(q) (dvs. de variable omkostninger pr. enhed, når der produceres q enheder). Disse er givet ved:

$$VU(q) = \frac{VC(q)}{q}$$

Hvis de variable omkostninger ved at producere 800 enheder af en given vare er 13.200 kr., så er VU(800) = $\frac{13200}{800}$ kr. pr. stk. = 16,50 kr. pr. stk.

Undertiden er VU konstant, dvs. den har den samme størrelse uanset hvor mange enheder man producerer (indenfor visse grænser – svarende til omkostningsfunktionens definitionsmængde). I dette tilfælde er $VC(q) = VU\cdot q$ og $TC(q) = VU\cdot q + FC$. Hvis f.eks. VU er konstant 28 kr., og de faste omkostninger er 230.000 kr., så er $VC(q) = 28\cdot q$ og $TC(q) = 28\cdot q + 230.000$.
Vi ser altså, at omkostningsfunktionerne VC(q) og TC(q) bliver lineære funktioner, når VU er konstant.

Bortset fra de sidste 6 linier om grænseomsætning, kan resten af afsnittet om omkostninger springes over, hvis læseren ønsker det, idet der efterfølgende stort set kun arbejdes med lineære omkostningsmodeller. Denne indskrænkning til lineære modeller er dels for nemheds skyld, dels fordi den matematiske beskrivelse af omkostningsfunktionerne dybest set falder udenfor bogens overordnede emnekreds: logaritme-, eksponential- og potensfunktioner – og i øvrigt kan en lineær model ved relativt små variationer i produktionsantallet med rimelighed approximere omkostningsfunktionen. Men emnet omkostninger gives for fuldstændighedens skyld en mere fyldestgørende behandling i det følgende.

Det er vigtigt at bemærke, at VU ofte ikke er konstant, men derimod afhænger af, hvor mange enheder q man producerer. VU bliver altså en funktion af q, dvs. VU(q).
Der er visse faktorer, der bevirker at VU aftager ved øget produktion, og der er andre faktorer der bevirker, at VU vokser ved øger produktion.

Faktorer, der kan få VU til at <u>vokse</u> ved øget produktion (læseren opfordres til at prøve at finde andre faktorer end de følgende):

- øget produktion kan forøge spildprocenten for materialer til produktionen
- øget produktion medfører øget slidtage på maskinerne
- øget produktion kan medføre anvendelse af overarbejdsbetaling eller skifteholdsbetaling
- øget produktion kan kræve flere ansatte og måske større udskiftningshastighed af personalet, hvilket resulterer i nedsat produktivitet pr. ansat (idet der bl.a. bliver behov for en forøget oplæring af de ansatte)
- hvis den virksomhed, der leverer råmateriale til produktionen, dominerer markedet, så kan en øget produktion medføre en forøgelse af indkøbsprisen, idet efterspørgslen forøges

Modelteknisk kan sådanne faktorer indkalkuleres ved at lade VU være givet ved en konstant plus et led, der vokser med øget produktionsstørrelse q. Det kunne f.eks. tænkes, at $VU(q) = 28 + 0{,}006\cdot q$ kr. pr. enhed, hvormed vi får: $VC(q) = VU(q)\cdot q = 28\cdot q + 0{,}006\cdot q^2$ – og hvis de faste omkostninger svarende hertil er 230.000 kr., så får vi: $TC(q) = 0{,}006\cdot q^2 + 28\cdot q + 230.000$.

<u>Øvelse 4.3.7.</u>
Tegn grafen for $TC(q) = 0{,}006\cdot q^2 + 28\cdot q + 230.000, \quad q \in [0; 12000]$ ♥

Vi ser, at hvis VU(q) bliver større ved forøgelse af produktionstallet q, så vil omkostningsfunktionerne VC(q) og TC(q) krumme opad (få en øget tangenthældning). Vi siger da, at der er tale om en *progressiv* omkostningsfunktion.

Faktorer, der kan få VU til at <u>aftage</u> ved øget produktion (læseren opfordres til at prøve at finde andre faktorer end de følgende):

- øget produktion kan give kvantumsrabatter ved indkøb af råvarer
- øget produktion kan give rationalisering af produktionen
- øget produktion kan give lavere klargøringsomkostninger pr. produceret enhed (ved skift fra produktion af en varetype til en anden på det samme produktionsapparat)
- øget produktion kan give lavere administrationsomkostninger pr. produceret enhed

Modelteknisk kan sådanne faktorer indkalkuleres ved at lade VU være givet ved en konstant minus et led, der bliver numerisk større med øget produktionsstørrelse q. Det kunne f.eks. tænkes, at $VU(q) = 98 - 0,003 \cdot q$ kr. pr. enhed, hvormed vi får: $VC(q) = VU(q) \cdot q = 98 \cdot q - 0,003 \cdot q^2$ – og hvis de faste omkostninger er 380.000 kr., så får vi: $TC(q) = -0,003 \cdot q^2 + 98 \cdot q + 380.000$.

<u>Øvelse 4.3.8.</u>
Tegn grafen for $TC(q) = -0,003 \cdot q^2 + 98 \cdot q + 380.000, \quad q \in [0; 14000]$ ♥

Vi ser, at hvis VU(q) bliver mindre ved forøgelse af produktionstallet q, så vil omkostningsfunktionerne VC(q) og TC(q) krumme nedad (få en aftagende tangenthældning). Vi siger da, at der er tale om en *degressiv* omkostningsfunktion.

Hvis vi analyserer de beskrevne årsager til, at omkostningsfunktionerne VC og TC kan være progressive hhv. degressive, så ser vi, at den degressive tendens typisk vil forekomme ved ”lave” produktionstal medens den progressive tendens vil forekomme ved ”høje” produktionstal. (Dette kan også udtrykkes på følgende måde: VC og TC vokser med aftagende styrke ved relativt små produktionstal og med voksende styrke ved større produktionstal).
En graf for TC, som dækker et større variationsområde (definitionsmængde), kan altså forventes at have et udseende i stil med det der er vist på nedenstående figur 4.3.2, hvor q er produktionsantallet:

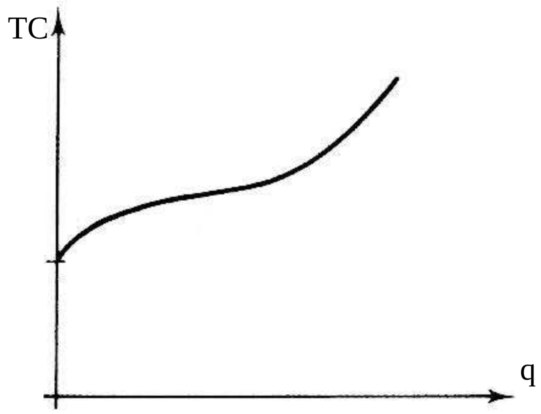


Fig. 4.3.2

En <u>mulig</u> <u>model</u> for TC(q) ses da at være et voksende tredjegradspolynomium:

$$TC(q) = a \cdot q^3 + b \cdot q^2 + c \cdot q + d$$

Men der må stilles en række krav til koefficienterne a, b, c og d for at give en kurve som den viste (se øvelse 4.3.12).

Eksempel 4.3.9.
Det har for en given produktion i en given virksomhed vist sig, at der er følgende sammenhørende værdier for de totale omkostninger TC og produktionstallet q:

q (stk.)	0	5000	10.000	20.000
TC (kr.)	100.000	160.000	180.000	235.000

Vi vil undersøge, om det er muligt at beskrive TC ved et tredjegradspolynomium, dvs. om vi kan få opfyldt, at: $TC(q) = a \cdot q^3 + b \cdot q^2 + c \cdot q + d$.
Da de faste omkostninger FC = TC(0) = d ses, at d = 100.000. Herefter bruges de tre andre sammenhørende værdier af q og TC til at opstille tre ligninger med tre ubekendt: a, b og c. Vi får:

$$\text{I:} \quad 160.000 = a \cdot 5000^3 + b \cdot 5000^2 + c \cdot 5000 + 100.000$$
$$\text{II:} \quad 180.000 = a \cdot 10.000^3 + b \cdot 10.000^2 + c \cdot 10.000 + 100.000$$
$$\text{III:} \quad 235.000 = a \cdot 20.000^3 + b \cdot 20.000^2 + c \cdot 20.000 + 100.000$$

Disse tre ligninger med tre ubekendt løses ved at finde c udtrykt ved a og b i ligning I, og derefter indsætte dette udtryk ($c = 12 - a \cdot 25.000.000 - b \cdot 5000$) i ligning II og III, som herved bliver til to ligninger med to ubekendt (a og b). Disse to ligninger løses på sædvanlig facon, hvilket overlades til læseren. Vi finder: $a = 4{,}5 \cdot 10^{-8}$ og $b = -1{,}475 \cdot 10^{-3}$. Indsættes disse værdier i udtrykket for c finder vi (kontrollér), at: c = 18,25.
Alt i alt ser vi, at:

$$TC(q) = 4{,}5 \cdot 10^{-8} \cdot q^3 - 1{,}475 \cdot 10^{-3} \cdot q^2 + 18{,}25 \cdot q + 100.000 \qquad \heartsuit$$

Øvelse 4.3.10.
Betragt omkostningsfunktionen TC fra eksempel 4.3.9 med definitionsmængden: $q \in [0 \,;\, 22.000]$

a) Bestem monotoniforholdene for TC.
(Hvad forventer vi af monotoniforholdene for TC ? Er dette opfyldt ?)

b) Bestem monotoniforholdene for TC′ (dvs. for tangenthældningen).
(TC′ skulle gerne være aftagende (dvs. TC skulle gerne være degressiv) i ”den lave ende” af definitionsmængden, og TC′ skulle gerne være voksende (dvs. TC skulle gerne være progressiv) i ”den høje ende” af definitionsmængden. Er dette tilfældet ?)

c) Den værdi af q, hvor TC skifter fra at være degressiv til at være progressiv kaldes inflexionspunktet q_o for TC. Hvilken værdi har q_o ?

d) Tegn grafen for TC(q), $q \in [0 \,;\, 22.000]$ - og kommentér resultatet. ♥

Øvelse 4.3.11.
Et firma producerer en given vare, og har i den forbindelse årlige faste omkostninger på 600.000 kr. Det oplyses, at de totale omkostninger Tomk(q) opfylder, at:

Tomk(1000) = 2.550.000 , Tomk(2000) = 3.000.000 , Tomk(4000) = 5.400.000

a) Bestem en forskrift for et tredjegradspolynomium, der kan bruges som model for Tomk(q) svarende til de kendte omkostningsværdier.
(Svaret skulle gerne blive: $Tomk(q) = 0{,}00025 \cdot q^3 - 1{,}5 \cdot q^2 + 3200 \cdot q + 600.000$).

b) Bestem monotoniforhold for Tomk og Tomk′ – og gør rede for, at Tomk opfylder de forventninger vi har til en omkostningsmodel af denne type.

c) Bestem inflexionspunktet for Tomk (Se evt. øvelse 4.3.10, pkt. c)

d) Tegn grafen for Tomk(q), $q \in [0 \,;\, 4000]$ - og kommentér resultatet. ♥

<u>Øvelse 4.3.12.</u>
Hvis et tredjegradspolynomium $a \cdot q^3 + b \cdot q^2 + c \cdot q + d$ skal kunne bruges som en model for en omkostningsfunktion, så er der nogle krav til koefficienterne a, b, c og d, som skal være opfyldt.
Vi ser, at hvis $TC(q) = a \cdot q^3 + b \cdot q^2 + c \cdot q + d$, så er $d = TC(0) = FC$ (de faste omkostninger), hvormed vi må have, at $d > 0$, samt at $VC(q) = a \cdot q^3 + b \cdot q^2 + c \cdot q$.

Argumentér for, at der desuden skal gælde, at: $a > 0$, $b < 0$ og $c \geq \dfrac{b^2}{3a}$.

(<u>*Vejledning:*</u> Benyt, at $TC'(q) \geq 0$ for alle q, idet TC skal være voksende, samt at der må findes et <u>positivt</u> tal q_o (inflexionspunktet), hvor TC er degressiv for $q < q_o$ og TC er progressiv for $q > q_o$. (Bemærk at TC's degressivitet og progressivitet kan ses ud fra fortegnet for TC'')). ♥

<u>Øvelse 4.3.13.</u>
Vis, at koefficienterne i modellerne i eksempel 4.3.9 og øvelse 4.3.11 opfylde kravene, der omtales i øvelse 4.3.12. ♥

Som ved omsætningen definerer vi *grænseomkostningerne* Gromk(q) ved:

$$Gromk(q) = TC'(q) = VC'(q)$$

Bemærk, at $TC'(q) = VC'(q)$, idet FC er en konstant, som forsvinder ved differentiationen.
Hvis en tilvækst på 1 enhed kan regnes for "lille" (jfr. igen de indledende kommentarer om de matematiske forudsætninger for modellerne), så kan vi sige, at <u>grænseomkostningerne angiver tilvæksten i de totale eller i de variable omkostninger ved at producere en ekstra enhed.</u>

<u>*Profit og dækningsbidrag*</u>

Vi antager nu, at virksomheden på baggrund af kendskab til sin afsætningsfunktion producerer lige så mange vareenheder q, som den kan afsætte. Virksomhedens *profit (fortjeneste, gevinst)* Pr(q) er da givet ved:

$$Pr(q) = Oms(q) - TC(q)$$

Virksomhedens *dækningsbidrag* DB(q) ved produktion og salg af q vareenheder er givet ved:

$$DB(q) = Oms(q) - VC(q)$$

Dækningsbidraget er, som navnet siger, den pågældende vares bidrag til at dække virksomhedens faste omkostninger, men den gør det ikke alene. Når alle dækningsbidragene fra virksomhedens produkter lægges sammen viser det sig forhåbentlig, at summen er større end FC og at der dermed skabes et overskud for virksomheden.

