Appendix 1: Den basale teori for logaritmefunktioner.

Inden vi kan give os i kast med de teoretiske forhold for logaritmefunktioner, skal følgende sætning bevises, idet den bruges afgørende i to af de følgende beviser:

Sætning A.1.1.

Lad f være en kontinuert funktion defineret i et interval I, og lad $q \in I$ være et vilkårligt valgt tal. Hvis vi for alle $x \in I$ sætter

$$F(x) = \int_q^x f(t)\,dt$$

så er funktionen F en stamfunktion til f i I.
Der gælder altså, at

- $F'(x) = f(x)$ for alle indre punkter x i I,
- hvis a er et venstre endepunkt for I, som er med i I, så er $F'_+(a) = f(a)$, og
- hvis b er et højre endepunkt forI, som er med i I, så er $F'_-(b) = f(b)$.

Bevis:
F(x) er defineret for alle $x \in I$, idet f er kontinuert og dermed integrabel i intervallet [q;x] eller [x;q]
Ifølge definitionen på differentiabilitet skal vi for et vilkårligt $x_o \in I$ undersøge differenskvotienten
$\frac{F(x) - F(x_o)}{x - x_o}$ for x gående mod x_o (evt. fra højre eller venstre i et intervalendepunkt a eller b).
Ifølge indskudssætningen for integraler har vi:

$$F(x) - F(x_o) = \int_q^x f(t)dt - \int_q^{x_o} f(t)dt = \int_q^x f(t)dt + \int_{x_o}^q f(t)dt = \int_{x_o}^x f(t)dt$$

<u>Antag først, at $x > x_o$:</u> Da f er kontinuert i i det lukkede, begrænsede interval $[x_o;x]$, antager f både et maximum K_x og et minimum k_x i $[x_o;x]$. Vi sætter altså: $k_x = \min_{t\in[x_o;x]} f(t)$ og $K_x = \max_{t\in[x_o;x]} f(t)$.

Vi får da: $$k_x \cdot (x - x_o) \le \int_{x_o}^x f(t)dt \le K_x \cdot (x - x_o)$$

Overvej dette, f.eks. ved arealbetragtninger (både for positive og negative funktionsværdier !!).
Ifølge det ovenstående har vi således, at:

$$k_x \cdot (x - x_o) \le F(x) - F(x_o) \le K_x \cdot (x - x_o)$$

og ved division med $x - x_o$ (som er positiv), får vi: $$k_x \le \frac{F(x) - F(x_o)}{x - x_o} \le K_x$$

<u>Antag dernæst, at $x < x_o$:</u> Da f er kontinuert i i det lukkede, begrænsede interval $[x; x_o]$, antager f både et maximum K_x og et minimum k_x i $[x; x_o]$. Vi sætter altså: $k_x = \min_{t\in[x;x_o]} f(t)$ og $K_x = \max_{t\in[x;x_o]} f(t)$.

Vi får da (overvej !): $$k_x \cdot (x_o - x) \le \int_x^{x_o} f(t)dt \le K_x \cdot (x_o - x)$$

dvs. $$k_x \cdot (x_o - x) \le F(x_o) - F(x) \le K_x \cdot (x_o - x)$$

og ved division med $x_o - x$ (som er positiv), får vi: $$k_x \le \frac{F(x_o) - F(x)}{x_o - x} \le K_x .$$

Ved at forlænge brøken med – 1 får vi endelig: $k_x \;\le\; \dfrac{F(x)-F(x_o)}{x-x_o} \;\le\; K_x$.

Vi ser dermed, at denne dobbeltulighed både gælder for $x < x_o$ og $x > x_o$
Hvis vi nu lader x gå mod x_o (evt. fra højre eller venstre, hvis x_o er et endepunkt for I), så giver kontinuiteten af f, at både k_x og K_x går mod $f(x_o)$. Men da $\dfrac{F(x)-F(x_o)}{x-x_o}$ ligger imellem k_x og K_x, ser vi, at også $\dfrac{F(x)-F(x_o)}{x-x_o}$ går mod $f(x_o)$ for x gående mod x_o .
Vi får derfor, at F er differentiabel i x_o og at $F'(x_o) = f(x_o)$.
(Hvis x_o er et venstre intervalendepunkt, som er med i I, får vi $F'_+(x_o) = f(x_o)$. Og tilsvarende med et højre intervalendepunkt). Hermed er sætningen bevist. ♥

Vi går herefter over til at etablere det teoretiske grundlag for logaritmefunktioner.

Sætning A.1.2.
Funktionen F givet ved: $F(x) \;=\; \int_1^x \frac{1}{t}dt$, $x > 0$, er en logaritmefunktion,

dvs. der gælder:
1) Dm(F) = R_+ og Vm(F) = R
2) F er monoton
3) $F(a\cdot b) \;=\; F(a) + F(b)$

Der gælder desuden, at F er differentiabel, og at $F'(x) \;=\; \frac{1}{x}$
Funktionen F beskrevet i denne sætning kaldes <u>den naturlige logaritmefunktion</u> og skrives: ln.

Bevis:
Vi bemærker først, at funktionen $f(t) = \frac{1}{t}$ er kontinuert i intervallet] 0; ∞[(dvs. i R_+). Dermed ser vi for det første, at F(x) er defineret for alle $x \in R_+$ (og ikke andre, idet funktionen $\frac{1}{t}$ ellers er ubegrænset og ikke defineret i intervallet [x; 1]). Og for det andet ser vi ifølge ovenstående sætning A.1.1, at F er differentiabel for alle $x \in R_+$, og at $F'(x) \;=\; \frac{1}{x}$. Da $x > 0$ ser vi desuden, at $F'(x) > 0$, hvorfor F er voksende i R_+ , og dermed specielt monoton. Vi mangler derfor ”kun” at vise, at Vm(F) = R, og at regnereglen i pkt. 3) er opfyldt. Vi begynder med 3):
Lad a , b ∈ R_+ være vilkårligt valgt. Ifølge indskudssætningen for integraler har vi, at

$$F(a\cdot b) \;=\; \int_1^{ab}\frac{1}{t}dt = \int_1^{a}\frac{1}{t}dt + \int_a^{ab}\frac{1}{t}dt \;=\; F(a) + \int_a^{ab}\frac{1}{t}dt$$

Vi skal derfor vise, at $F(b) = \int_1^{b}\frac{1}{t}dt = \int_a^{ab}\frac{1}{t}dt$.

Da $\frac{1}{t} = \frac{1}{a}\cdot\frac{a}{t} = \frac{1}{a}\cdot\frac{1}{\frac{t}{a}}$ ser vi, at $\int_a^{ab}\frac{1}{t}dt \;=\; \int_a^{ab}\frac{1}{\frac{t}{a}}\cdot\frac{1}{a}dt$.

Hvis vi anvender substitutionen $u = \frac{t}{a}$, $du = \frac{1}{a}du$ får vi: $\int_a^{ab} \frac{1}{\frac{t}{a}} \cdot \frac{1}{a} dt = \int_1^b \frac{1}{u} du = F(b)$,

hvormed vi har vist, at F(a·b) = F(a) + F(b).

I stedet for substitutionen kan vi anlægge følgende geometriske betragtning: Intervallet fra a til ab er a gange så langt som intervallet fra 1 til b. Men de tilsvarende funktionsværdier er $\frac{1}{a}$ gange så store (se figur A.1.1).

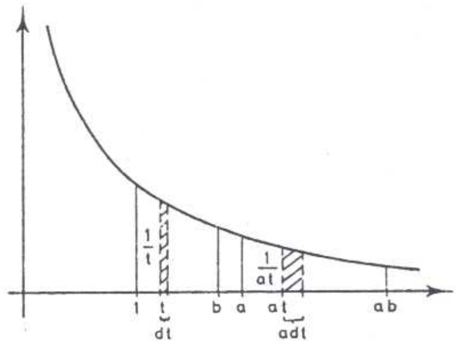


Fig. A.1.1

Vi skal herefter vise, at Vm(F) = R, altså at ethvert reelt tal er funktionsværdi af et eller andet tal x. Dette gøres ved at tage et vilkårligt valgt $y \in R$, og derefter vise, at y er funktionsværdi for F af et eller andet x. Lad derfor $y \in R$ være vilkårligt valgt, og sæt n lig med det hele tal som opfylder, at

$$n \le \frac{y}{F(2)} < n+1$$

(Altså f.eks. hvis $\frac{y}{F(2)} = 8{,}16$, så sættes n = 8, eller hvis $\frac{y}{F(2)} = -1{,}9$, så sættes n = – 2).
Vi bemærker, at vi kan tillade os at dividere med F(2), da F(2) > 0, idet F(1) = 0 og F er voksende.
Ved multiplikation med F(2), som altså er positiv, får vi: $n \cdot F(2) \le y < (n+1) \cdot F(2)$.