Det kan betale sig for virksomheden at øge produktionen af en given vare så længe profitten eller dækningsbidraget bliver større, dvs. så længde $Pr'(q) \geq 0$ eller $DB'(q) \geq 0$ – under forudsætning af, at vi ikke hermed ryger udenfor definitionsmængden for afsætnings- eller omkostningsfunktionen. (Det hjælper ikke meget, at det matematisk set tilsyneladende viser sig at kunne betale sig at øge produktionen til f.eks. det 4-dobbelte, hvis virksomhedens produktionskapacitet ikke kan håndtere dette, og der derfor skal investeres i nye bygninger, maskineri, medarbejdere mm., hvormed omkostningsfunktionen ikke længere er gældende).

En produktionsforøgelse er altså givtig, så længe: Groms(q) ≥ Gromk(q).
Således må det naturligvis også være, idet det må kunne betale sig for virksomheden at øge produktionen, så længe omsætningsforøgelsen pr. ekstra vareenhed er større end omkostningsforøgelsen pr. ekstra vareenhed.

Afslutningsvist skal det omtales, at man almindeligvis og naturligvis er interesseret i at sikre, at Pr(q) ≥ 0. Den mindste værdi af q, for hvilke dette er opfyldt, kaldes "*break-even punktet*".
Ofte er der også en største værdi af q som opfylder, at Pr(q) ≥ 0. Denne værdi kaldes *profitgrænsen.*
I stedet for break-even-punktet og profitgrænsen anvendes undertiden også benævnelserne: nedre dækningspunkt og øvre dækningspunkt.

Modeleksempler med afsætning, omsætning, elasticitet, omkostning og gevinst

Eksempel 4.3.14.
Vi vil starte med at fortælle, hvorfor det i den potentielle afsætningsmodel $q(p) = k\cdot p^{-d}$ er nødvendigt – ud fra en modelteoretisk synsvinkel – at forudsætte, at d > 1, og hvilke konsekvenser det har for modeldannelsen.
Hvis en omsætningsfunktion Oms(q) ikke er voksende på noget tidspunkt, så kan det bedst betale sig at have en afsætning på 0 stk. , dvs. lade være med at afsætte produktet på markedet – og dermed selvfølgelig også lade være med at producere det ! (Overvej dette !!).
Hvis $q(p) = k\cdot p^{-d}$, så må vi have, at k > 0 og d > 0, idet q(p) er en positiv, aftagende funktion.
Ifølge pkt. d) i rammen på side 136 har vi, at omsætningsfunktionen er givet ved:

$$\text{Oms}(q) = q\cdot\exp\left(\frac{\ln k - \ln q}{d}\right)$$

Vi vil nu bestemme Groms(q) og undersøge hvad der sikrer, at Groms(q) > 0 , og dermed at Oms(q) er voksende – i hvert fald for visse værdier af q. Da Groms(q) = Oms′(q) finder vi ved anvendelse af reglerne for differentiation af et produkt og af en sammensat funktion, at:

$$\text{Groms}(q) = \exp\left(\frac{\ln k - \ln q}{d}\right) + q\cdot\exp\left(\frac{\ln k - \ln q}{d}\right)\cdot\left(-\frac{1}{d}\cdot\frac{1}{q}\right) = \left(1-\tfrac{1}{d}\right)\cdot\exp\left(\frac{\ln k - \ln q}{d}\right)$$

Da eksponentialfunktionen kun antager positive værdier, bestemmes fortegnet for Groms(q) af faktoren $\left(1-\tfrac{1}{d}\right)$. For at have en mulig model må vi derfor forlange, at $1-\tfrac{1}{d} > 0$, og dermed: d > 1.
En afsætningsmodel af typen $q(p) = k\cdot p^{-d}$ kan bruges, når vi tror på, at afsætningen aftager med en bestemt brøkdel $|r_2|$, hvis prisen øges med en bestemt brøkdel r_1. Ifølge sætning 1.6.14 3) gælder der, at: $-d = \dfrac{\ln(1+r_2)}{\ln(1+r_1)}$, og hvis vi kombinerer dette med d > 1, samt med $r_1 > 0$ og $r_2 < 0$, så får vi:

$$-\frac{\ln(1+r_2)}{\ln(1+r_1)} > 1 \iff -\ln(1+r_2) > \ln(1+r_1) \iff \ln((1+r_2)^{-1}) > \ln(1+r_1) \iff (1+r_2)^{-1} > 1+r_1$$

Vi ser altså, at: $d > 1 \iff (1+r_1)\cdot(1+r_2) < 1 \iff r_1 + r_2 + r_1\cdot r_2 < 0$.
Dette krav vil i hvert fald være opfyldt, hvis $r_1 < |r_2|$, idet dette giver, at: $r_1 + r_2 < 0$ og dermed (idet $r_1\cdot r_2 < 0$), at $r_1 + r_2 + r_1\cdot r_2 < 0$. En potentiel afsætningsfunktion kan altså være en mulig model, hvis afsætningen aftager med en større procentdel end prisen øges med (se eksempel 4.3.15). ♥

<u>Eksempel 4.3.15.</u>
I eksempel 2.4.23 og øvelse 2.4.24 beskæftigede vi os med virksomheden Brød & Kager og deres produkt "Søde Småting". Vi fandt, at den halvårlige afsætning kunne beskrives ved afsætningsfunktionen: $q(p) = 770426 \cdot p^{-1{,}431}$. Som beskrevet s. 135 øverst skal vi i modellen holde os indenfor et begrænset prisinterval, som vi her antager er: $p \in [5\,;\,20]$. Vi har altså:

$$q(p) = 770426 \cdot p^{-1{,}431} \quad , \quad p \in [5\,;\,20]$$

Vi vil bestemme afsætningselasticitet, grænseomsætning, dækningsbidrag og optimering heraf.

Afsætningselasticiteten findes ifl. rammen på s. 137 som: $E_{afs}(p) = q'(p) \cdot \dfrac{p}{q(p)}$, hvoraf vi ser, at:

$$E_{afs}(p) \;=\; q'(p) \cdot \frac{p}{q(p)} \;=\; 770426 \cdot (-1{,}431) \cdot p^{-2{,}431} \cdot \frac{p}{770426 \cdot p^{-1{,}431}} \;=\; -1{,}431$$

Afsætningselasticiteten er altså uafhængig af p (vi siger, at afsætningsfunktionen er iso-elastisk), og ifølge den gængse sprogbrug for elasticiteter omtalt s. 137 må afsætningen betegnes som elastisk.

Ifølge pkt. d) i rammen på side 136 har vi, at omsætningsfunktionen er givet ved:

$$Oms(q) = q \cdot \exp\left(\frac{\ln(770426) - \ln q}{1{,}431}\right) \quad , \quad q \in [10593\,;\,77002]$$

hvor definitionsmængden er bestemt af værdierne $q(5) = 77002{,}51$ og $q(20) = 10592{,}48$.

Vi vil bestemme grænseomsætningen ved en afsætning på 22.000 stk., dvs. Groms(22000).
Vi finder først Groms(q):

$$Groms(q) \;=\; Oms'(q) \;=\; \exp\left(\frac{\ln(770426) - \ln q}{1{,}431}\right) + q \cdot \exp\left(\frac{\ln(770426) - \ln q}{1{,}431}\right) \cdot \left(-\frac{1}{1{,}431} \cdot \frac{1}{q}\right)$$

$$= \left(1 - \tfrac{1}{1{,}431}\right) \cdot \exp\left(\frac{\ln(770426) - \ln q}{1{,}431}\right) \;=\; 0{,}3012 \cdot \exp\left(\frac{\ln(770426) - \ln q}{1{,}431}\right)$$

dvs.

$$Groms(q) \;=\; 0{,}3012 \cdot \exp\left(\frac{\ln(770426) - \ln q}{1{,}431}\right)$$

Ved indsættelse af q = 22000 ser vi (kontrollér !), at: Groms(22000) = 3,61 kr. pr. stk.

Brød & Kager's enhedsomkostning ved produktion af "Søde Småting" er 3,30 kr., hvormed vi ser, at de variable omkostninger VC(q) er givet ved: $VC(q) = 3{,}3 \cdot q$.
Idet vi går ud fra, at virksomheden producerer netop så meget, som den kan afsætte, får vi, at dækningsbidraget DB(q) er givet ved:

$$DB(q) = Oms(q) - VC(q) \;=\; q \cdot \exp\left(\frac{\ln(770426) - \ln q}{1{,}431}\right) - 3{,}3 \cdot q$$

Vi vil nu bestemme den produktions- og afsætningsstørrelse q, som giver maksimalt DB.
Dette gøres enten ved at sætte $DB'(q) = 0$ og bestemme DB(q)'s monotoniforhold, eller som omtalt ovenfor ved at løse uligheden: $Groms(q) \geq Gromk(q)$. Vi vælger her den sidstnævnte metode.
Groms(q) er udregnet ovenfor, og $Gromk(q) = VC'(q) = 3{,}3$, så vi skal løse uligheden:

$$0{,}3012 \cdot \exp\left(\frac{\ln(770426) - \ln q}{1{,}431}\right) \;\geq\; 3{,}3 \quad\Leftrightarrow\quad \exp\left(\frac{\ln(770426) - \ln q}{1{,}431}\right) \;\geq\; 10{,}9562$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\ln(770426) - \ln q}{1{,}431} \geq 2{,}39390 \quad \Leftrightarrow \quad \ln(770426) - 3{,}42568 \geq \ln q \quad \Leftrightarrow \quad e^{10{,}1290} \geq q$$

hvor vi undervejs har benyttet, at både ln og e^x er voksende funktioner.
Uligheden Groms(q) ≥ Gromk(q) har altså løsningen: $q \leq 25059{,}9$.

Den optimale produktions- og afsætningsstørrelse pr. halvår er altså: 25.059 stk.

Vi ser (kontrollér!), at det optimale/maksimale dækningsbidrag er: DB(25059) = 191.862, 81 kr. og at salgsprisen p_{opt} svarende til den optimale afsætning er givet ved: p_{opt} = 10,96 kr. pr. stk.

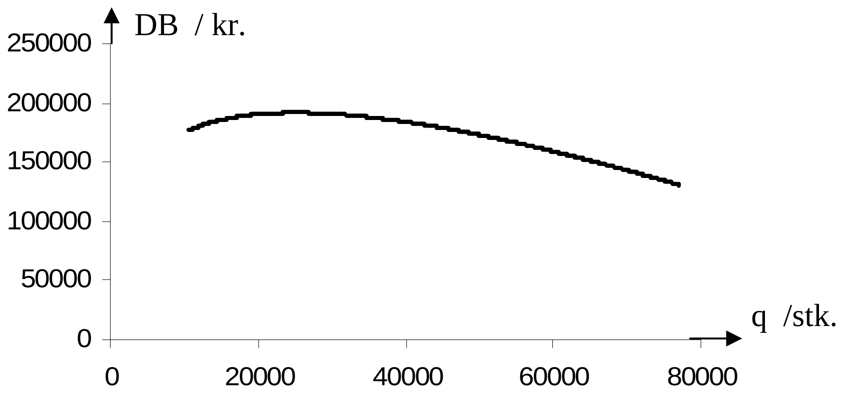


Fig. 4.3.3

På figuren ses grafen for funktionen DB(q), $q \in [10593 ; 77002]$. ♥

Øvelse 4.3.16.

I denne øvelse arbejdes med en lineær afsætningsmodel og en progressiv omkostningsmodel. Øvelsen medtages for fuldstændighedens skyld (jfr. beskrivelsen af afsætningsfunktioner og den "udvidede" beskrivelse af omkostningsfunktioner) selvom sådanne modeller ikke direkte hører under bogens matematiske tema.

På baggrund af en forbrugerundersøgelse og på baggrund af tidligere erfaringer har man i en virksomhed estimeret, at så længe prisen er større end 60 kr. pr. stk. og mindre end 115 kr. pr. stk., så vil det afsætningsmulige antal termokander falde med 500, for hver krone prisen på termokander sættes op. Man har desuden fundet ud af, at man kan sælge 20.000 termokander pr. kvartal, hvis prisen er 100 kr. pr. stk.
Ved den produktionsstørrelse, der arbejdes med her, er virksomhedens omkostningsfunktion progressiv, og man har skønnet, at de variable enhedsomkostninger VU(q) kan beskrives ved udtrykket: $VU(q) = 40 + \frac{1}{1500}q$, hvor de 40 kr. står for de konstante udgifter ved produktion af én termokande (normal arbejdsløn, udgifter til råvarer, mm.), medens leddet $\frac{1}{1500}q$ står for den forøgelse i omkostningerne pr. termokande, der skyldes forøget produktion (progressiviteten).
Man skønner desuden, at de faste omkostninger er 370.000 kr. pr. kvartal.
Det antages, at der produceres lige så mange termokander, som der kan sælges.

a) Bestem et udtryk for Pr(q) – og tegn grafen for Pr(q)
b) Beregn den optimale produktions- og afsætningsstørrelse pr. kvartal
c) Beregn den tilsvarende pris og den tilsvarende profit
d) Beregn break-even-punktet og profitgrænsen. Kommentér resultaterne. ♥

Øvelse 4.3.17.