Da F har egenskaben: F(a·b) = F(a) + F(b) ser vi som i sætning 1.1.X, at der for alle hele tal n gælder, at $F(a^n) = n \cdot F(a)$. Anvendes dette på den ovenstående dobbeltulighed, så får vi:

$$F(2^n) \le y < F(2^{n+1})$$

Vi ser således, at y ligger mellem to funktionsværdier for F. Da F er kontinuert (idet den er differentiabel), har vi dermed, at y selv er en funktionsværdi af et eller andet x. (Og da F er voksende, ligger x imellem 2^n og 2^{n+1}).
Vi har hermed set, at et vilkårligt valgt $y \in R$ er indeholdt i Vm(F), hvormed vi får, at Vm(F) = R.
Hermed er sætningen bevist. ♥

Udtrykket $\ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt$ kan ved anvendelse af numerisk integration benyttes til at beregne funktionsværdier for ln. Disse er lagt ind på grafregneren under tasten [ln].

Vi har hermed vist, at der findes mindst én logaritmefunktion, nemlig den naturlige logaritme ln. Men som den følgende sætning viser, findes der uendelig mange.

Sætning A.1.3.

Hvis f er en logaritmefunktion, og hvis $k \neq 0$ er en vilkårlig reel konstant, så er kf en logaritmefunktion.

Bevis:
Vi skal argumentere for, at kf opfylder de tre punkter i definition 1.1.X, når vi ved, f gør det.
Ad 1): Vi har: $Dm(kf) = Dm(f) = R_+$. Lad nu $y \in R$ være vilkårligt valgt. Vi skal vise, at der findes et x, så $(kf)(x) = y$. Vi bemærker først, at $(kf)(x) = k \cdot f(x)$. Da $Vm(f) = R$ findes der et x, så $f(x) = \frac{y}{k}$, hvormed $k \cdot f(x) = y$ er opfyldt.
Ad 2): Vi skal argumentere for, at kf er monoton, når vi ved, at f er det. Der er her fire tilfælde: f er voksende og $k < 0$, f er voksende og $k > 0$, f er aftagende og $k < 0$, og f er aftagende og $k > 0$.
Vi ser på den førstnævnte situation og overlader resten til den interesserede læser som en øvelse.
Vi antager altså, at f er voksende og $k < 0$, og vi vil vise, at kf er aftagende (og dermed monoton).
Lad x_1 , $x_2 \in R_+$ være vilkårlig valgt, så $x_1 < x_2$. Da f er voksende har vi hermed: $f(x_1) < f(x_2)$, og da k er negativ giver dette: $k \cdot f(x_1) > k \cdot f(x_2)$, hvormed det ønskede er vist.
Ad 3): Vi skal argumentere for, at kf opfylder regnereglen $kf(a \cdot b) = kf(a) + kf(b)$, idet vi ved, at f gør det. Dette overlades til læseren som en øvelse.
Hermed er sætningen bevist. ♥

Som vi skal vise nedenfor, findes der ikke andre logaritmefunktioner, end dem der kan fremkomme ved at gange konstanter på en given logaritmefunktion. Inden vi kan bevise dette, skal vi imidlertid først have fat i nogle andre basale egenskaber ved logaritmefunktioner.

Sætning A.1.4.

1) Enhver logaritmefunktion er kontinuert
2) Enhver logaritmefunktion er differentiabel.

Bevis:
Da det vides, at en differentiabel funktion er kontinuert, skulle man tro, at vi kunne bevise sætningen ved at bevise pkt. 2) – og derefter blot henvise til denne regel. Men det kan vi ikke, idet beviset for 2) bygger på, at vi ved, at en logaritmefunktion er kontinuert. Dette skal derfor først vises ad andre veje.
Vi giver først et intuitivt argument for pkt. 1):

Grafen for en logaritmefunktion f kan hverken have ”huller” eller ”spring” som skitseret på figur A.1.2, idet dette enten strider imod, at f er monoton eller at $Vm(f) = R$ og $Dm(f) = R_+$ (Overvej dette nærmere).
Grafen for f må derfor være sammenhængende, dvs. funktionen må være kontinuert.

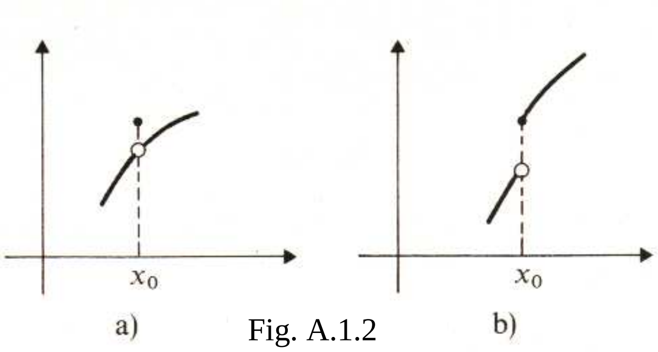


Fig. A.1.2

Et formelt bevis forløber således: Lad f være en given logaritmefunktion, og lad $x_o \in R_+$ være vilkårligt valgt. Vi skal så bevise, at f er kontinuert i x_o. Da f er monoton, er den enten voksende eller aftagende. Vi vil se på det tilfælde, hvor f er voksende, og overlade det tilsvarende argument for en aftagende logaritmefunktion til den interesserede læser.
Vi skal vise, at for enhver omegn $\omega(f(x_o))$ om $f(x_o)$ findes en omegn $\omega(x_o)$ om x_o som har den egenskab, at hvis $x \in \omega(x_o)$, så er $f(x) \in \omega(f(x_o))$.

Lad da $\omega(f(x_o))$ være en vilkårlig valgt omegn om $f(x_o)$, og lad ε være radius i omegnen, dvs. $\omega(f(x_o)) = \,]\, f(x_o) - \varepsilon\, ;\, f(x_o) + \varepsilon\, [$. Da $Vm(f) = R$ findes x_1 , $x_2 \in R_+$, så $f(x_1) = f(x_o) - \varepsilon$ og $f(x_2) = f(x_o) + \varepsilon$, og da f er voksende må der gælde (overvej !), at $x_1 < x_o < x_2$.
Vi vælger nu en omegn $\omega(xo)$ omkring x_o, som opfylder, at $\omega(xo) \subseteq\,]x_1;x_2[$ (Overvej, at dette er muligt ! Lav en figur med to tallinier, en x-akse og en y-akse, der viser situationen). Vi får hermed:
$x \in \omega(x_o) \;\Rightarrow\; x_1 < x < x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) < f(x) < f(x_2) \Rightarrow f(x_o) - \varepsilon < f(x) < f(x_o) + \varepsilon \;\Rightarrow\; f(x) \in \omega(f(x_o))$
hvormed det ønskede er bevist.

<u>Ad 2):</u> Beviset for, at en logaritmefunktion er differentiabel, er et udpræget "trick"-bevis. Det forløber på følgende måde:
Lad f være en vilkårlig logaritmefunktion. Da f ifl. pkt. 1) er kontinuert, får vi ifølge sætning A.1.1, at f har en stamfunktion givet ved:

$$F(x) = \int_1^x f(t)\,dt$$

hvor vi har valgt q = 1.
Lad nu $x \in R_+$ være et vilkårligt valgt tal, som fastholdes i det følgende. Vi har da, at

$$\int_1^2 f(x\cdot u)\,du = \int_1^2 (f(x)+f(u))\,du = \int_1^2 f(x)\,du + \int_1^2 f(u)\,du = f(x)\cdot\int_1^2 1du + F(2)$$

$$= f(x)\cdot[u]_1^2 + F(2) = f(x) + F(2)$$

Udregnes det samme integral, dvs. $\int_1^2 f(x\cdot u)\,du$ v.hj.a. substitutionen: t = xu, dt = xdu, og dermed: $\frac{1}{x}dt = du$, så får vi (overvej de enkelte skridt nøje !):

$$\int_1^2 f(x\cdot u)\,du = \int_x^{2x} f(t)\cdot\tfrac{1}{x}dt = \tfrac{1}{x}\cdot\int_x^{2x} f(t)\,dt = \tfrac{1}{x}\cdot\left(\int_1^{2x} f(t)\,dt - \int_1^x f(t)\,dt\right) = \tfrac{1}{x}\cdot\left(F(2x)-F(x)\right)$$

Sammenholdes disse to udtryk for $\int_1^2 f(x\cdot u)\,du$, så får vi: $f(x) = \frac{1}{x}\cdot(F(2x)-F(x)) - F(2)$.

Da x var vilkårligt valgt i R_+ , gælder dette udtryk for alle $x \in R_+$. Da F(x) og den sammensatte funktion F(2x) er differentiable, er udtrykket på højre side differentiabelt, hvoraf vi ser, at f er differentiabel. Hermed er sætningen bevist. ♥

Da vi nu ved, at en logaritmefunktion er differentiabel i alle $x \in R_+$, kan vi tillade os at formulere og bevise følgende sætning:

Sætning A.1.5.
For en logaritmefunktion f gælder, at $f'(x_o) = \dfrac{f'(1)}{x_o}$ for alle $x_o \in R_+$
dvs. en logaritmefunktions differentialkvotient i et vilkårligt punkt x_o er fastlagt udfra differentialkvotienten i 1.

Bevis:
Lad $x_o \in R_+$ være vilkårligt givet. Da f er differentiabel i x_o , ved vi, at det om differenskvotienten for f med udgangspunkt i x_o gælder, at: $\dfrac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o} \to f'(x_o)$ for $x \to x_o$

Da f er en logaritmefunktion, kan differenskvotienten omskrives v.hj.a. sætning 1.1.X:

$$\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o} = \frac{f(\frac{x}{x_o})}{x_o\cdot(\frac{x}{x_o}-1)} = \frac{1}{x_o}\cdot\frac{f(\frac{x}{x_o})-f(1)}{\frac{x}{x_o}-1}$$

hvor vi har anvendt, at $f(1) = 0$.

Da vi har: $\frac{f(z)-f(1)}{z-1} \to f'(1)$ for $z \to 1$, og da $\frac{x}{x_o} \to 1$ for $x \to x_o$, får vi ifølge den ovenstående omskrivning, hvor $\frac{x}{x_o}$ svarer til z, at $\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o} \to \frac{1}{x_o}\cdot f'(1)$ for $x \to x_o$

Da de to grænseværdier for differenskvotienten er ens, er sætningen hermed bevist. ♥

På baggrund af sætning A.1.5 kan vi nu vise følgende:

Sætning A.1.6.

1) To logaritmefunktioner f og g er identiske (dvs. $f(x) = g(x)$ for alle $x \in R_+$) , hvis $f'(1) = g'(1)$
2) To vilkårlige logaritmefunktioner f og g er proportionale, dvs. der findes en konstant $k \neq 0$, så
$$f(x) = k\cdot g(x) \quad \text{for alle } x \in R_+$$
3) For en vilkårlig logaritmefunktion f findes en konstant k, så $f(x) = k\cdot\ln(x)$ for alle $x \in R_+$

Bevis:

Ad 1): Vi antager altså, at vi har to logaritmefunktioner f og g, som opfylder, at $f'(1) = g'(1)$. (Bemærk, at vi ifølge sætning A.1.4 2) ved, at både f og g er differentiable. For et vilkårligt $x \in R_+$ får vi nu ifølge sætning A.1.5, at $f'(x) = \frac{f'(1)}{x} = \frac{g'(1)}{x} = g'(x)$, dvs. $f'(x) = g'(x)$, og dermed: $f'(x) - g'(x) = 0$. Funktionen $f - g$ har altså differentialkvotienten 0 for alle $x \in R_+$, hvormed vi ved, at der findes en konstant, så: $f(x) - g(x) = k$ for alle $x \in R_+$. Da f og g er logaritmefunktioner gælder specielt, at $f(1) = 0$ og $g(1) = 0$, hvorfor konstanten k må være 0. Alt i alt får vi dermed, at $f(x) = g(x)$ for alle $x \in R_+$, hvilket skulle bevises.

Ad 2) og 3): Da $g'(x) = \frac{g'(1)}{x}$ (ifølge sætning A.1.5), må $g'(1) \neq 0$, idet g ellers ville være en konstant funktion (overvej !). Vi kan derfor sætte $k = \frac{f'(1)}{g'(1)}$, og vi vil nu betragte funktionen $k\cdot g$.
Ifølge sætning A.1.3 er $k\cdot g$ også en logaritmefunktion. Om denne logaritmefunktion gælder:
$(k\cdot g)'(x) = k\cdot g'(x)$ for alle $x \in R_+$. Specielt gælder det for $x = 1$, hvormed vi får, at :
$$(k\cdot g)'(1) = k\cdot g'(1) = \frac{f'(1)}{g'(1)}\cdot g'(1) = f'(1)$$
Om de to logaritmefunktioner f og $k\cdot g$ gælder altså, at de har samme differentialkvotient i 1. Ifølge pkt. 1) gælder der derfor, at: $f(x) = k\cdot g(x)$ for alle $x \in R_+$.
Da dette specielt gælder, hvis $g = \ln$, er sætningen hermed bevist. ♥

Appendix 2: Omvendte funktioner.

Lad os, inden vi overhovedet får fortalt, hvad man forstår ved en omvendt funktion, starte med at slå fast, at der intet mystisk er ved omvendte funktioner ! Anvendelse af ordet "omvendt" er en relativ ting, idet en funktion under visse omstændigheder kan kaldes en omvendt funktion til en anden allerede givet funktion !
Hvis vi ser på så fredelige funktioner som $g(x) = \frac{1}{2}x + 3$ og $h(x) = \sqrt{x}$, så tænker man vel ikke straks på, at de er "omvendte". Men som vi skal se, er dette ikke desto mindre tilfældet: g er omvendt funktion til $f(x) = 2x - 6$, og h er omvendt funktion til $f(x) = x^2$, $x \geq 0$.

Vi skal først have begrebet en injektiv funktion defineret:

Definition A.2.1.

En funktion f siges at være injektiv, hvis der for ethvert $y \in Vm(f)$ findes netop ét $x \in Dm(f)$, så $f(x) = y$.

Det overlades til læseren at lave en figur af grafen for en funktion f, som ikke er injektiv og grafen af en funktion g, som er injektiv.
Det overlades også til læseren at overveje, at en injektiv funktion f er det samme som en funktion med følgende egenskab: For alle x_1 , $x_2 \in Dm(f)$: $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.
Endelig overlades det til læseren at argumentere for, at en monoton funktion er injektiv.

Hvis vi et øjeblik vender opmærksomheden mod den grundlæggende definition af en funktion, så siger den som bekendt, at man har en funktion g fra en mængde A ind i en mængde B, hvis der til ethvert element i A ved g tilordnes netop ét element i B. Og hvis vi derefter vender blikket mod den ovenstående definition af en injektiv funktion, så har vi netop denne situation, idet der til ethvert element $y \in Vm(f)$ (= A) svarer netop ét $x \in Dm(f)$ (= B). (x er bestemt ved, at $f(x) = y$).

Vi kan derfor anføre følgende definition:

Definition A.2.2.