I øvelse 2.4.25 omtales det ugentlige antal buspassagerer med det kommunale trafikselskab i en større by. Afsætningsfunktionen er her lig med passagerantallet A(p) som funktion af billetprisen p.

a) Bestem afsætningselasticiteten, når billetprisen er 12 kr.

b) Bestem omsætningselasticiteten når det ugentlige passagerantal er 650.000.

c) Kommentér resultaterne, herunder hvad de egentlig betyder. ♥

Øvelse 4.3.18.

Virksomheden Jammy-Jammy A/S fremstiller bl.a. jordbærmarmelade, og det er afsætningsforholdene for dette produkt , der undersøges i denne øvelse.
Det har vist sig, at ved salgsprisen 24 kr. pr. kg kan virksomheden afsætte 14.000 kg pr år, samt at afsætningen falder med 8 % for hver krone, prisen pr. kg forøges med.

a) Bestem en funktionsforskrift for afsætningsfunktionen (afsætningen som funktion af prisen). (Afsætningen måles i kg pr. år og prisen i kr. pr. kg).

b) Hvor meget ændres omsætningen, hvis prisen ændres fra 24 kr. pr. kg til 29,75 kr. pr. kg ?

c) Bestem afsætningselasticiteten, når prisen er 24 kr. pr. kg.

d) Bestem en funktionsforskrift for prisfunktionen (prisen som funktion af afsætningen).

e) Bestem en funktionsforskrift for grænseomsætningen som funktion af afsætningens størrelse.

f) Bestem den optimale produktions- og afsætningsstørrelse, idet det oplyses, at de variable enhedsomkostninger er konstant lig med 11 kr. pr. kg (og vi antager, at der produceres lige så meget som der kan afsættes).

g) Bestem den optimale salgspris og det optimale dækningsbidrag. ♥

Øvelse 4.3.19.

For en bestemt type slik har det vist sig, at afsætningen falder med 3 % for hver krone prisen sættes op, samt at ved en pris på 11,50 kr. pr. pakke er afsætningen 12.500 pakker pr. uge.

a) Vis at afsætningsfunktionen er givet ved forskriften: $q(p) = 17743{,}3 \cdot 0{,}97^{p}$

b) Bestem prisen p som funktion af den afsatte mængde q

c) Bestem omsætningen som funktion af q

d) Bestem den værdi af q – og den dertil hørende pris – der giver maksimal omsætning.

Virksomhedens omkostninger ved slikproduktionen er 30.000 kr. i faste omkostninger plus 2 kr. pr. pakke. Vi antager, at der afsættes lige så meget, som der produceres.

e) Bestem profitten (fortjenesten) som funktion af q

f) Bestem størrelsen af den optimale produktion, den hertil svarende pris, og den maksimale profit.

g) Sammenlign svarene i pkt. d) og f) – og kommentér resultatet. ♥

Øvelse 4.3.20.

I denne opgave betragtes efterspørgslen af kaffe som funktion af prisen.
Hvis prisen ligger imellem 36 kr. pr. kg og 70 kr. pr. kg, kan der for det jyske marked regnes med følgende sammenhæng mellem efterspørgslen q og prisen p:

$$q(p) = K - a \cdot e^{bp}$$

hvor K, a og b er positive konstanter, og hvor q og p måles i hhv. kg pr. uge og kr. pr. kg.

Værdierne af K og a er estimeret til at være: $K = 100.000$ og $a = 250$, og desuden har det vist sig, at der efterspørges 93.000 kg pr. uge, når prisen er 53 kr. pr. kg.

a) Bestem værdien af konstanten b.
b) Skitsér grafen for $q(p)$, $p \in [36;70]$.
c) Diskutér/Beskriv med ord rimeligheden eller urimeligheden af grafens udseende, dvs. af efterspørgselsmodellen for kaffe på det jyske marked.
d) Bestem efterspørgselselasticiteten, når prisen er 45 kr. pr. kg
e) Forklar (med ord), hvad den beregnede størrelse i pkt. d) står for/betyder/beskriver. ♥

<u>Øvelse 4.3.21.</u>
Virksomheden ”Det gamle Bageri” fremstiller pebernødder. Det har vist sig, at afsætningen falder med 4,5 % for hver krone, prisen pr. kg. forøges, samt at der kan afsættes 8000 kg (pr. år), når prisen er 42 kr. pr. kg.

a) Bestem en funktionsforskrift for afsætningen q som funktion af prisen p
(q måles i kg pr. år og p i kr. pr. kg)
b) Bestem afsætningselasticiteten, når prisen er 40 kr. pr. kg
c) Bestem omsætningselasticiteten, når prisen er 30 kr. pr. kg.
d) Forklar, hvad de fundne værdier i b) og c) betyder. ♥

<u>Øvelse 4.3.22.</u>
Den månedlige afsætning q af en given vare antages at kunne beskrives ved funktionen: $q = b \cdot p^{-a}$, hvor p er varens pris.
Man har fundet ud af, at hvis $p = 28$ kr., så er $q = 8000$ stk., og hvis $p = 40$ kr., så er $q = 4000$ stk.

a) Bestem værdien af parametrene a og b
b) Bestem den procentvise stigning i afsætningen, hvis prisen på varen nedsættes med 7 %.
c) Bestem omsætningen Oms(q) som funktion af afsætningen q.

Virksomhedens omkostninger ved produktionen er 18.000 kr. i faste omkostninger plus 15 kr. pr. enhed. Vi antager, at der afsættes lige så meget, som der produceres.

d) Bestem den optimale produktionsstørrelse, den tilsvarende pris og den maksimale fortjeneste. ♥

<u>Øvelse 4.3.23.</u>
Virksomheden GUF A/S fremstiller en bestemt type kvalitetschokolade, hvorom det har vist sig, at afsætningen falder med 6 % for hver krone, prisen forøges, samt at når prisen er 22 kr., så kan der afsættes 28.000 stk. pr. måned.

a) Bestem en funktionsforskrift for afsætningen q som funktion af prisen p – og tegn dens graf.
b) Bestem en funktionsforskrift for den tilsvarende omvendte funktion, dvs. for prisen p som funktion af afsætningen q

Det antages, at virksomheden afsætter lige så meget, som den producerer, samt at de totale produktionsomkostninger er givet ved: $Tomk(q) = 8q + 100.000$ kr. pr. måned

c) Bestem en funktionsforskrift for gevinsten (profitten) som funktion af det producerede og afsatte antal vareenheder q
d) Bestem den optimale produktionsstørrelse og den hertil hørende pris
(Husk at argumentere for, at der er tale om den optimale produktionsstørrelse). ♥

Øvelse 4.3.24.
Tobaksfirmaet SMOG arbejder i deres interne afsætningsanalyser med en afsætningsmodel med lav prisfølsomhed, idet de for cigaretmærket STYLE skønner, at der er følgende sammenhæng mellem afsætningen x (målt i antal afsatte pakker pr. kvartal) og prisen p (målt i kr.):

$$x = 200.000 - 3500 \cdot e^{0,1 \cdot p}$$

a) Skitsér grafen for x som funktion af p, hvor $p \in [10\ ;\ 35]$ kr.
b) Bestem en funktionsforskrift for omsætningen Oms(x) som funktion af afsætningen x.

Firmaets omkostninger pr. kvartal er 900.000 kr. ved en produktion på 150.000 pakker og 780.000 kr. ved en produktion på 120.000 pakker. Det antages, at der er en lineær sammenhæng mellem produktionsomkostningerne og det producerede antal pakker, samt at der afsættes lige så meget, som der produceres.

c) Bestem en forskrift for virksomhedens gevinstfunktion (profitfunktion) Ge(x), hvor x er det producerede og afsatte antal pakker pr. kvartal.
d) Bestem den gevinstoptimale produktionsstørrelse – og den hertil hørende gevinst.
Vejledning:
- Start med at vise, at $Ge'(x) = 0 \Leftrightarrow h(x) = g(x)$, hvor

$$h(x) = 10 \cdot \ln(200000 - x) \quad \text{og} \quad g(x) = \frac{10x}{200000 - x} + 85{,}605$$

- Vis, at h er aftagende og g er voksende
- Argumentér for, at der kun kan være én løsning x_o til ligningen $Ge'(x) = 0$, at $Ge'(x) > 0$ for $x < x_o$, og at $Ge'(x) < 0$ for $x > x_o$ – og at funktionen Ge derfor har maksimum i x_o
- Bestem x_o – f.eks. ved anvendelse af "solver" på grafregneren.
- Beregn $Ge(x_o)$ ♥

Eksempel 4.3.25.
I dette eksempel vil vi se på reklamens indvirkning på afsætningen q(p) af en given vare. Almindeligvis bevirker en reklameindsats, at der til en given pris kan afsættes mere, hvormed afsætningskurven i en given model forrykkes opad (jfr. figur 4.3.4).
Det er her rimeligt at forvente, at den forøgelse $q_{extra}(M)$ i afsætningen, der forekommer p.gr.a. reklameindsatsen til værdien M, er en voksende funktion af M, hvilket også er antydet på figuren.
Det er desuden rimeligt at forvente, at $q_{extra}(M)$ (når M er blevet større end en vis værdi) vokser med aftagende væksthastighed (hvorfor ?).
Der er her flere mulige modeller, men den mest realistiske skønnes at svare til følgende kurve:

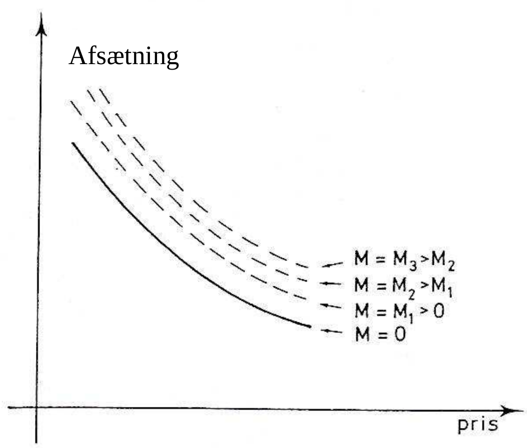


Fig. 4.3.4

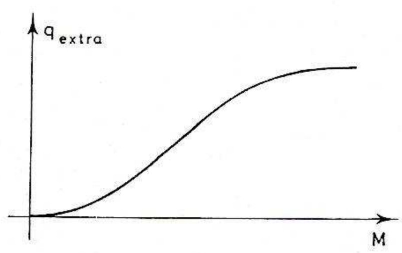


Fig. 4.3.5

På figur 4.3.5 ses en model for q_{extra} som funktion af M, der minder om en logistisk funktion. Denne model bygger på den formodning, at reklameindsatsen M skal op på en vis størrelse før der kan registreres en effekt på afsætningen, samt at der optræder en "mætning" i reklamens betydning for afsætningen.
I denne model antages det (jfr. figur 4.3.4), at q_{extra} er den samme (for en given reklameindsats) uanset prisens størrelse, dvs.

$$q_{ialt} = q(p) + q_{extra}(M).$$

Hvis man derimod mener, at afsætningen forøges med en bestemt faktor, som afhænger af reklameindsatsen, så må man gange q(p) med et led af typen $f_{extra}(M)$, hvormed vi får:

$$q_{ialt} = q(p) \cdot f_{extra}(M)$$

hvor der om multiplikationsfaktoren f_{extra} gælder, at: $f_{extra}(0) = 1$ og $f_{extra}(M)$ kan beskrives ved en logistisk vækstfunktion.
Næste skridt i modelleringen er at få sat værdier på alle de indgående parametre/størrelser i beskrivelsen, men vi vil stoppe her med denne mere overordnede beskrivelse af modeldannelsen. ♥

Andre økonomisk, behavioristiske emner.

Eksempel 4.3.26.
I dette eksempel betragtes effektiviteten af en medarbejder i en virksomhed. Medarbejderen fremstiller produktet P. Vi vil tænke os, at der enten er tale om en ny medarbejder eller et nyt produkt – eller evt. begge dele. Til at begynde med er effektiviteten mindre god, men p.gr.a. indlæring forøges effektiviteten, hvormed den anvendte tid T pr. enhed af P aftager. Ved den optimalt opnåelige effektivitet er tidsforbruget T_{opt} pr. enhed. (Tiderne kan f.eks. måles i minutter)
Almindeligvis vil det være sådan, at jo tættere medarbejderen kommer på den optimale tid, desto vanskeligere bliver det at forbedre effektiviteten. Vi lader x betegne det antal enheder af P, som medarbejderen i alt har produceret, og T(x) betegne den tid, der anvendes til produktion af den næste enhed, når medarbejderen allerede har produceret x enheder.
For en lille tilvækst i antallet Δx kan vi med rimelighed antage, at tilvæksten ΔT i T(x) tilnærmelsesvist er proportional med såvel $T(x) - T_{opt}$, dvs. med forskellen mellem den faktisk anvendte tid og den optimale tid, som med Δx.
At vi kan tale om en lille tilvækst i antallet Δx skyldes – som omtalt i indledningen til afsnittet om økonomisk, behavioristiske emner –, at vi vil tillade os at arbejde med en kontinuert opfattelse af de variable og med en differentiabel ("glat") funktion.
Der gælder således:

$$\Delta T \approx -s\cdot(T(x) - T_{opt})\cdot\Delta x$$

hvor s er en positiv konstant, der fortæller noget om medarbejderens indlæringshastighed. Minusset foran s'et er medtaget, idet ΔT er negativ, idet T(x) aftager. (Bemærk, at $T(x) > T_{opt}$ og $\Delta x > 0$).
Ved at dividere med Δx, og ved at bemærke, at Δx er lille (dvs. ved at lade Δx gå mod 0), får vi:

$$T'(x) = -s\cdot(T(x) - T_{opt})$$

Ifølge sætning 3.6.6 og eksempel 3.6.7 har vi nu, at:

$$T(x) = T_{opt} + (T(0) - T_{opt})\cdot e^{-sx}$$

hvor T(0) er den tid medarbejderen bruger ved produktionen af den første enhed.