Hvis f er en injektiv funktion, så har vi samtidig en funktion fra Vm(f) ind i Dm(f). Denne funktion kaldes den omvendte funktion til f og betegnes f^{-1}. Og der gælder, at: $f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow y = f(x)$

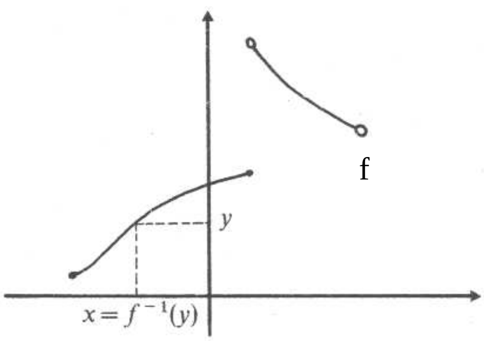


Fig. A.2.1

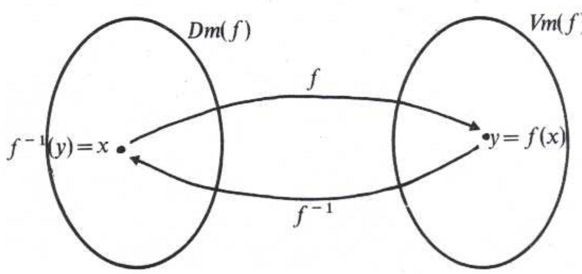


Fig. A.2.2

Indholdet i definition A.2.2 kan illustreres som vist på figur A.2.1 og A.2.2 (se foregående side), hvor figur A.2.2 er af mere skematisk karaktér.

Vi bemærker, at $Dm(f^{-1}) = Vm(f)$ og $Vm(f^{-1}) = Dm(f)$.

Selve betegnelsen f^{-1} er vel ikke den mest heldige, idet den måske kan forlede nogen til at tro, at -1 i f^{-1} har samme betydning som i f.eks. 5^{-1}, <u>hvilket på ingen måde er tilfældet</u>.
Betegnelsen f^{-1} stammer fra en matematisk disciplin (teoretisk algebra), som vi ikke skal komme ind på hér. Det vigtige er imidlertid, at betegnelsen er knyttet til f, idet der er tale om den omvendte funktion til f, altså – som omtalt ovenfor – et relativt begreb til en allerede given størrelse/funktion. (Man kunne i princippet have betegnet funktionen med $[f]$, $\langle f \rangle$, $\overleftrightarrow{f}$ eller andet, der indeholder f, men valget er altså af forskellige årsager faldet på betegnelsen: f^{-1}).

<u>Eksempel A.2.3.</u>

a) Vi vil finde den omvendte funktion til $f(x) = 2x - 6$. Dette er muligt, idet f er voksende og dermed injektiv. Ifølge definition A.2.2 har vi:

$$f^{-1}(y) = x \;\Leftrightarrow\; y = f(x) \;\Leftrightarrow\; y = 2x - 6 \;\Leftrightarrow\; y + 6 = 2x \;\Leftrightarrow\; x = \tfrac{1}{2}y + 3$$

dvs. $f^{-1}(y) = \frac{1}{2}y + 3$.

Som bekendt kan vi navngive de variable, som vi vil. Ofte vil ”man” gerne have x til at betegne den uafhængige variable. Hvis vi gør det, er forskriften for den omvendte funktion givet ved:

$$f^{-1}(x) = \tfrac{1}{2}x + 3.$$

b) Funktionen $f(x) = x^2$, $x \ge 0$, er voksende og dermed injektiv. (Bemærk, at forudsætningen $x \ge 0$ ikke kan undværes. (Hvorfor ikke ?)). Vi vil finde dens omvendte funktion: For $x \ge 0$ har vi:

$$f^{-1}(y) = x \;\Leftrightarrow\; y = f(x) \;\Leftrightarrow\; y = x^2 \;\Leftrightarrow\; x = \sqrt{y} \quad ,$$

altså: $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$ eller: $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ ♥

<u>Eksempel A.2.4.</u>

Den omvendte funktion til $g(x) = \dfrac{1}{x+3}$, $x > -3$ findes på følgende måde: For $x > -3$ har vi:

$$g^{-1}(y) = x \;\Leftrightarrow\; y = g(x) \;\Leftrightarrow\; y = \frac{1}{x+3} \;\Leftrightarrow\; y\cdot(x+3) = 1 \;\Leftrightarrow\; x\cdot y = 1 - 3y \;\Leftrightarrow\; x = \frac{1-3y}{y}$$

dvs. $g^{-1}(y) = \dfrac{1-3y}{y}$

For at finde $Dm(g^{-1})$ bemærker vi, at: $x > -3 \;\Leftrightarrow\; x + 3 > 0 \;\Leftrightarrow\; \dfrac{1}{x+3} > 0 \;\Leftrightarrow\; y > 0$

Vi ser således, at $Dm(g^{-1}) = \,]0;\infty[\, = R_+$ (hvormed vi også har fundet Vm(f)). Der gælder altså:

$g^{-1}(y) = \dfrac{1-3y}{y}$, $y \in R_+$, eller hvis vi bruger x som variabel: $g^{-1}(x) = \dfrac{1-3x}{x}$, $x \in R_+$ ♥

Øvelse A.2.5.
Elværket Strømsvigt A/S opkræver af deres privatkunder en kvartalsafgift på 200 kr. plus 1,2 kr. pr. kWh (en energienhed), som kunderne forbruger.

a) Opstil en forskrift for den funktion, der for en privatkunde angiver elomkostninger pr. kvartal som funktion af kundens energiforbrug.
b) Bestem det forbrug, som resulterer i en regning på 1500 kr. – og forklar, hvad dette har med omvendte funktioner at gøre.
c) Bestem en forskrift, inkl. definitionsmængde, for den omvendte funktion.
d) Løs pkt. b) igen – v.hj.a. forskriften. ♥

I forlængelse af øvelse A.2.5 anføres følgende sætning:

Sætning A.2.6.

Lad $f(x) = ax + b$ være en lineær funktion, hvor $a \neq 0$. Da er f injektiv, og

$$f^{-1}(y) = \frac{1}{a}\cdot y - \frac{b}{a} \quad , \quad y \in Vm(f)$$

dvs. f^{-1} er en lineær funktion med hældningskoefficient $\frac{1}{a}$.

Bevis:
At f er injektiv er allerede klargjort, idet f er monoton, når $a \neq 0$. Desuden har vi, at

$$f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow y = f(x) \Leftrightarrow y = ax + b \Leftrightarrow y - b = ax \Leftrightarrow x = \frac{1}{a}\cdot y - \frac{b}{a}$$

hvoraf vi ser, at: $f^{-1}(y) = \frac{1}{a}\cdot y - \frac{b}{a}$. Hermed er sætningen bevist. ♥

Øvelse A.2.7.
I visse dele af verden (f.eks. i USA) angives temperaturer i ^{o}F (grader Fahrenheit), og i andre dele af verden (f.eks. i Danmark) angives temperaturer i ^{o}C (grader Celcius).
Temperaturen målt i ^{o}F er en funktion f af temperaturen x målt i ^{o}C, idet der gælder: $f(x) = \frac{9}{5}x + 32$.

a) Find en forskrift for den omvendte funktion, og udtryk i ord, hvad den beskriver.
b) Hvilken temperatur i ^{o}C svarer til temperaturen 451 ^{o}F ? ♥

Øvelse A.2.8.
Find en funktionsforskrift for den omvendte funktion i hvert af følgende tilfælde:

a) $g(q) = -2q - 1$
b) $h(t) = \sqrt{t^2 + 2}$, $t \geq 0$
c) $f(x) = \frac{x}{2x - 3}$, $x < \frac{3}{2}$
d) $\psi(\lambda) = \frac{1}{\lambda^2 + 3}$, $\lambda \geq 0$ ♥

Øvelse A.2.9.
Tegn i hvert af følgende tilfælde grafen for funktionen f og dens omvendte funktion f^{-1} i samme koordinatsystem, idet den variable for både f og f^{-1} betegnes x og afsættes ud af 1.aksen: f fra
a) øvelse A.2.7 b) øvelse A.2.5 c) eksempel A.2.3 a) d) eksempel A.2.3 b). ♥

Som det fremgår af øvelse A.2.9, er der en speciel sammenhæng mellem grafen for f og grafen for f^{-1}, når de tegnes i samme koordinatsystem, nemlig følgende sætning:

Sætning A.2.10.

Lad f være en injektiv funktion. Hvis vi anvender et koordinatsystem med samme enhed på 1. og 2. aksen, så gælder, at grafen for f^{-1} fås ved at spejle grafen for f i linien y = x. (Se figur A.2.3).