Grafen for T(x) ser ud som vist på følgende figur 4.3.6:

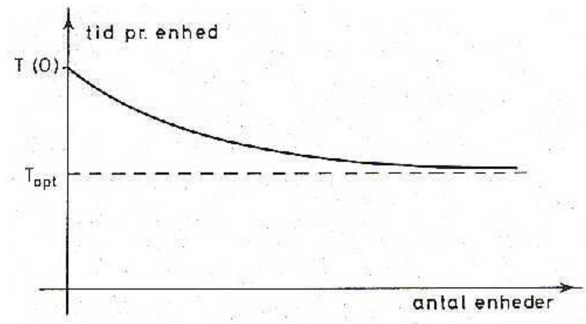


Fig. 4.3.6

Af såvel funktionsforskriften som grafen for T(x) fremgår, at: $T(x) \to T_{opt}$ for $x \to \infty$.
(Kommentér dette !)

Det har for en gennemsnitssyerske på en tøjfabrik, der laver kvaliteteskjorter, vist sig, at T(0) = 45 minutter pr. enhed, at T(20) = 38 minutter pr. enhed samt at T_{opt} = 30 minutter pr. enhed.
Herud fra finder vi, at: $T(x) = 30 + 15 \cdot e^{-0{,}03143 \cdot x}$
Det overlades som en øvelse til læseren at kontrollere denne udregning, og at tegne grafen for T(x).
Hvis vi vil beregne den samlede tid anvendt til produktionen af de 25 første skjorter, så kan beregningen gennemføres således (kontrollér) (idet vi betragter T(x) som en kontinuert model):

$$T_{\text{ialt,25 stk.}} = \int_0^{25} T(x)\,dx = \int_0^{25} (30 + 15 \cdot e^{-0{,}03143 \cdot x})\,dx$$

$$= \left[30x + 15 \cdot e^{-0{,}03143x} \cdot \frac{1}{-0{,}03143} \right]_0^{25} = 1010$$

Den samlede tid ved produktion af de 25 første skjorter er altså ca. 1010 minutter. ♥

<u>Øvelse 4.3.27.</u>
Beregn hvor mange skjorter syersken i eksempel 4.3.26 skal have produceret, før nedgangen i tiden pr. enhed er mindre end 1/3 minut.
(*Vejledning*: Benyt differentialkvotienten af T(x) til beregningen/vurderingen, men kontrollér resultatet ved beregning af relevante funktionsværdier. Kommentér metoden). ♥

<u>Øvelse 4.3.28.</u>
Produktionstiden PT pr. enhed for en ny medarbejder i en virksomheds samleafdeling kan beskrives ved en funktion af typen:

$$PT(x) = c + b \cdot e^{-a \cdot x}$$

hvor a, b og c er positive konstanter, og hvor x er antal enheder, som medarbejderen har produceret. Produktionstiden for den første enhed er 36 min., og produktionstiden for den 21. enhed (dvs. efter 20 enheder) er 30 min. Efter lang tids træning forventes medarbejderens produktionstid at falde til 20 min. pr. enhed.

a) Bestem værdierne af a, b og c
b) Skitsér grafen for PT
c) Efter hvor mange enheder kommer produktionstiden pr. enhed under 25 minutter ?
d) Bestem den samlede produktionstid for de 50 første enheder. ♥

Eksempel 4.3.29.
Virksomheden ”Cleanpaper” markedsfører en ny type miljøvenlige køkkenruller. Virksomheden regner med at kunne erobre en vis del af markedet, således at det solgte antal køkkenruller s(t) pr. dag efter en kortere eller længere indtrængningsperiode når op på værdien M, hvor markedet må siges at være mættet. Det er klart, at salget pr. dag vokser mest ”frit” (uhindret) i begyndelsen (i tiden efter lanceringen på markedet), men at væksten i salget pr. dag efterhånden bremses op, jo tættere salget kommer på mætningsværdien M.
Vi kan derfor med rimelighed antage, at hvis Δt er et ”lille” tidsinterval, så er forøgelsen Δs i salget pr. dag tilnærmelsesvist proportional med både det aktuelle salgstal pr. dag, med afstanden til mætningen, og med Δt, dvs.

$$\Delta s \approx c \cdot s(t) \cdot (M - s(t)) \cdot \Delta t$$

hvor c er proportionalitetsfaktoren. (Overvej rimeligheden af disse antagelser !!).
Ved at dividere med Δt på begge sider af lighedstegnet og udnytte, at Δt er lille, får vi i alt, at salgstallet pr. dag opfylder følgende ligning:

$$s'(t) = c \cdot s(t) \cdot (M - s(t))$$

Ifølge sætning 3.6.9 findes en positiv konstant, som vi hér kalder b, idet c er ”optaget”, således at:

Salget s(t) pr. dag, hvor t er tiden efter introduktionen på markedet, opfylder ligningen:

$$s(t) = \frac{M}{1 + b \cdot e^{-cMt}}$$

hvor M er den forventede mætningsværdi for produktet på markedet, og hvor c er en konstant som fortæller noget om produktets indtrængningshastighed på markedet.
Salgstallet pr. dag kan altså beskrives ved en logistisk vækstfunktion.
I en sådan model taler man ofte om en <u>introduktionsfase</u>, en <u>vækstfase</u> og en <u>mætningsfase</u> svarende til hhv. den første, den midterste og den sidste del af kurven. ♥

Øvelse 4.3.30.
Belært af erfaringer med indtrængningshastigheder på markedet for andre produkter estimerer virksomheden Cleanpaper i eksempel 4.3.29, at cM = 0,04. Det viste sig desuden, at der i begyndelsen blev solgt 1000 stk. pr. dag, samt at der efter 50 dage blev solgt ca. 3300 stk. pr. dag.
a) Bestem værdierne af konstanterne M og b i modellen.
b) Skitsér grafen for $s(t)$, $t \in [0;150]$

Cleanpaper definerer deres introduktionsfase til at vare indtil det daglige salg er forøget med 50% af begyndelsesværdien, og de definerer deres mætningsfase til at starte, når det daglige salg er oppe på 90 % af mætningsværdien.
c) Beregn hvor lang tid introduktionsfasen og vækstfasen varer for de betragtede køkkenruller.♥

Eksempel 4.3.31.
En virksomhed markedsfører en ny type vaskepulver og regner med, at det solgte antal kg S(t) pr. dag tilnærmelsesvist kan beskrives ved en logistisk vækstfunktion:

$$S(t) = \frac{a}{1 + b \cdot e^{ct}}$$

hvor a, b og c er de konstanter, der fastlægger modellen. (Bemærk, at a = M, b = c og c = – kM i sætning 3.6.9, men som bekendt kan man navngive sine konstanter og variable, som man vil).

Virksomheden estimerer på baggrund af en markedsanalyse og tidligere erfaringer, at det nye produkt efterhånden kan erobre en markedsandel, som svarer til en afsætning på ca. 5000 kg pr. dag. I begyndelsen blev der solgt ca. 1000 kg pr. dag, og efter 40 dage blev der solgt ca. 2100 kg pr. dag. Ud fra disse informationer kan parametrene a, b og c fastlægges på følgende måde:

Da S(t) er en logistisk vækstfunktion har vi (jfr. sætning 3.6.12), at $S(t) \to a$ for $t \to \infty$. Dette giver os, at a = 5000. Og da S(0) = 1000 ser vi (jfr. sætning 3.6.12), at b = 4. Endelig kan c bestemmes af s(40) = 2100, idet c er den eneste ubekendte i ligningen: $2100 = \dfrac{5000}{1+4\cdot e^{c\cdot 40}}$.

Vi finder (kontrollér), at c = – 0,02659, hvormed vi i alt ser, at:

$$S(t) = \frac{5000}{1+4\cdot e^{-0,02659\cdot t}}$$

Grafen for S er vist på følgende figur:

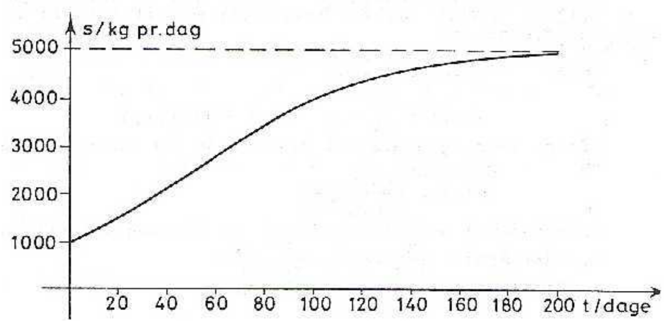


Fig. 4.3.7

Hvis vi ønsker at finde det samlede salg i løbet af de første 60 dage, så beregner vi:

$$\int_0^{60} S(t)\,dt = \int_0^{60} \frac{5000}{1+4\cdot e^{-0,02659\cdot t}}\,dt$$

For at udregne dette integrale anvendes sætning 3.6.14. Vi skal imidlertid først bestemme størrelsen k, som indgår i sætning 3.6.14. Men da kM = 0,02659 og M = a = 5000 ser vi, at $k = 5,318\cdot 10^{-6}$. Ifølge sætning 3.6.14 får vi nu (kontrollér):

$$\int_0^{60} S(t)\,dt = \int_0^{60} \frac{5000}{1+4\cdot e^{-0,02659\cdot t}}\,dt = \left[\frac{1}{5,318\cdot 10^{-6}}\cdot \ln(e^{0,02659\cdot t}+4)\right]_0^{60} = 109.066$$

Ifølge modellen sælges der altså ca. 109.000 kg i løbet af de første 60 dage. ♥

Øvelse 4.3.32.

Betragt salget af vaskepulver i eksempel 4.3.31

a) Forklar, at S′(t) er den hastighed, hvormed det daglige salg forøges.

b) Vis, at efter 40 dage forøges det daglige salg med ca. 32,4 kg pr. dag ♥

Øvelse 4.3.33.

Bestem det samlede salg i løbet af de første 80 dage i øvelse 4.3.30 (Jfr. eksempel 4.3.31). ♥

Kap. 5: Grænsebetragtninger og asymptotiske forhold for logaritme-, eksponential- og potensfunktioner.

5.1. Grundlæggende egenskaber.

I kapitel 1 har vi allerede omtalt en række grundlæggende egenskaber i forbindelse med grænsebetragtninger. Disse opsummeres og suppleres i den følgende sætning.
Læseren opfordres indtrængende til at lave "små" figurer, der skitserer de beskrevne situationer.
(Der kan hentes inspiration ved figurerne i kapitel 1, afsnit 1, 3, 4 og 6)

Sætning 5.1.1.

1) For en vilkårlig voksende logaritmefunktion $\log_c$ gælder, at:
$$\log_c(x) \to -\infty \quad \text{for} \quad x \to 0+ \qquad \text{og} \qquad \log_c(x) \to \infty \quad \text{for} \quad x \to \infty$$
Dette gælder således også for ln og for log

2) For en eksponentiel vækstfunktion $b \cdot a^x$ har vi:
Hvis $a > 1$, dvs. hvis $b \cdot a^x$ er voksende, så gælder der at:
$$b \cdot a^x \to \infty \quad \text{for} \quad x \to \infty \qquad \text{og} \qquad b \cdot a^x \to 0 \quad \text{for} \quad x \to -\infty$$
Hvis $0 < a < 1$, dvs. hvis $b \cdot a^x$ er aftagende, så gælder der at:
$$b \cdot a^x \to 0 \quad \text{for} \quad x \to \infty \qquad \text{og} \qquad b \cdot a^x \to \infty \quad \text{for} \quad x \to -\infty$$

3) For en eksponentiel vækstfunktion $b \cdot e^{kx}$ har vi:
Hvis $k > 0$, dvs. hvis $b \cdot e^{kx}$ er voksende, så gælder der at:
$$b \cdot e^{kx} \to \infty \quad \text{for} \quad x \to \infty \qquad \text{og} \qquad b \cdot e^{kx} \to 0 \quad \text{for} \quad x \to -\infty$$
Hvis $k < 0$, dvs. hvis $b \cdot e^{kx}$ er aftagende, så gælder der at:
$$b \cdot e^{kx} \to 0 \quad \text{for} \quad x \to \infty \qquad \text{og} \qquad b \cdot e^{kx} \to \infty \quad \text{for} \quad x \to -\infty$$

4) For en potentiel vækstfunktion $b \cdot x^r$ har vi:
Hvis $r > 0$, dvs. hvis $b \cdot x^r$ er voksende, så gælder der:
$$b \cdot x^r \to \infty \quad \text{for} \quad x \to \infty \qquad \text{og} \qquad b \cdot x^r \to 0 \quad \text{for} \quad x \to 0+$$
Hvis $r < 0$, dvs. hvis $b \cdot x^r$ er aftagende, så gælder der:
$$b \cdot x^r \to 0 \quad \text{for} \quad x \to \infty \qquad \text{og} \qquad b \cdot x^r \to \infty \quad \text{for} \quad x \to 0+$$

Bevis:
Ad 1): Ifølge sætning 1.1.5 har vi, at $Dm(\log_c) = R_+$ og $Vm(\log_c) = R$. Kombineres denne information med forudsætningen om, at $\log_c$ er voksende (dvs. at $c > 1$, jfr. sætning 1.1.8), fremkommer det anførte resultat (overvej dette nærmere !).

Ad 2): Da en eksponentiel vækstfunktion blot er en eksponentialfunktion med en positiv konstant b ganget på, fremkommer det anførte resultat direkte af sætning 1.3.2 pkt. 7).