Bevis:

Grafen Gr(f) for f er mængden af de punkter (x,y), hvor y = f(x), og tilsvarende har vi, at Gr(f^{-1}) er mængden af de punkter (x,y), hvor $y = f^{-1}(x)$. Vi ser altså, at
$\mathrm{Gr}(f) = \{(x,y) \mid y = f(x)\}$ og $\mathrm{Gr}(f^{-1}) = \{(x,y) \mid y = f^{-1}(x)\}$.
Da $y = f^{-1}(x) \Leftrightarrow x = f(y)$, kan Gr($f^{-1}$) også anføres således:
$\mathrm{Gr}(f^{-1}) = \{(x,y) \mid x = f(y)\}$.

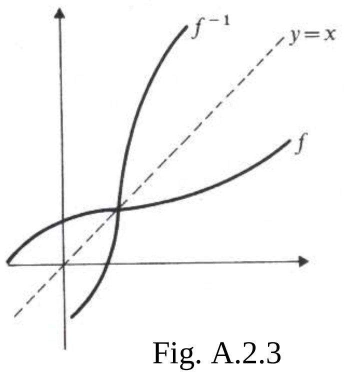


Fig. A.2.3

Ved sammenligning af Gr(f) og Gr(f^{-1}), ser vi, at den eneste forskel på de to mængder er, at der er byttet rundt på x og y efter den lodrette streg i opskrivningen. Da en spejling i y = x netop har denne egenskab (at den for et givet punkt bytter rund på x- og y-værdien (overvej !)), er sætningen hermed bevist. ♥

Som det fremgår af definition A.2.2 og figur A.2.2 gælder der følgende sætning (overvej !):

Sætning A.2.11.

Lad f være en injektiv funktion. Da gælder, at

$$f^{-1}(f(x)) = x \quad \text{for alle } x \in \mathrm{Dm}(f) \qquad \text{og} \qquad f(f^{-1}(y)) = y \quad \text{for alle } y \in \mathrm{Vm}(f)$$

hvilket også kan formuleres således:

$$(f^{-1} \circ f)(x) = x \quad \text{for alle } x \in \mathrm{Dm}(f) \qquad \text{og} \qquad (f \circ f^{-1})(y) = y \quad \text{for alle } y \in \mathrm{Vm}(f)$$

Funktionerne f og f^{-1} er altså hinandens omvendte funktioner.

I forbindelse med monotoni gælder følgende sætning:

Sætning A.2.12.

Lad f være en given funktion.
1) Hvis f er voksende, så er f^{-1} også voksende
2) Hvis f er aftagende, så er f^{-1} også aftagende.

Bevis:
Vi beviser pkt. 1). Pkt. 2) vises på samme måde og overlades til læseren som en øvelse.
Lad da y_1 , $y_2 \in$ Vm(f) være vilkårligt valgt, så $y_1 < y_2$. Vi skal da vise, at $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$.
Dette gør vi ved et såkaldt indirekte bevis. Vi antager altså, at $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$ ikke gælder, og vil så argumentere for, at dette fører til en modstrid.
Vi antager derfor, at $f^{-1}(y_1) \geq f^{-1}(y_2)$. Da f er voksende får vi hermed at $f(f^{-1}(y_1)) \geq f(f^{-1}(y_2))$, dvs. $y_1 \geq y_2$. Men dette er i strid med, at vi ved, at $y_1 < y_2$.
Antagelsen $f^{-1}(y_1) \geq f^{-1}(y_2)$ er altså ikke holdbar, hvormed vi får det ønskede: $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$.
Hermed er sætningen bevist. ♥

Læseren opfordres til at efterprøve/kontrollere denne sætnings indhold ud fra de eksempler på omvendte funktioner, som har været omtalt i eksempler og øvelser i det ovenstående.

Kontinuitet og differentiabilitet af omvendte funktioner.
Vi vil nu til sidst vende os mod kontinuitet og differentiabilitet (og differentiation) i forbindelse med omvendte funktioner. Vi beviser først følgende sætning om kontinuitet:

Sætning A.2.13.

Lad f være en funktion, som er monoton og kontinuert i et interval I, og lad x_o være et vilkårligt valgt indre punkt i I. Da er f^{-1} kontinuert i $y_o = f(x_o)$

Bevis:
Vi beviser sætningen for en voksende funktion. Beviset for situationen, hvor f er aftagende, overlades som en øvelse til læseren. (Der skal kun laves få ændringer i det følgende !).
Da f er voksende, er den også injektiv og har dermed en omvendt funktion f^{-1}.
Vi skal ifølge definitionen på kontinuitet bevise, at for en vilkårlig valgt omegn $\omega(f^{-1}(y_o))$ om $f^{-1}(y_o)$ findes en omegn $\omega(y_o)$ om y_o, så: $y \in \omega(y_o) \Rightarrow f^{-1}(y) \in \omega(f^{-1}(y_o))$.
Da $x_o = f^{-1}(y_o)$, kan dette også udtrykkes således: Vi skal bevise, at for en vilkårligt valgt omegn $\omega(x_o)$ om x_o findes en omegn $\omega(y_o)$ om y_o, så: $y \in \omega(y_o) \Rightarrow f^{-1}(y) \in \omega(x_o)$.

Lad derfor $\omega(x_o)$ være en vilkårlig valgt omegn om x_o , og lad ε være radius i $\omega(x_o)$, dvs. $\omega(x_o) =]x_o - \varepsilon;\ x_o + \varepsilon[$. Da x_o er et indre punkt i I, kan vi antage, at $\omega(x_o) \subseteq I$, samt at endepunkterne $x_o - \varepsilon$ og $x_o + \varepsilon$ begge tilhører I, idet omegnen ellers blot gøres mindre.
Lad $y_1 = f(x_o - \varepsilon)$ og $y_2 = f(x_o + \varepsilon)$.

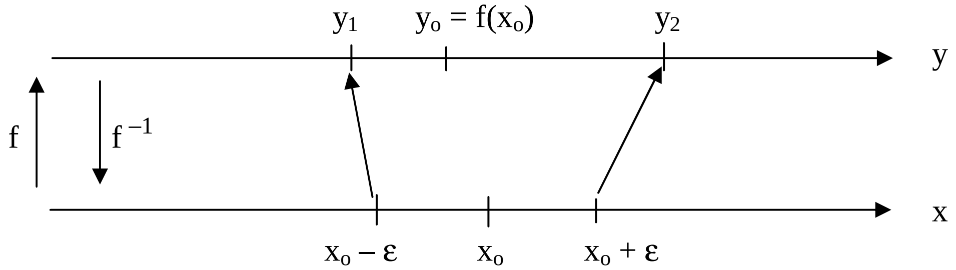


Fig. A.2.4

Da f er voksende, er $y_1 < y_o < y_2$, og da f er kontinuert i I, er alle tal mellem y_1 og y_2 funktionsværdier af et eller andet x imellem $x_o - \varepsilon$ og $x_o + \varepsilon$. Vi ser derfor, at $[y_1 ; y_2] \subseteq Vm(f)$. Lad nu $\omega(y_o)$ være den omegn om y_o, som har det mindste af tallene $y_o - y_1$ og $y_2 - y_o$ som radius (se figur A.2.4). Vi har da også, at $\omega(y_o) \subseteq Vm(f)$, hvormed f^{-1} er defineret i hele $\omega(y_o)$.
Lad nu $y \in \omega(y_o)$ være vilkårlig valgt. Ifølge konstruktionen af $\omega(y_o)$, af y_1 og y_2, og af $\omega(x_o)$, samt ifølge sætning A.2.12 1) får vi, at:

$$y \in \omega(y_o) \;\Rightarrow\; y_1 < y < y_2 \;\Rightarrow\; f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y) < f^{-1}(y_2) \;\Rightarrow$$

$$x_o - \varepsilon < f^{-1}(y) < x_o + \varepsilon \;\Rightarrow\; f^{-1}(y) \in \omega(x_o)$$

hvormed det ønskede er bevist. ♥

Vi vil herefter se på differentiabilitet og differentiation af omvendte funktioner. Vi starter med at se på et eksempel.

<u>**Eksempel A.2.14**</u>
Betragt funktionen $f(x) = x^2$, $x > 0$.
f er injektiv og $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$, $y > 0$, og der gælder, at : $x^2 = y$ eller $x = \sqrt{y}$.
Da $\left(\sqrt{y}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{y}}$ og $\left(x^2\right)' = 2x$ får vi hermed, at:

$$(f^{-1})'(y) = \left(\sqrt{y}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{y}} = \frac{1}{2x} = \frac{1}{(x^2)'} = \frac{1}{f'(x)}$$

Lad x_o og y_o være valgt, så $f(x_o) = y_o$ og $x_o = f^{-1}(y_o)$ (dvs. $x_o^2 = y_o$ eller $x_o = \sqrt{y_o}$).
Ifølge det netop viste gælder da, at:

$$(f^{-1})'(y_o) = \frac{1}{f'(x_o)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_o))}$$

Hvis vi f.eks. vil finde: $(f^{-1})'(9)$, så kan dette beregnes som:

$$(f^{-1})'(9) = \frac{1}{f'(f^{-1}(9))} = \frac{1}{f'(\sqrt{9})} = \frac{1}{f'(3)} = \frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{6}$$

hvilket stemmer fint overens med, at kvadratrodsfunktionens differentialkvotient i tallet 9 er $\frac{1}{6}$. ♥

Inspireret af eksempel A.2.14 vil vi opstille og bevise følgende sætning:

<u>**Sætning A.2.15.**</u>

Lad f være en funktion, som er monoton og kontinuert i et interval I.
Hvis f er differentiabel i et punkt $x_o \in$ I, og hvis $f'(x_o) \neq 0$, så er f^{-1} differentiabel i $y_o = f(x_o)$, og der gælder, at

$$(f^{-1})'(y_o) = \frac{1}{f'(x_o)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_o))}$$

Bevis:
På samme måde som i beviset for sætning A.2.13 ses, at der findes en omegn $\omega(y_o)$ om y_o , hvor f^{-1} er defineret ($\omega(y_o) \subseteq Vm(f)$). Vi ser nu på differenskvotienten for f^{-1} med udgangspunkt i y_o, og vi vælger i det følgende kun $y \in \omega(y_o)$, hvormed der findes tilsvarende $x \in I$, så $f(x) = y$.
Da f er monoton, er f^{-1} også monoton, hvormed $y \neq y_o$ giver os, at $f^{-1}(y) \neq f^{-1}(y_o)$, og dermed: $f^{-1}(y) - f^{-1}(y_o) \neq 0$. Vi kan derfor tillade os at foretage følgende omskrivning:

$$\frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_o)}{y-y_o} = \frac{1}{\dfrac{y-y_o}{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_o)}} = \frac{1}{\dfrac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}}$$

Vi skal undersøge, om differenskvotienten for f^{-1} har en grænseværdi for $y \to y_o$, og i givet fald bestemme denne. Ifølge sætning A.2.13 ved vi, at f^{-1} er kontinuert i y_o. Dette betyder, at:

$$y \to y_o \quad \Rightarrow \quad f^{-1}(y) \to f^{-1}(y_o) \quad \Rightarrow \quad x \to x_o$$

og da f er differentiabel i x_o for vi hermed, at: $\dfrac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o} \to f'(x_o)$ for $y \to y_o$

Anvendes dette i den ovenstående omskrivning af differenskvotienten for f^{-1} ser vi alt i alt, at:

$$\frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_o)}{y-y_o} \to \frac{1}{f'(x_o)} \quad \text{for } y \to y_o$$

hvor vi udnytter, at $f'(x_o) \neq 0$. Da $x_o = f^{-1}(y_o)$, er sætningen hermed bevist. ♥

<u>Eksempel A.2.16.</u>
Sætning A.2.15 kan også bevises på følgende måde:
Da f er differentiabel i x_o, har grafen for f en tangent i punktet $(x_o , f(x_o))$. Dermed har grafen for f^{-1} også en tangent i punktet $(y_o , f^{-1}(y_o))$, idet grafen for f^{-1} ifølge sætning A.2.10 fås ved at spejle grafen for f i linien y = x. Og sådan en spejling bevarer grafens geometriske egenskaber. (se figur A.2.5).
Idet tangenten i punktet $(x_o , f(x_o))$ kaldes *l* , ser vi, at *l* spejles over i en linie *m*, som er tangent til grafen for f^{-1} i punktet $(y_o , f^{-1}(y_o))$.

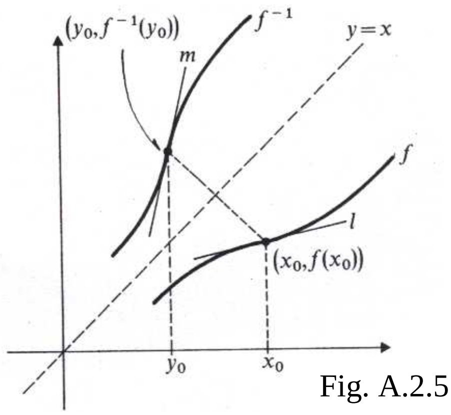


Fig. A.2.5

Da en linie af formen y = ax + b, a ≠ 0, spejles over i linien: $y = \frac{1}{a}x - \frac{b}{a}$ (jfr. sætning A.2.6), og da hældningskoefficienten for *l* er $f'(x_o)$, ser vi, at hældningskoefficienten for *m* er lig med $\frac{1}{f'(x_o)}$. Men det vil netop sige, at f^{-1} er differentiabel i y_o med differentialkvotienten $\frac{1}{f'(x_o)}$. Hermed er sætningen igen bevist. ♥

<u>Eksempel A.2.17.</u>
<u>Udtrykket</u> for differentialkvotienten af f^{-1} (men <u>ikke</u> differentiabiliteten af f^{-1}), kan bestemmes ud fra reglen om differentiation af sammensatte funktioner, idet vi ifølge sætning A.2.11 har, at: $y = (f \circ f^{-1})(y)$, og dermed: $1 = (f \circ f^{-1})'(y) = f'(f^{-1}(y)) \cdot (f^{-1})'(y)$. Ved indsættelse af y_o og x_o, og ved division med $f'(f^{-1}(y_o))$ (som er lig $f'(x_o)$) får vi udtrykket i sætning A.2.15. ♥

Appendix 3: Sammensatte funktioner.

Eksempel A.3.1.

Hvis vi betragter en funktion som: h(x) = $\sqrt{3x+9}$, så udregnes funktionsværdier for denne funktion ved først at udregne værdien af 3x + 9 , og derefter tage kvadratroden af denne værdi. Vi kan altså sige, at h(x) er "sammensat af" funktionerne f(x) = 3x + 9 og g(x) = $\sqrt{x}$.

Hvis vi omvendt ser på funktionerne: f(x) = $2\sqrt{x}+5$ og g(x) = x^2 + 3x, så er det muligt at sammensætte disse to funktioner på følgende måde: Uanset hvilken x-værdi vi indsætter i f(x), så vil resultatet, dvs. $2\sqrt{x}+5$, være indeholdt i Dm(g), idet denne er lig med R. Det vil derfor være muligt at udregne g af f(x), dvs. g(f(x)).
Lad os f.eks. prøve med x = 9. Vi får da: f(9) = $2\sqrt{9}+5$ = 11. Da 11 $\in$ Dm(g), kan vi udregne g(11) = 11^2 +3·11 = 154. Vi kan derfor skrive: 154 = g(11) = g(f(9)).
Lad os dernæst prøve med x = 7. Vi får da: f(7) = $2\sqrt{7}+5$ (= 10,2915). Da $2\sqrt{7}+5 \in$ Dm(g), kan vi udregne g($2\sqrt{7}+5$) = $(2\sqrt{7}+5)^2 + 3\cdot(2\sqrt{7}+5)$ = 68 + $26\sqrt{7}$ (= 136,79). Vi kan derfor skrive: 68 + $26\sqrt{7}$ = g($2\sqrt{7}+5$) = g(f(7)).
Vi ser, at når vi først har udregnet værdien af f(x), så indsættes denne værdi i stedet for den variable i funktionsforskriften for g, og der regnes ud. Funktionen g har den virkning på den variable, at den dels opløfter den variable i anden potens, dels ganger den med 3, og disse to størrelser lægges sammen. Lad os prøve generelt med et x $\in$ Dm(f). g(f(x)) kan udregnes på to (stort set ens) måder:

$$g(f(x)) = (f(x))^2 + 3\cdot f(x) = (2\sqrt{x}+5)^2 + 3\cdot(2\sqrt{x}+5) = 4x + 26\sqrt{x} + 40$$

eller

$$g(f(x)) = g(2\sqrt{x}+5) = (2\sqrt{x}+5)^2 + 3\cdot(2\sqrt{x}+5) = 4x + 26\sqrt{x} + 40$$

Vi ser altså, at funktionsudtrykket for den sammensatte funktion er: g(f(x)) = 4x + $26\sqrt{x}$ + 40
Læseren opfordres til at udregne g(f(9)) og g(f(7)) og sammenligne med det ovenstående. ♥

Eksempel A.3.2.