Ad 3): Da $b \cdot e^{kx}$ blot er en anden måde at skrive $b \cdot a^x$ på, fremkommer det anførte resultat direkte af pkt. 2, samt af sætning 1.4.6.

Ad 4): Ifølge definition 1.6.1 og sætning 1.6.4 1) har vi, at $Dm(x^r) = R_+$ og $Vm(x^r) = R_+$. Kombineres denne information med sætning 1.6.4 2) og med det faktum, at b blot er en positiv konstant ganget på, fremkommer det anførte resultat. (Overvej !!!).
Hermed er sætningen bevist. ♥

Øvelse 5.1.2.
Undersøg følgende funktioners grænseforhold (erstat spørgsmålstegnet med det korrekte svar):

a) $12e^{-4x} \to ?$ for $x \to \infty$ b) $12e^{-4x} \to ?$ for $x \to -\infty$

c) $\ln x \cdot e^{2x} \to ?$ for $x \to 0+$ d) $\ln x \cdot e^{2x} \to ?$ for $x \to \infty$

e) $x^{1,4} - e^{-x} \to ?$ for $x \to \infty$ f) $x^{1,4} - e^{-x} \to ?$ for $x \to 0+$

g) $\dfrac{50000000}{1,3^x} \to ?$ for $x \to \infty$ h) $3000 - 2,4^x \to ?$ for $x \to \infty$

i) $3^x - 3^{3x} \to ?$ for $x \to \infty$ ♥

I forlængelse af øvelse 5.1.2 kan det bemærkes, at hvis vi f.eks. vil undersøge, hvad der sker med funktionen $f(x) = \dfrac{x^{2,3}}{1,89^x}$ for x gående mod uendelig, så har vi et problem, idet $x^{2,3} \to \infty$ for $x \to \infty$ og $1,89^x \to \infty$ for $x \to \infty$, dvs. både tæller og nævner i brøken går mod uendelig, og hvad går så hele brøken imod. For at illustrere, at der ikke er noget generelt svar på dette spørgsmål, anføres det følgende eksempel 5.1.3. Og i det næste afsnit indføres nogle begreber og vises nogle sætninger, som bl.a. kan give svaret i den konkrete situation.

Eksempel 5.1.3.
Formålet med dette eksempel er at demonstrere, at der <u>ikke</u> findes nogen generel regel for, hvad en brøk går imod, når dens tæller og nævner hver for sig og samtidig går mod uendelig:

a) Lad $f(x) = x^5$ og $g(x) = x^3$. Vi ser da, at $f(x) \to \infty$ for $x \to \infty$ og $g(x) \to \infty$ for $x \to \infty$.
Da $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{x^5}{x^3} = x^2$ ser vi at: $\dfrac{f(x)}{g(x)} \to \infty$ for $x \to \infty$.

b) Lad $f(x) = x^2$ og $g(x) = x^6$. Vi ser da, at $f(x) \to \infty$ for $x \to \infty$ og $g(x) \to \infty$ for $x \to \infty$.
Da $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{x^2}{x^6} = \dfrac{1}{x^4}$ ser vi at: $\dfrac{f(x)}{g(x)} \to 0$ for $x \to \infty$.

c) Lad $f(x) = 5x^3$ og $g(x) = 17x^3$. Vi ser da, at $f(x) \to \infty$ for $x \to \infty$ og $g(x) \to \infty$ for $x \to \infty$.
Da $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{5x^3}{17x^3} = \dfrac{5}{17}$ ser vi at: $\dfrac{f(x)}{g(x)} \to \dfrac{5}{17}$ for $x \to \infty$.

Vi har altså i alle tre tilfælde to funktioner, som går imod uendelig for x gående mod uendelig, men brøken imellem de to funktioner går henholdvis mod uendelig, nul og $\frac{5}{17}$ ♥

5.2. At gå hurtigst mod uendelig.

Definition 5.2.1.

Lad f og g være to funktioner, som opfylder, at $f(x) \to \infty$ for $x \to \infty$ og $g(x) \to \infty$ for $x \to \infty$

1) Vi siger, at f(x) går hurtigere mod uendelig end g(x), hvis

$$\frac{f(x)}{g(x)} \to \infty \quad \text{for} \quad x \to \infty$$

2) Vi siger, at f(x) og g(x) går lige hurtigt mod uendelig, hvis der findes en konstant c, så

$$\frac{f(x)}{g(x)} \to c \quad \text{for} \quad x \to \infty$$

3) Vi siger, at f(x) går langsommere mod uendelig end g(x), hvis

$$\frac{f(x)}{g(x)} \to 0 \quad \text{for} \quad x \to \infty$$

Vedrørende logaritmefunktioners indbydes forhold, eksponentialfunktioners indbyrdes forhold og potensfunktioners indbyrdes forhold gælder følgende sætning:

Sætning 5.2.2.

1) To vilkårlige voksende logaritmefunktioner $\log_c$ og $\log_d$ går lige hurtigt mod uendeligt.

2) Om to vilkårlige, voksende eksponentialfunktioner a^x og d^x gælder:
- Hvis $a > d$, så går a^x hurtigere mod uendelig end d^x
- Hvis $a = d$, så går a^x og d^x lige hurtigt mod uendelig
- Hvis $a < d$, så går a^x langsommere mod uendelig end d^x

3) Om to vilkårlige, voksende potensfunktioner x^r og x^q gælder:
- Hvis $r > q$, så går x^r hurtigere mod uendelig end x^q
- Hvis $r = q$, så går x^r og x^q lige hurtigt mod uendelig
- Hvis $r < q$, så går x^r langsommere mod uendelig end x^q

Beviset for denne sætning bygger direkte på kombination af sætning 1.1.8, sætning 1.2.7 2) og 5), sætning 5.1.1 og definition 5.2.1, og det overlades til læseren som en øvelse.

Når vi derimod blander de tre funktionstyper, bliver situationen straks vanskeligere. Vi får her brug for følgende hjælpesætning, inden vi kan bevise den gældende sætning.

Sætning 5.2.3. *(Hjælpesætning til beviset for sætning 5.2.4)*

For alle $x \in R_+$ gælder der, at: $\dfrac{\ln x}{x} < \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, hvoraf vi ser, at $\dfrac{\ln x}{x} \to 0$ for $x \to \infty$

Bevis:

Betragt funktionen $f(x) = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$, Vi ser, at Dm(f) = R_+, samt at $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x}\cdot\sqrt{x} - \ln x\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x})^2}$,

hvilket kan reduceres til: $f'(x) = \dfrac{2-\ln x}{2x\sqrt{x}}$. Af fortegnsvariationen for f' ses (kontrollér), at f har maximum i $x = e^2$, samt at dette maximum er $f(e^2) = \frac{2}{e} = 0{,}7358$. Specielt ser vi altså, at f(x) < 1 for alle x > 0, dvs. $\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}} < 1$ for alle x > 0. Ved at dividere med $\sqrt{x}$ (som er positiv) på begge sider af ulighedstegnet får vi det ønskede.

Da $\sqrt{x} \to \infty$ for $x \to \infty$, ser vi, at $\dfrac{1}{\sqrt{x}} \to 0$ for $x \to \infty$. Da $0 < \dfrac{\ln x}{x} < \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ for alle x > 1 får vi hermed, at $\dfrac{\ln x}{x} \to 0$ for $x \to \infty$, hvormed sætningen er bevist. ♥

<u>**Sætning 5.2.4.**</u>

1) For alle a > 1 og alle r > 0 gælder: $\dfrac{a^x}{x^r} \to \infty$ for $x \to \infty$

dvs. enhver voksende eksponentialfunktion går hurtigere mod uendelig end enhver voksende potensfunktion.

2) For alle r > 0 og alle c > 1 gælder: $\dfrac{x^r}{\log_c x} \to \infty$ for $x \to \infty$

dvs. enhver voksende potensfunktion går hurtigere mod uendelig end enhver voksende logaritmefunktion.

3) For alle a > 1 og alle c > 1 gælder: $\dfrac{a^x}{\log_c x} \to \infty$ for $x \to \infty$

dvs. enhver voksende eksponentialfunktion går hurtigere mod uendelig end enhver voksende logaritmefunktion.

Bevis:
Vi starter med at bevise pkt. 2), og vi starter med at se på logaritmefunktionen ln.

Ifølge sætning 5.2.3 gælder der, at $\dfrac{\ln t}{t} \to 0$ for $t \to \infty$, hvor vi kalder den variable t i stedet for x.

Hvis vi sætter $t = x^r$, så har vi: $t \to \infty \Leftrightarrow x \to \infty$, hvormed vi ser, at: $\dfrac{\ln(x^r)}{x^r} \to 0$ for $x \to \infty$.

Da $\ln(x^r) = r\cdot\ln x$, er $\dfrac{\ln x}{x^r} = \dfrac{1}{r}\cdot\dfrac{\ln(x^r)}{x^r}$, hvormed vi i alt får (overvej!), at: $\dfrac{\ln x}{x^r} \to 0$ for $x \to \infty$

Da både x^r og lnx er positive, når x går mod uendelig (faktisk når x > 1), er dette det samme som at $\dfrac{x^r}{\ln x} \to \infty$ for $x \to \infty$, hvormed det ønskede er bevist for ln.

Hvis vi nu ser på $\log_c$ i stedet for ln, så har vi ifølge sætning 1.1.9, at $\log_c x = \frac{1}{\ln c} \cdot \ln x$, hvormed vi får, at: $\frac{x^r}{\log_c x} = \ln c \cdot \frac{x^r}{\ln x}$.

Da lnc > 0, idet c > 1, får vi direkte af: $\frac{x^r}{\ln x} \to \infty$ for $x \to \infty$, at $\frac{x^r}{\log_c x} \to \infty$ for $x \to \infty$.

<u>Ad 1):</u>

Af bevistekniske årsager sætter vi: $g(x) = \frac{a^x}{x^r}$, og vi ser først på ln(g(x)). Vi har:

$$\ln(g(x)) = \ln(a^x) - \ln(x^r) = x \cdot \ln a - r \cdot \ln x = x \cdot \left(\ln a - r \cdot \frac{\ln x}{x} \right)$$

Ifølge sætning 5.2.3 går parentesen i dette udtryk mod lna, og da a > 1 – og dermed lna > 0 – ser vi, at $\ln(g(x)) \to \infty$ for $x \to \infty$.

Da $e^s \to \infty$ for $s \to \infty$ ser vi ved at sætte s = ln(g(x)), at $e^{\ln(g(x))} \to \infty$ for $x \to \infty$.

Og da $e^{\ln(g(x))} = g(x) = \frac{a^x}{x^r}$ ser vi, at $\frac{a^x}{x^r} \to \infty$ for $x \to \infty$, hvormed det ønskede er bevist.

<u>Ad 3):</u>
Denne regel er en direkte konsekvens af pkt. 1) og 2). Det er indlysende , at hvis a^x går hurtigere mod uendelig end x^r og x^r går hurtigere mod uendelig end $\log_c x$, så må a^x gå hurtigere mod uendelig end $\log_c x$. Beviset er da også ganske simpelt og bygger på 1) og 2) idet vi <u>f.eks.</u> har, at:

$\frac{a^x}{\log_c x} = \frac{a^x}{x^2} \cdot \frac{x^2}{\log_c x}$, og da $\frac{a^x}{x^2} \to \infty$ for $x \to \infty$ og $\frac{x^2}{\log_c x} \to \infty$ for $x \to \infty$, fås det ønskede.

Hermed er sætningen bevist. ♥

Bemærk, at der altså er en slags ”hierarki” i de betragtede funktioner, idet eksponentialfunktioner går hurtigere mod uendelig end potensfunktioner, som igen går hurtigere mod uendelig end logaritmefunktioner.

Bemærk desuden, at hvis vi i sætning 5.2.4 ”vender brøkerne om” så får vi, at $\frac{x^r}{a^x} \to 0$ for $x \to \infty$, dvs. at enhver voksende potensfunktion går langsommere mod uendeligt end enhver voksende eksponentialfunktion – og tilsvarende med de øvrige.

<u>Øvelse 5.2.5.</u>

a) Skitser graferne for funktionerne $f(x) = 0{,}03 \cdot e^{0{,}01x}$ og $g(x) = 5000 \cdot x^5$ i samme koordinatsystem.
Undersøg brøken $\frac{f(x)}{g(x)}$ for x gående mod uendelig, og kommentér resultatet.

b) Skitser graferne for funktionerne $f(x) = 300 \cdot \ln x$ og $g(x) = 0{,}004 \cdot x^{0{,}002}$ i samme koordinatsystem.
Undersøg brøken $\frac{f(x)}{g(x)}$ for x gående mod uendelig, og kommentér resultatet. ♥

I forlængelse af sætning 5.2.4 anføres følgende sætning om nogle specielle grænseværdier, hvis bevis anvender reglerne i sætning 5.2.4:

Sætning 5.2.6.

1) Hvis r > 0 og c > 1, gælder der, at:
$x^r \cdot \log_c x \to 0$ for $x \to 0+$ og specielt $x^r \cdot \ln x \to 0$ for $x \to 0+$

2) Hvis 0 < a < 1, så gælder for ethvert $r \in R$, at: $x^r \cdot a^x \to 0$ for $x \to \infty$

Bevis:

Ad 1): Som omtalt kan pkt. 2) i sætning 5.2.4 også anføres således: $\frac{\log_c t}{t^r} \to 0$ for $t \to \infty$, (hvor den variable kaldes t i stedet for x). Hvis vi sætter $t = \frac{1}{x}$, så har vi, at: $x \to 0+ \Leftrightarrow t \to \infty$.