Hvis vi igen ser på funktionerne: f(x) = 3x + 9 og g(x) = $\sqrt{x}$, så er det muligt at udregne g(f(2)), idet f(2) = 15 $\geq$ 0, og dermed er f(2) $\in$ Dm(g). Vi får: g(f(2)) = g(15) = $\sqrt{15}$ (= 3,873).
Det er derimod <u>ikke</u> muligt at udregne g(f(–5)), idet f(–5) = – 6 $\notin$ Dm(g).
Vi ser, at definitionsmængden for g(f(x)) er mængden af x $\in$ Dm(f) som opfylder, at f(x) $\in$ Dm(g), dvs. f(x) $\geq$ 0, hvilket betyder, at x $\geq$ –3. ♥

Situationen i eksempel A.3.1 og A.3.2 kan generaliseres således:
Lad f og g være to givne funktioner, og lad x $\in$ Dm(f). Hvis f(x) $\in$ Dm(g), så kan vi finde g(f(x)):

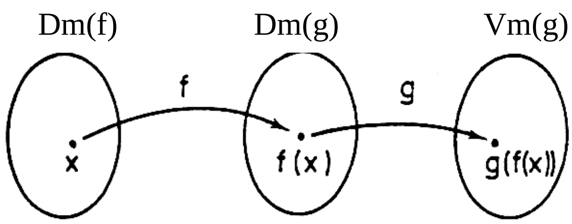


Fig. A.3.1

I denne forbindelse anføres følgende definition:

Definition A.3.3.

Lad f og g være to givne funktioner. Hvis der findes $x \in Dm(f)$, så $f(x) \in Dm(g)$, så defineres funktionen $g \circ f$ (læses: "g sammensat med f" eller blot: "g bolle f") på følgende måde (jfr. figur A.3.2)

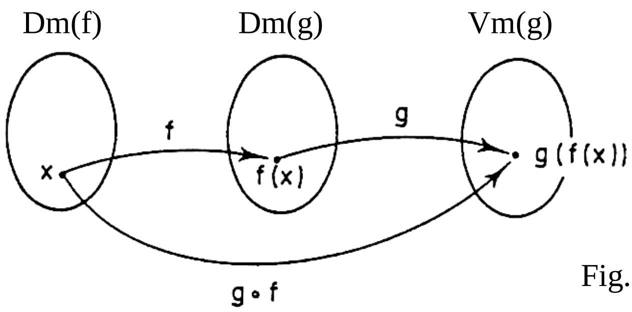


Fig. A.3.2

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) \quad \text{og} \quad Dm(g \circ f) = \{x \in Dm(f) \mid f(x) \in Dm(g)\}$$

Funktionen $g \circ f$ kaldes sammensætningen af f og g, og $g \circ f$ siges at være en sammensat funktion

Øvelse A.3.4.
Lad $f(x) = x^2 + 6$ og $g(x) = \frac{1}{2}x + 2$.
Vis at: $(g \circ f)(x) = \frac{1}{2}x^2 + 5$ og $(f \circ g)(x) = \frac{1}{4}x^2 + 2x + 10$. Bemærk, at $g \circ f \neq f \circ g$. ♥

Øvelse A.3.5.
Undersøg i hvert af følgende tilfælde, om vi kan danne $g \circ f$ eller $f \circ g$, og angiv i givet fald en funktionsforskrift for den/de sammensatte funktion(er). Husk definitionsmængden:

a) $f(x) = x - 3$ og $g(x) = 2x + 1$ b) $f(x) = \sqrt{x-7}$ og $g(x) = \frac{1}{2}x + 3$

c) $f(x) = \frac{1}{3}x$ og $g(x) = 3x$ d) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ og $g(x) = \sqrt{x+5}$

e) $f(x) = x^2 - 4$ og $g(x) = \dfrac{1}{x}$ f) $f(x) = -x^2 - 6$ og $g(x) = \sqrt{x+5}$ ♥

Som det fremgår af disse øvelser, gælder der almindeligvis, men ikke altid, at $g \circ f \neq f \circ g$.
I det følgende eksempel vil vi vise, hvordan mere end to funktioner kan sammensættes:

Eksempel A.3.6.
Lad $f(x) = x^3$, $g(x) = \sqrt{x} + 2$ og $h(x) = 5x - 10$. Hvis $x \geq 2$ er det muligt at udregne $f(g(h(x)))$:
$f(g(h(x))) = f(g(5x-10)) = f(\sqrt{5x-10} + 2) = (\sqrt{5x-10} + 2)^3$.
Resultatet betegnes: $(f \circ g \circ h)(x)$, så vi har: $(f \circ g \circ h)(x) = (\sqrt{5x-10} + 2)^3$, $x \geq 2$.
Det overlades som en øvelse til læseren at bestemme et udtryk for: $(g \circ f \circ h)(x)$ ♥

Øvelse A.3.7.
Angiv i hvert af følgende tilfælde funktionsforskrifter for to funktioner f og g, som opfylder, at:

a) $(f \circ g)(q) = \sqrt{q^2 + 7}$ b) $(f \circ g)(v) = (v^2 + 3)^2$

Angiv funktionsforskrifter for fire funktioner f, g, h og j, som opfylder, at:

c) $(f \circ g \circ h \circ j)(x) = (\sqrt{x^2 + 2} - 5)^4$ ♥

Øvelse A.3.8.
Lad $f(x) = \dfrac{1}{x+4}$, $g(x) = x^2 - 1$, $h(x) = 8x + 6$ og $j(x) = \sqrt{x+2}$

Bestem funktionsforskrifterne for funktionerne: $g \circ j \circ h$, $j \circ h \circ g$ og $j \circ f \circ g \circ h$ ♥

Kontinuitet og differentiabilitet ved sammensatte funktioner.
Vi vil nu vende os mod kontinuitet og differentiabilitet (og differentiation) i forbindelse med sammensatte funktioner. Vi beviser først følgende sætning om kontinuitet:

Sætning A.3.9.

Hvis g er kontinuert i x_o og f er kontinuert i $g(x_o)$, så er $f \circ g$ kontinuert i x_o

Bevis:
Vi bemærker først, at ifølge definition A.3.3 er $(f \circ g)(x_o) = f(g(x_o))$. For nemheds skyld indfører vi benævnelserne $y_o = g(x_o)$ og $z_o = f(g(x_o)) = f(y_o)$. Ifølge definitionen på kontinuitet skal vi bevise, at for en vilkårlig valgt omegn $\omega(z_o)$ findes en omegn $\omega(x_o)$, så: $x \in \omega(x_o) \Rightarrow f(g(x)) \in \omega(z_o)$.
Lad derfor $\omega(z_o)$ være en vilkårlig valgt omegn om z_o. Da f er kontinuert i y_o og da $z_o = f(y_o)$ findes en omegn $\omega(y_o)$, så: $y \in \omega(y_o) \Rightarrow f(y) \in \omega(z_o)$. Da g er kontinuert i x_o og da $y_o = g(x_o)$, ses tilsvarende, at der findes en omegn $\omega(x_o)$, så: $x \in \omega(x_o) \Rightarrow g(x) \in \omega(y_o)$. (Se figur A.3.3).

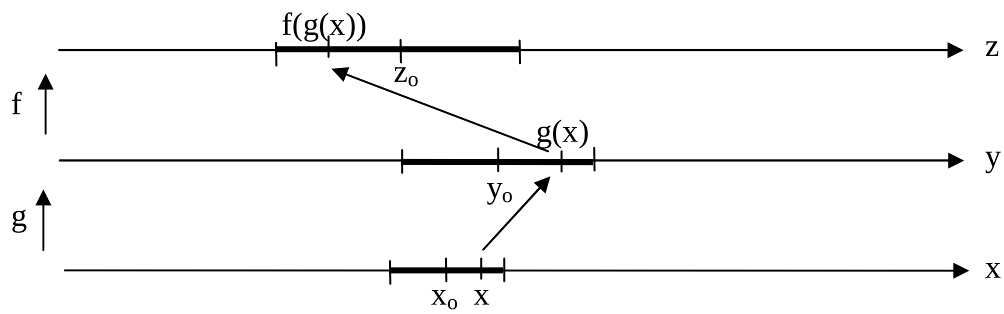


Fig. A.3.3

Vi ser dermed i alt, at: $x \in \omega(x_o) \Rightarrow g(x) \in \omega(y_o) \Rightarrow f(g(x)) \in \omega(z_o)$, hvormed det ønskede er vist.♥

Sætning A.3.10.