Kombineres dette får vi: $\frac{\log_c(\frac{1}{x})}{(\frac{1}{x})^r} \to 0$ for $x \to 0+$.

Da $\frac{\log_c(\frac{1}{x})}{(\frac{1}{x})^r} = \frac{\log_c 1 - \log_c x}{\frac{1}{x^r}} = -x^r \cdot \log_c x$, ser vi alt i alt, at: $x^r \cdot \log_c x \to 0$ for $x \to 0+$

Ad 2): Sæt $q = \frac{1}{a}$ og dermed $a = \frac{1}{q}$. Vi har da, at: $x^r \cdot a^x = x^r \cdot \left(\frac{1}{q}\right)^x = \frac{x^r}{q^x}$

Da q > 1 (idet 0< a<1) får vi ifølge sætning 5.2.4 1), at hvis r > 0, så gælder: $\frac{x^r}{q^x} \to 0$ for $x \to \infty$

Hvis r = 0, så er $x^r = 1$, og da $q^x \to \infty$ for $x \to \infty$ har vi også her, at: $\frac{x^r}{q^x} \to 0$ for $x \to \infty$

Hvis endelig r < 0, så har vi, at: $x^r \to 0$ for $x \to \infty$, samtidig med at $q^x \to \infty$ for $x \to \infty$, så også i denne situation får vi, at: $\frac{x^r}{q^x} \to 0$ for $x \to \infty$.

Da $x^r \cdot a^x = \frac{x^r}{q^x}$ er sætningen hermed bevist. ♥

Øvelse 5.2.7.

a) Skitser graferne for funktionerne: $f(x) = 1000000 \cdot x^{10}$ og $g(x) = 40000 \cdot 0{,}9^x$.
Undersøg f(x)·g(x) for x gående mod uendelig – og kommentér resultatet.
b) Skitser graferne for funktionerne: f(x) = 20·lnx og g(x) = 0,5x
Undersøg f(x)·g(x) for x gående mod nul fra højre – og kommentér resultatet. ♥

Øvelse 5.2.8.

Argumentér for, at der for ethvert $r \in R$ og ethvert $k \in R_+$ gælder, at: $x^r \cdot e^{-kx} \to 0$ for $x \to \infty$ ♥

5.3. Asymptotiske forhold.

En asymptote for en funktion er en linie, som funktionens graf nærmer sig til, når man "bevæger sig uendeligt langt væk". Vi siger, at linien er asymptote til grafen for f, eller kort: at linien er asymptote for f. Der er tre typer af asymptoter: vandrette, lodrette og skrå.

En vandret asymptote er en linie med ligningen: $y = k$. Da vi f.eks. har, at $e^x \to 0$ for $x \to -\infty$, er linien med ligningen: $y = 0$ (dvs. 1.aksen) asymptote for e^x.
Generelt gælder der, at 1.aksen er vandret asymptote for enhver ekspontialfunktion og dermed enhver eksponentiel vækstfunktion, samt for enhver aftagende potensfunktion og dermed aftagende potentiel vækstfunktion (dvs. $b \cdot x^r$, hvor $r < 0$), hvorimod ingen logaritmefunktion har en vandret asymptotet (forklar disse ting nærmere !).

En lodret asymptote er en linie med ligningen: $x = k$. I forbindelse med logaritme-, eksponential- og potensfunktioner har vi en lodret asymptote med ligningen $x = 0$ (dvs. 2.aksen) for alle logaritmefunktioner og for alle aftagende potensfunktioner (dvs. x^r, hvor $r < 0$), hvorimod ingen eksponentielle vækstfunktioner har en lodret asymptote. (Forklar disse ting nærmere !).

En skrå asymptote er en linie med ligningen: $y = cx + d$ ($c \neq 0$). Betingelsen for, at en funktion f har en skrå asymptote med ligningen $y = cx + d$ er, at:

$$f(x) - (cx + d) \to 0 \text{ for } x \to \infty \qquad \text{eller} \qquad f(x) - (cx + d) \to 0 \text{ for } x \to -\infty$$

(Det kan altså enten være en skrå asymptote i den ene ende eller i den anden ende – eller evt. i begge ender, men i sidstnævnte tilfælde har de ikke nødvendigvis samme ligning).

Eksempel 5.3.1.

Betragt funktionen $f(x) = 2x - 5 + \dfrac{\sqrt{x}}{2^x}$. Da $f(x) - (2x - 5) = \dfrac{\sqrt{x}}{2^x}$ ser vi ifølge sætning 5.2.4 1), at $f(x) - (2x - 5) \to 0$ for $x \to \infty$, hvormed linien med ligningen $y = 2x - 5$ er skrå asymptote for f. ♥

I forbindelse med skrå asymptoter gælder der følgende sætning, som i denne sammenhæng er medtaget som en "hjælpesætning" for den efterfølgende sætning.

Sætning 5.3.2.

1) Hvis en funktion f har en skrå asymptote for $x \to \infty$, så gælder der:

$$f(x) \to \infty \text{ for } x \to \infty \qquad \text{eller} \qquad f(x) \to -\infty \text{ for } x \to \infty$$

Hvis en funktion f har en skrå asymptote for $x \to -\infty$, så gælder der:

$$f(x) \to \infty \text{ for } x \to -\infty \qquad \text{eller} \qquad f(x) \to -\infty \text{ for } x \to -\infty$$

2) Hvis en funktion f har en skrå asymptote med ligningen: $y = cx + d$, så er følgende opfyldt:

Hvis $f(x) - (cx + d) \to 0$ for $x \to \infty$ så gælder der: $\dfrac{f(x)}{cx + d} \to 1$ for $x \to \infty$

og tilsvarende:

Hvis $f(x) - (cx + d) \to 0$ for $x \to -\infty$ så gælder der: $\dfrac{f(x)}{cx + d} \to 1$ for $x \to -\infty$

Bevis: Ad 1): Lad y = cx + d ($c \neq 0$) være asymptote for funktionen f.
Der er da fire muligheder: a) c > 0 og asymptoten er for $x \to \infty$, b) c < 0 og asymptoten er for $x \to \infty$, c) c > 0 og asymptoten er for $x \to -\infty$, d) c < 0 asymptoten er for $x \to -\infty$.
Beviset forløber ens i alle fire tilfælde, så vi nøjes med at se på et af dem, f.eks. d).
Da y = cx + d er asymptote for f, ved vi, at $f(x) - (cx + d) \to 0$ for $x \to -\infty$, og da c < 0 ved vi også (overvej !), at $cx + d \to \infty$ for $x \to -\infty$. Heraf følger, at $f(x) \to \infty$ for $x \to -\infty$.
Ad 2): Beviset for x gående mod uendelig og beviset for x gående mod minus uendelig forløber helt ens, så vi nøjes med at vise den første af dem. Da $|cx+d| \to \infty$ for $x \to \infty$ har vi følgende:

$$f(x) - (cx + d) \to 0 \ \text{for}\ x \to \infty \quad \Rightarrow \quad \frac{f(x)-(cx+d)}{cx+d} \to 0 \ \text{for}\ x \to \infty \quad \Rightarrow$$

$$\frac{f(x)}{cx+d} - 1 \to 0 \ \text{for}\ x \to \infty \quad \Rightarrow \quad \frac{f(x)}{cx+d} \to 1 \ \text{for}\ x \to \infty$$

Hermed er sætningen bevist. ♥

Vi er nu i stand til at opstille og bevise følgende sætning (overvej betydningen af sætningen !!)

Sætning 5.3.3.

Ingen logaritme-, eksponential- eller potensfunktion (bortset fra: f(x) = x) har en skrå asymptote.

Bevis:
Beviset føres indirekte ved anvendelse af sætning 5.3.2 og sætning 5.2.4. Vi ser kun på voksende logaritmefunktioner, men sætningen gælder også for aftagende logaritmefunktioner (jfr. figur 1.1.3)
Hvis en logaritmefunktion $\log_a$ med grundtal a (a > 1) skulle have en skrå asymptote med ligningen y = cx + d ($c \neq 0$), så skulle det, idet $Dm(\log_a) = R_+$, være for x gående mod uendelig.

Da $\dfrac{\log_a x}{cx+d} = \dfrac{\log_a x}{x} \cdot \dfrac{1}{c+\frac{d}{x}}$, da $\dfrac{1}{c+\frac{d}{x}} \to \dfrac{1}{c}$ for $x \to \infty$ og da $\dfrac{\log_a x}{x} \to 0$ for $x \to \infty$

(jfr. sætning 5.2.4 pkt. 2)) får vi, at: $\dfrac{\log_a x}{cx+d} \to 0$ for $x \to \infty$, hvilket strider imod, at vi ifølge sætning 5.3.2 skulle vi have, at $\dfrac{\log_a x}{cx+d} \to 1$ for $x \to \infty$. $\log_a$ kan derfor ikke have en skrå asymptote.
Da en eksponentialfunktion a^x (a > 1) opfylder, at $a^x \to 0$ for $x \to -\infty$ (jfr. sætning 5.1.1 2)), kan der ikke være en skrå asymptote for x gående mod minus uendelig (jfr. sætning 5.3.2 1)).
Hvis a^x skulle have en skrå asymptote med ligningen: y = cx + d ($c \neq 0$), skulle det altså være for x gående mod uendelig.

Da $\dfrac{a^x}{cx+d} = \dfrac{a^x}{x} \cdot \dfrac{1}{c+\frac{d}{x}}$, da $\dfrac{1}{c+\frac{d}{x}} \to \dfrac{1}{c}$ for $x \to \infty$ og da $\dfrac{a^x}{x} \to \infty$ for $x \to \infty$

(jfr. sætning 5.2.4 pkt. 1)) får vi, at: $\left|\dfrac{a^x}{cx+d}\right| \to \infty$ for $x \to \infty$. Men ifølge sætning 5.3.2 2)

skulle vi have, at $\dfrac{a^x}{cx+d} \to 1$ for $x \to \infty$. a^x (a > 1) kan derfor ikke have en skrå asymptote.
Resten af sætningen bevises efter samme principper og overlades til læseren som en øvelse. ♥

5.4. Uegentlige integraler.

Der findes tre forskellige typer uegentlige integraler: $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$, $\int_{-\infty}^{b} g(x)\,dx$ og $\int_{-\infty}^{\infty} h(x)\,dx$.

Vi vil her kun beskæftige os med den førstnævnte type, som defineres således:
En funktion f, som er defineret i et interval af typen [a ; ∞ [siges at være uegentlig integrabel i [a; ∞[hvis $\int_a^K f(x)\,dx$ har en grænseværdi for K → ∞. Denne grænseværdi betegnes med: $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$.

Vi har altså: $\boxed{\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{K\to\infty}\left(\int_a^K f(x)\,dx\right)}$

Ofte anvendes sprogbrugen, at $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ er konvergent, når den omtalte grænseværdi eksisterer. I modsat fald siger vi, at det er divergent.

Eksempel 5.4.1.

Funktionen $f(x) = \frac{1}{x^2}$ er integrabel i [1 ; ∞ [, idet

$\int_1^K \frac{1}{x^2}\,dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^K = -\frac{1}{K}+1$, hvoraf vi ser, at:

$\int_1^K \frac{1}{x^2}\,dx \to 1$ for $K \to \infty$, dvs: $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = 1$.

Vi kan hermed tillade os at sige, at det ”uendelige område” under grafen for f svarende til [1 ; ∞ [kan tilskrives det endelige areal 1. (Se figur 5.4.1) ♥

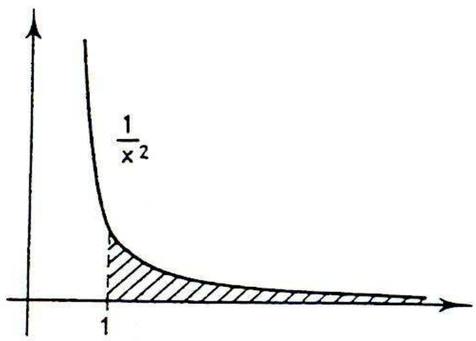


Fig. 5.4.1

Øvelse 5.4.2.

Argumentér for, at funktionen $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ ikke er integrabel i [1 ; ∞ [, dvs. $\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ er divergent.

Tegn en skitse af grafen for g, skravér det relevante område, og kommentér resultatet. ♥

I forbindelse med logaritme-, eksponential- og potensfunktioner gælder følgende sætning:

Sætning 5.4.3.

1) For enhver logaritmefunktion $\log_c$ og ethvert tal a > 0 er $\int_a^{\infty} \log_c(x)\,dx$ divergent.

2) For enhver eksponentiel vækstfunktion $b\cdot e^{kx}$ og ethvert tal $a \in R$ er $\int_a^{\infty} b\cdot e^{kx}\,dx$ konvergent, hvis k < 0, og divergent, hvis k > 0. Hvis k < 0, er: $\int_a^{\infty} b\cdot e^{kx}\,dx = -\frac{b}{k}\cdot e^{ka}$

3) For enhver potentiel vækstfunktion $b\cdot x^r$ og ethvert tal a > 0 er $\int_a^{\infty} b\cdot x^r\,dx$ konvergent, hvis $r < -1$, og divergent, hvis $r \ge -1$. Hvis $r < -1$, er: $\int_a^{\infty} b\cdot x^r\,dx = -\frac{b}{r+1}\cdot a^{r+1}$

Bevis:
Ad 1): Da forskellen mellem $\log_c$ og ln er en konstant, er det nok at vise sætningen for ln.
Vi har: $\int_a^K \ln x \, dx = [x\ln x - x]_a^K = K\cdot(\ln K - 1) - a\cdot(\ln a - 1) \to \infty$ for $K \to \infty$

Ad 2): Vi har: $\int_a^K b\cdot e^{kx}\,dx = \left[b\cdot\frac{1}{k}\cdot e^{kx}\right]_a^K = \frac{b}{k}e^{kK} - \frac{b}{k}e^{ka}$.

Hvis $k < 0$, så har vi: $\frac{b}{k}e^{kK} \to 0$ for $K \to \infty$, hvormed vi ser, at: $\int_a^\infty b\cdot e^{kx}\,dx = -\frac{b}{k}\cdot e^{ka}$

Hvis $k > 0$, så har vi, at $\frac{b}{k}e^{kK} \to \infty$ for $K \to \infty$, hvormed der er divergens.
Ad 3): Beviset følger samme metode som i Ad 2) – og overlades til læseren som en øvelse.
Bemærk, at ved divergensen må der skelnes imellem $r = -1$ og $r > -1$. (Hvorfor mon ?) ♥

Ifølge det foregående ser det ud til, at vi må forvente om en funktion f, at $f(x) \to 0$ for $x \to \infty$, hvis det uegenlige integrale skal være konvergent. (Men som øvelse 5.4.2 viser, er dette ikke tilstrækkeligt til at sikre konvergensen). Hvis vi ser på sætning 5.2.4, kunne det derfor være interessant at undersøge funktionerne $\frac{x^r}{a^x}$ og $\frac{\log_c x}{x^r}$. I denne sammenhæng kan vi bevise følgende sætning, hvor vi for den førstes vedkommende af bevistekniske årsager indskrænker os til at se på $r = n \in N$

Sætning 5.4.4.

1) For ethvert $n \in N$, ethvert $a > 1$ og ethvert $d \in R$ gælder, at $\int_d^\infty \frac{x^n}{a^x}dx$ er konvergent.

2) For ethvert $r > 1$, ethvert $c > 1$ og ethvert $d > 0$ gælder, at $\int_d^\infty \frac{\log_c x}{x^r}dx$ er konvergent.

hvorimod det er divergent, hvis $r \le 1$.

Bevis:
Ad 1): Ved anvendelse af delvis integration og af, at $\frac{-1}{\ln a}a^{-x}$ er en stamfunktion til a^{-x} (kontrollér!) får vi: $\int_d^K \frac{x^n}{a^x}dx = \int_d^K a^{-x}\cdot x^n\,dx = \left[\frac{-1}{\ln a}a^{-x}\cdot x^n\right]_d^K - \int_d^K \frac{-1}{\ln a}a^{-x}\cdot nx^{n-1}\,dx$, dvs.

$$\int_d^K \frac{x^n}{a^x}dx = \frac{-1}{\ln a}\cdot\frac{K^n}{a^K} + \frac{1}{\ln a}\cdot\frac{d^n}{a^d} + \frac{n}{\ln a}\int_d^K \frac{x^{n-1}}{a^x}dx$$

Vi ser altså, at $\int_d^K \frac{x^n}{a^x}dx$ indeholder tre led: en konstant gange $\frac{K^n}{a^K}$, et konstant led og en konstant gange et nyt integrale: $\int_d^K \frac{x^{n-1}}{a^x}dx$, dvs. et integrale af samme type som det vi startede med, bortset fra at eksponenten til x nu er 1 mindre. Ved udregning af dette nye integrale får vi igen tre led af samme type som før, hvor det sidste led er en konstant gange $\int_d^K \frac{x^{n-2}}{a^x}dx$.

Efter n sådanne omskrivninger ender vi med en lang stribe led uden integraltegn samt en konstant gange $\int_d^K \frac{1}{a^x}\,dx$. Leddene uden integraltegn er enten konstanter eller af typen: en konstant gange $\frac{K^m}{a^K}$, hvor m er et helt tal mellem 1 og n. Ifølge sætning 5.2.4 1) går alle disse ikke konstante led mod 0 for K → ∞, så tilbage er kun at undersøge $\int_d^K \frac{1}{a^x}\,dx$ for K → ∞. Vi har:

$$\int_d^K \frac{1}{a^x}\,dx \;=\; \int_d^K a^{-x}\,dx \;=\; \left[\frac{-1}{\ln a}a^{-x}\right]_d^K \;=\; \frac{-1}{\ln a}\cdot\frac{1}{a^K}+\frac{1}{\ln a}\cdot\frac{1}{a^d} \;\to\; \frac{1}{\ln a}\cdot\frac{1}{a^d} \quad \text{for } K\to\infty$$

I alt ser vi da, at for K → ∞ går $\int_d^K \frac{x^n}{a^x}\,dx$ imod en sum af en række konstante led, hvormed det ønskede er bevist.

Ad 2): Se nedenstående øvelse 5.4.6. ♥

Øvelse 5.4.5.

Gennemfør detaljerne i beviset for sætning 5.4.4 1) med n = 3, a = 2 og d = 5 – og bestem værdien af det konvergente uegentlige integrale: $\int_5^\infty \frac{x^3}{2^x}\,dx$ ♥

Øvelse 5.4.6.

Bemærk, at da forskellen mellem $\log_c$ og ln er en konstant, er det nok at vise sætning 5.4.4 2) for ln, samt at der gælder: $\int_d^K \frac{\ln x}{x^r}\,dx = \int_d^K x^{-r}\ln x\,dx$. Vis herefter ved delvis integration, at for r ≠ 1:

$$\int_d^K \frac{\ln x}{x^r}\,dx \;=\; \frac{1}{-r+1}K^{-r+1}\cdot\ln K - \frac{1}{-r+1}d^{-r+1}\cdot\ln d - \left(\frac{1}{-r+1}\right)^2\cdot K^{-r+1} + \left(\frac{1}{-r+1}\right)^2\cdot d^{-r+1}$$

Anvend herefter sætning 5.2.4 2) og sætning 5.1.1 4) til at argumentere for konvergensen, når r > 1 og divergensen, når r < 1.

Anvend endelig integration ved substitution til at vise divergensen i sætning 5.4.4 2) for r = 1. ♥

Bemærk, at vi ifølge sætning 5.2.4 har, at $\frac{\log_c x}{x^r} \to 0$ for x → ∞ blot det forudsættes, at r > 0. Men for at sikre konvergensen af det uegentlige integrale $\int_d^\infty \frac{\log_c x}{x^r}\,dx$ skal vi altså have, at r > 1.

Øvelse 5.4.7.

Udregn værdien af hvert af følgende uegentlige integraler:

a) $\int_5^\infty 20\cdot e^{-0,4x}\,dx$ b) $\int_2^\infty 8\cdot x^{-1,4}\,dx$ c) $\int_7^\infty \frac{x^2}{5^x}\,dx$ d) $\int_1^\infty \frac{\log_2 x}{x^{3,2}}\,dx$ ♥

Kap. 6: Noget om matematik og matematiske modeller

Som helhed betragtet kan matematikken groft taget inddeles i tre kategorier, selv om grænserne imellem disse kategorier er ret flydende:

Kat. 1 : Matematik, som har umiddelbar ”brugsværdi” i andre fag. Denne matematik benyttes ved beskrivelsen af de matematiske modeller.

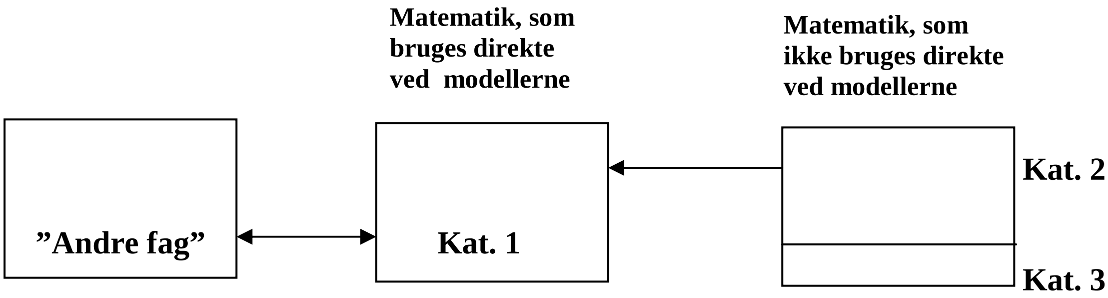
Kat. 2 : Matematik, som ikke har umiddelbar ”brugsværdi” i andre fag, men som er forudsætningen for den matematik, der er omtalt i Kat. 1.
Kat. 2 kan således siges at udgøre fundamentet for Kat.1-matematikken.

Kat. 3 : Matematik, som i særlig grad har teoretisk, filosofisk og erkendelsesmæssig interesse.

Det skal bemærkes, at de under Kat. 1 og Kat. 2 omtalte ”andre fag” omfatter fysik, kemi, astronomi, datalogi, ”teknik”, medicin, biologi, geologi, geografi, økonomi, osv. osv. Ved ”andre fag” forstås altså emneområder, som i vor tid almindeligvis ligger udenfor matematikkens område.

Indplaceringen af et matematisk emne i en af de tre kategorier er en ret kompliceret affære, idet en korrekt indplacering ikke alene kræver fyldestgørende matematiske kundskaber, men også en omfattende indsigt i andre fag. I øvrigt kan et matematisk emnes indplacering i Kat. 2 eller i Kat. 3 udmærket tænkes at være midlertidig, idet der blot endnu ikke er nogen, der har fundet direkte tilknytning for det pågældende emne til andre fag.
Det kan derfor konkluderes, at den omtalte inddeling af matematikken i de tre kategorier mere er af principiel karaktér, og at den således nærmest skal opfattes som et forsøg på en vis systematisering.

Der kan anføres følgende skematiske oversigt til beskrivelse af det ovenstående:



Det samspil, der foregår mellem et emne fra Kat. 1 og det tilknyttede fagområde, kan principielt opdeles i to typer:

a) En ”fagmand” (med kendskab til matematik) søger eller henter hjælp i et matematisk emne.

b) En matematiker (med kendskab til et fag) tilbyder eller giver hjælp til det givne fagområde.

Der kan i begge tilfælde enten være tale om, at det i faget viser sig givtigt at anvende allerede eksisterende matematiske teorier, eller at der opstår ny matematik specielt beregnet på løsning af et fagligt problem.

Den netop omtalte opdeling er imidlertid uden betydning for det principielle i en matematisk models indplacering i et fag, og jeg vil ikke komme yderligere ind på den. Men i forlængelse heraf skal det bemærkes, at det første problem, man støder på, når man skal beskæftige sig med matematiske modeller, er manglende faglige forudsætninger hos matematikeren og manglende matematiske forudsætninger hos fagmanden. For at opnå frugtbare matematiske modeller er det derfor af afgørende betydning, at matematikeren sætter sig grundigt ind i fagmandens ”problemer”, og at fagmanden får indgående kendskab til det matematiske begrebsapparat og til matematikkens muligheder og begrænsninger, samt naturligvis at fagmanden og matematikeren arbejder godt sammen om emnet på baggrund af hver deres speciale.

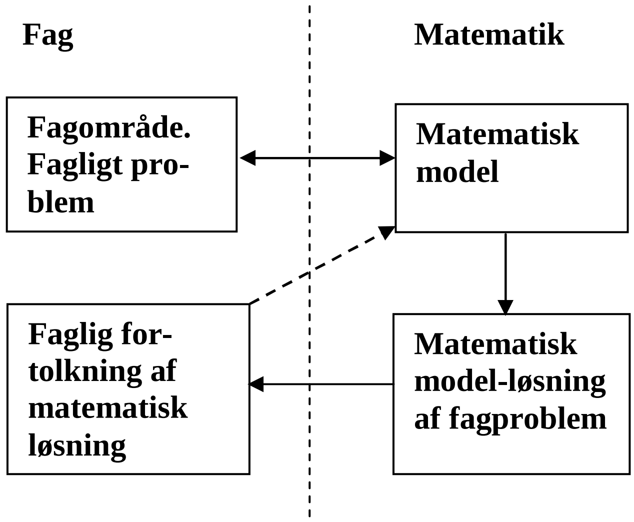
I forbindelse med overvejelser om matematiske emners indplacering i andre fag støder man ofte på begrebet: ”En <u>anvendelse</u> af et matematisk emne i et andet fag”. Jeg vil imidlertid – som det allerede er gjort nogle gange, herunder i denne bogs titel – benytte betegnelsen ”matematisk <u>model</u>” frem for at tale om ”anvendelser”. Dette skyldes bl.a., at visse matematiske teorier kan anvendes i andre matematiske teorier, og det er ikke den type ”anvendelse”, jeg vil beskæftige mig med her.

Hertil kommer, at ordet model er mere beskrivende i forhold til det, man rent faktisk foretager sig, når et matematisk emne ”anvendes” i et andet fag. En model medtager nemlig kun visse ”udvalgte” egenskaber ved den virkelighed (det emne), som modellen skal beskrive. Og denne udvælgelse er fastlagt dels ud fra modelbyggerens muligheder og evner, dels ud fra den ønskede grad af præcision. F.eks. er en globus, et landkort, et modelfly og et marionetteater modeller af hhv. jordkloden, en del af jordkloden, et ”rigtigt” fly og et ”rigtigt” teater. Og det er her i alle tilfælde oplagt, at kun en del af det virkelige objekts egenskaber er medtaget i modellen. (Det overlades til læseren at præcisere, hvilke egenskaber der er medtaget, og hvilke der er udeladt i de omtalte modeller. Læseren bedes ligeledes overveje, hvordan modelbyggerens muligheder og evner, samt den ønskede grad af præcision, har indvirket på modelbygningen).

Som det ses af det ovenstående, forekommer der ved enhver modeldannelse et vist <u>informationstab</u>. Men betydningen af dette informationstab afhænger dels af, hvilke egenskaber ved den betragtede virkelighed, vi ønsker at beskrive, og dels af, hvor stor indflydelse de egenskaber, som <u>ikke</u> medtages i modellen har på de medtagne egenskaber. Det skal i denne forbindelse fremhæves, at informationstabet kan have større eller mindre indflydelse på de <u>konklusioner</u>, man <u>ud fra modellen</u> kan drage om den del af virkeligheden, som modellen beskriver.
Betragt f.eks. et diagram for et givet elektrisk kredsløb, hvori der bl.a. indgår et amperemeter og en resistor (en modstand). Hvis man kun er interesseret i at få at vide, hvordan de i kredsløbet indgående komponenter er <u>forbundet</u>, er resistansens størrelse uden betydning. Hvis man derimod ønsker at foretage <u>beregninger</u> ud fra diagrammet, skal resistansens størrelse naturligvis medtages i den model, som diagrammet udgør. (Det overlades til læseren at overveje, om – og i givet fald under hvilke omstændigheder – tidspunktet, temperaturen, amperemeterets resistans, amperemeterets udseende, barometerstanden eller ledningernes farve skal/bør indgå i forbindelse med diagrammet).

Analogt til de ovenstående betragtninger kan det konkluderes, at der også ved opstilling og behandling af <u>matematiske</u> modeller forekommer et informationstab, samt at der er en heraf følgende indskrænkning i konsekvenserne af modelberegningerne.

Principielt og skematisk kan en matematisk models indplacering i forbindelse med et andet fag beskrives på følgende måde:



Den dobbeltpegende pil mellem ”Fagområde” og ”Matematisk model” angiver ”opstillingen” af den matematiske model, som foregår på baggrund af de tidligere omtalte to typer samspil mellem fag og matematik. Det er altså her, at (en del af) det omtalte informationstabs forekommer. Og informationstabet opstår altså, fordi der foretages en udvælgelse, eller fordi man tillægger det betragtede objekt nogle idealiserede egenskaber, som det måske kun til en vis grad besidder.

Pilen fra ”Matematisk model” til ”Matematisk modelløsning” angiver de matematiske operationer og argumenter. Dels for overhovedet at kunne ”finde” en løsning, dels for måske at opnå en større overskuelighed, kan det undertiden være nødvendigt at foretage forenklinger i en del af forudsætningerne, eller det kan være nødvendigt at anvende tilnærmelser (approksimationer) i beregningerne. I begge tilfælde er der tale om, at der i den matematiske model indbygges et yderligere informationstab.

Den stiplede linie fra ”Faglig fortolkning” til ”Matematisk model” angiver, at den faglige fortolkning af modelløsningen ikke gav tilfredsstillende resultater, og at den matematiske model derfor skal revideres. Dette foregår typisk ved at ”fjerne” nogle af de foretagne idealiseringer og forenklinger – enten i modelopstillingen eller i modelløsningen. Men det skal i forlængelse heraf endnu engang fremhæves, at en matematisk model kun angiver en tilnærmet beskrivelse af ”virkeligheden”, og at der derfor kan forekomme forskellige modeller for det samme fagområde afhængig af den ønskede præcision, samt at der normalt slet ikke findes nogen endegyldig model.
I øvrigt kan det bemærkes, at der findes eksempler på, at samme matematiske model kan bruges i flere forskellige fagligt uafhængige sammenhænge (f.eks. ved beskrivelse af eksponentielt voksende eller aftagende størrelser).

Det må nu være rimeligt at stille følgende spørgsmål:

1. I hvilke sammenhænge kan matematiske modeller indgå ?
2. Hvad kan man forvente at opnå ved en matematisk modelbeskrivelse af et givet fagområde ?

Svaret på spørgsmål 1 må stort set være, at matematiske modeller kan indgå i fagområder, der

a) har (eller kan gives) et kvantitativt indhold, dvs. som indeholder størrelser, der på en eller anden måde kan vejes, måles, tælles osv.
b) indeholder nogle implicit givne lovmæssigheder eller logiske sammenhænge af deterministisk (dvs. forudbestemmelig) eller stokastisk (dvs. tilfældig) natur.

Svaret på spørgsmål 2 må bl.a. være, at man

a) oftest kan opnå en mere præcis, systematisk og samtidig kortere beskrivelse af fagområdet
b) v.hj.a. de matematiske modeller kan udlede resultater, som ellers ikke (eller i hvert fald næppe) lod sig frembringe
c) ofte kan forudsige ”begivenheder” (evt. med visse sandsynligheder) eller kan forklare tidligere ”hændelsesforløb” (hvorved man kan opnå en bedre forståelse af de pågældende fagområde).

Det skal i denne sammenhæng omtales, at nogle fag eller fagområder – og her nok først og fremmest det, der under en samlende betegnelse kaldes fysik – direkte er opbygget v.hj.a. matematiske begreber, og at matematikken således ofte er uundværlig for fremsættelsen af brugbare teorier indenfor de pågældende fag. (Der tænkes her naturligvis på fagene og fagområderne i ”moderne” fremtoning). For disse fagområders vedkommende kan det derfor måske være irrelevant at skelne imellem faget selv og den tilhørende matematik, (selv om det principielt er muligt at gøre i de fleste tilfælde).
Det skal endvidere bemærkes, at hvis matematikken blot bruges som beskrivelsesmiddel i et fag for at opnå en kortere og mere præcis formulering af et givet fagområde, så er der egentlig ikke tale om et fagligt problem med en tilhørende modelløsning, hvormed de to nederste ”kasser” i ovenstående figur stort set mister deres betydning.

Når man beskæftiger sig med matematiske modeller, kan man ikke undgå at komme ind på betragtninger om ”virkeligheden”, og jeg har da også allerede flere gange i det ovenstående benyttet mig af ordet virkelighed.
Begrebet virkelighed kan defineres som alle de emneområder, mennesker på en eller anden måde og i en eller anden sammenhæng beskæftiger sig med. Med denne definition er næsten alt ”gjort til” virkelighed, f.eks. også drømmes indhold og trosindhold, og dette kan – naturligvis afhængig af ens livsindstilling – være problematisk.
Som en anden yderlighed ligger den materialistiske virkelighedsopfattelse, hvor virkeligheden kun omfatter materielle objekter, dvs. ting, som kan ”måles og vejes”. Men hvis denne virkelighedsopfattelse – som til en vis grad (især efter midten af det 19. århundrede) er blevet fremherskende i den vesterlandske kultur – betragtes i sin yderste konsekvens, kan man blive udsat for nogle efter min mening ret absurde anskuelser som f.eks. følgende: Produktion af kunstige blomster er mere virkelig end en biologs overvejelser om vækstforholdene for naturlige blomster.

Som læseren nok har gættet, mener jeg, at sandheden om virkeligheden skal findes ”et sted imellem” de to omtalte virkelighedsopfattelser. Dette indebærer således, at det begrebsapparat (teorigrundlag), der ligger bag en given beskrivelse af nogle objekter, er ”lige så virkelig” som de materielle faktorer, beskrivelsen omhandler.

I forbindelse med eksemplet vedrørende kunstige og naturlige blomster skal det retfærdigvis omtales, at der bag produktionen af kunstige blomster ligger en lang række teorier og lovmæssigheder af såvel teknisk som økonomisk art. Og samtidig skal det fremhæves, at biologens overvejelser om naturlige blomster kan være medvirkende til en bedre forståelse og dermed bedre bevarelse af den natur, som vi alle er fundamentalt afhængige af, (og uden hvilken vi bl.a. ikke havde behov for (mulighed for) at diskutere, hvordan ”virkeligheden” skal opfattes).

En anden synsvinkel på matematiske modeller er indeholdt i den måde, hvorpå de matematiske modeller groft taget kan inddeles, nemlig i følgende tre forskellige typer:

Type A: Matematiske modeller med reelt – men som nævnt muligvis approksimativt – kvantitativt indhold.

Type B: Matematiske modeller med fiktivt – men dog <u>realistisk beskrivende</u> – kvantitativt indhold.

Type C: Matematiske modeller med kvalitativt beskrivende indhold.

Når et givet fag betragtes i en ”praktisk” sammenhæng (det vil f.eks. sige i en ”dagligdags”, ”forskningsundersøgelsesmæssig” eller ”produktionsrelevant” sammenhæng), så er det oftest modeller af type A, som forekommer. Det skal i denne forbindelse omtales, at mange fag har forskellige ”tommelfingerregler”, som benyttes dagligt, og som egentlig har deres oprindelse i matematiske modelløsninger af de relevante faglige problemer.
Når et fag betragtes i en erkendelsesmæssig, uddannelsesmæssig og/eller forståelsesmæssig sammenhæng, optræder der imidlertid modeller af alle tre typer. Man kan f.eks. udmærket lære at forstå et bestemt fagområdes mekanismer ved at betragte modeller af type B. At der i type B er tale om et <u>fiktivt</u> kvantitativt indhold, betyder således kun, at de tal, man benytter sig af i modelundersøgelsen, ikke er registrerede data, men derimod skønnede eller frit opfundne værdier. Det betyder derimod <u>ikke</u>, at de i modellen anførte indre faglige sammenhænge er urealistiske.
Ved modeller af type C er et fagligt kvalitativt indhold blevet kvantificeret. (Der er altså på en eller anden måde ”sat tal på” nogle begrebsstørrelser, der ikke umiddelbart kan ”måles, vejes, tælles osv.”). Det bliver på denne måde undertiden muligt at give en kortere og mere præcis beskrivelse af fagområdet. (Som eksempel kan nævnes anvendelsen af nyttefunktioner i økonomisk-behavioristiske sammenhænge).

Der er en – måske forståelig – tendens til, at når matematikere beskæftiger sig med matematiske modeller, så fokuseres der på den højre del af ovenstående figur, altså på den ”rent” matematiske side af sagen, og i særdeleshed på pilen fra ”Matematisk model” til ”Matematisk modelløsning”, idet netop denne pil som omtalt angiver de <u>matematiske</u> operationer og argumenter, (og denne bog lægger nok også en væsentlig del af sin vægt dér). Der er imidlertid i forbindelse med den omtalte tendens opstået en række konstruerede ”modeller” (”pseudoanvendelser”), som blot er matematisk <u>teori</u> pakket ind i et urealistisk tågeslør af tilsyneladende fagrelevante begreber. (Der er altså i denne sammenhæng heller ikke tale om modeller af type B).
Jeg vil her anføre to eksempler (opgaver) til belysning af synspunktet.

Opgave 1: Et fysikhold på en skole har bygget en raket. Denne raket har til tiden t efter affyringen tilbagelagt strækningen $s(t)$ givet ved: $s(t) = t^3 + 0{,}5 \cdot t^2$, $0 \leq t \leq 20$
hvor t måles i sekunder og s i meter.
Angiv den tilbagelagte strækning, samt hastigheden og accelerationen, når $t = 5$ sek.

Den matematisk ”model” i denne opgave siger, at i begyndelsen (de første 20 sekunder) kan rakettens tilbagelagte strækning beskrives ved udtrykket: $s(t) = t^3 + 0{,}5 \cdot t^2$, men der er ingen begrundelse for denne model (dvs. ingen udledning af udtrykket for s(t)). Og selv om det måske er rigtigt, (hvilket jeg betvivler), at s(t) er af formen: $a \cdot t^3 + b \cdot t^2 + c \cdot t$, er det næppe sandsynligt, at koefficienterne a, b og c er hhv. 1, 0,5 og 0.

Opgave 1 må derfor blot betegnes som en opgave i differentiation, idet $s'(t)$ angiver hastigheden $v(t)$, og idet $s''(t)$ angiver accelerationen $a(t)$, (hvormed der indirekte bruges en matematisk model fra faget fysik).

Opgave 2: En indendørsarkitekt har designet nogle dørgreb, der har form som et omdrejnings-legeme. Dette legeme fremkommer ved at rotere grafen for funktionen

$$f(x) = \tfrac{1}{6}\cdot(\tfrac{1}{2}x+2)\cdot\sqrt{36-x^2} \quad , \quad 0 \le x \le 6$$

omkring førsteaksen, hvor enheden på aksen måles i cm.

a) Tegn v.hj.a. en funktionsundersøgelse grafen for f. (Herved får man et indtryk af, hvorfor netop den anførte funktion er brugt til formålet).

b) Hvor stor er dørgrebets største diameter ?

c) Dørgrebet fremstilles på en drejebænk af en messingcylinder. Hvor meget vejer det, når messings massefylde er 8,3 g/cm^3 , (dvs. 1 cm^3 vejer 8,3 gram) ?

Selv om omdrejningslegemet måske ligner et dørgreb, hvilket fremgår af spørgsmål a) i opgaven, så vil en indendørsarkitekt (eller andre, der beskæftiger sig med formgivning), almindeligvis ikke konstruere en matematisk model som den omtalte for at designe et dørgreb eller lignende. (Der findes naturligvis undtagelser fra denne påstand. Et kendt eksempel herpå er Piet Hein's konstruktion af superellipsen). I øvrigt vil materialeforbruget nemt kunne bestemmes ved at veje et prøveeksemplar, som indendørsarkitekten formodentlig alligevel laver. Opgave 2 er derfor blot at betragte som en opgave i funktionsundersøgelse og integralregning.

Jeg vil afslutte dette kapitel med i forlængelse af dets indhold at formulere følgende to aforismer om matematik og matematiske modeller:

1. En matematisk model er en eksplicit præcisering af implicit givne præcise sammenhænge i et fag.

2. Matematik har ikke kun værdi som et redskab, men også som et filosofisk livsindhold og værdigrundlag baseret på logisk erkendelse.