Hvis g er differentiabel i x_o og f er differentiabel i $g(x_o)$, så er $f \circ g$ differentiabel i x_o , og der gælder følgende regel:

$$(f \circ g)'(x_o) = f'(g(x_o)) \cdot g'(x_o)$$

Bevis: Vi bemærker først, at da f er differentiabel i $g(x_o)$, er f defineret i en omegn omkring $g(x_o)$ og dermed specielt i $g(x_o)$ selv, hvormed det er muligt at definere den sammensatte funktion $f \circ g$.
Da det gælder, at hvis en funktion er differentiabel i et punkt, så er den også kontinuert i dette punkt, får vi ifølge sætning A.3.9 og beviset herfor, at der findes en omegn $\omega(x_o)$, hvor $f \circ g$ er defineret. I de følgende betragtninger forudsættes, at $x \in \omega(x_o)$.

Vi vil gerne bevise, at differenskvotienten: $\dfrac{(f \circ g)(x) - (f \circ g)(x_o)}{x - x_o} = \dfrac{f(g(x)) - f(g(x_o))}{x - x_o}$ har en grænseværdi for x gående mod x_o og at denne grænseværdi er: $f'(g(x_o)) \cdot g'(x_o)$.
Vi omskriver differenskvotienten på følgende måde (svarende til, at vi ganger den med 1 !):

$$\frac{f(g(x)) - f(g(x_o))}{x - x_o} = \frac{f(g(x)) - f(g(x_o))}{x - x_o} \cdot \frac{g(x) - g(x_o)}{g(x) - g(x_o)} = \frac{f(g(x)) - f(g(x_o))}{g(x) - g(x_o)} \cdot \frac{g(x) - g(x_o)}{x - x_o}$$

Hvis vi sætter $y = g(x)$ og $y_o = g(x_o)$ så får vi, idet g er kontinuert i x_o, at: $y \to y_o$ for $x \to x_o$.
Kombineres dette med, at g er differentiabel i x_o og f er differentiabel i $y_o = g(x_o)$, så får vi:

$$\frac{f(g(x)) - f(g(x_o))}{x - x_o} = \frac{f(y) - f(y_o)}{y - y_o} \cdot \frac{g(x) - g(x_o)}{x - x_o} \to f'(y_o) \cdot g'(x_o) \quad \text{for } x \to x_o$$

hvormed det ønskede tilsyneladende er bevist. Problemet er bare, at dette bevis forudsætter, at der findes en omegn $\omega_1(x_o)$, hvorom der gælder: $x \in \omega_1(x_o) \Rightarrow g(x) \neq g(x_o)$, idet vi ellers kommer til at dividere med 0 i omskrivningen ovenfor. De fleste af de funktioner, vi normalt ser på, opfylder ganske vist det ønskede, men hvis g f.eks. er konstant i en omegn om x_o, så kan beviset ikke bruges. Hvis g er konstant i en omegn omkring x_o er det imidlertid let at se, at differenskvotienten for $f \circ g$ er 0 i denne omegn, hvormed dens grænseværdi giver 0. Da der samtidig gælder, at $g'(x_o) = 0$, er såvel differentiabiliteten som formlen også gældende her. Der findes imidlertid funktioner, som ikke er konstante, og som ikke opfylder det nævnte krav til beviset. For at dække sådanne tilfælde, skal beviset "skrues sammen" på en noget anden måde end vist ovenfor. Interesserede læsere henvises til nedenstående eksempel A.3.13, hvor der gives et generelt bevis. ♥

Eksempel A.3.11.

Vi vil finde differentialkvotienten for funktionerne: $F(x) = \sqrt{x^3 + 2x}$ og $H(x) = (\sqrt{x + \frac{1}{x}})^5$

Vi ser, at F er sammensat af funktionerne: $f(x) = \sqrt{x}$ og $g(x) = x^3 + 2x$. Ifølge sætning A.3.10 har vi, at $F'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{g(x)}} \cdot (3x^2 + 2) = \dfrac{1}{2\sqrt{x^3 + 2x}} \cdot (3x^2 + 2)$.

Bemærk, at F altså differentieres "udefra og indad", idet vi først differentierer $\sqrt{}$ i punktet "et eller andet", og det giver 1 divideret med 2 gange $\sqrt{}$ af "et eller andet". Og bagefter differentierer vi det der står under kvadratrodstegnet (det som før blev benævnt "et eller andet") og ganger resultaterne sammen. Dette kan kort skrives således: $(\sqrt{x^3 + 2x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x^3 + 2x}} \cdot (3x^2 + 2)$.

Hvis vi ønsker værdien af F′ i et tal, indsættes tallet på x's plads, altså f.eks. $F'(4) = \dfrac{50}{2\sqrt{72}} = 2{,}946$.

Vi bemærker, at H er sammensat af tre funktioner, men dette kan opfattes som om H er sammensat af to funktioner, hvoraf den ene så selv er sammensat af to funktioner. Når vi skal finde $H'(x)$ anvendes derfor samme filosofi, dvs. vi differentierer udefra og indefter og får dermed:

$$H'(x) = 5(\sqrt{x+\tfrac{1}{x}})^4 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x+\tfrac{1}{x}}} \cdot (1-\frac{1}{x^2})$$

Vi differentierer altså ”et eller andet” i 5. og får 5 gange ”et eller andet” i 4., derefter differentierer vi $\sqrt{\ }$ osv. osv. ♥

Øvelse A.3.12.

Bestem $h'(x)$ og derefter $h'(2)$ for hver af følgende funktioner:

a) $h(x) = (2x-3)^9$ b) $h(x) = \sqrt{(0{,}3x+1)^7}$ c) $h(x) = \sqrt{12-x^3}\cdot(x^2+4x)^4$ ♥

Eksempel A.3.13.

Som omtalt er der problemer med beviset for sætning A.3.10, hvis der ikke findes en omegn $\omega_1(x_o)$, hvorom det gælder, at: $x \in \omega_1(x_o) \Rightarrow g(x) \neq g(x_o)$. Spørgsmålet er altså, om der findes funktioner g, som opfylder det modsatte, dvs.: For enhver omegn om x_o findes der et x indeholdt i denne omegn, så $g(x) = g(x_o)$. Og svaret på dette spørgsmål er: Ja. Uden at gå dybere ind i sagen kan det bemærkes, at f.eks. $g(x) = (x-x_o)^2\sin(\frac{1}{x-x_o})$ (for $x \neq x_o$ og $g(x_o) = 0$) opfylder dette og er desuden differentiabel i x_o (Prøv at opskrive differenskvotienten og find grænseværdien $g'(x_o) = 0$).
Her følger et lidt mere kompliceret bevis for sætning A.3.10, hvor det nævnte problem er elimineret.

Vi sætter $y_o = g(x_o)$. Da f er differentiabel i y_o, er f defineret i en omegn $\omega(y_o)$. Der findes derfor en omegn $\omega_1(0)$ om 0 med samme radius som $\omega(y_o)$, hvor vi for hvert $s \in \omega_1(0)$ kan definere $\Delta f(s) = f(y_o+s) - f(y_o)$ og dermed definere: $T(s) = \frac{\Delta f(s)}{s} - f'(y_o)$ (for $s \neq 0$) og $T(0) = 0$.

Da f er differentiabel i y_o har vi, at $\frac{\Delta f(s)}{s} \to f'(y_o)$ for $s \to 0$, og dermed, at $T(s) \to 0$ for $s \to 0$.
Ifølge definitionen af T har vi for alle $s \in \omega_1(0)$, at: $f(y_o+s) - f(y_o) = \Delta f(s) = (f'(y_o) + T(s))\cdot s$
Da g er differentiabel i x_o, findes der en omegn $\omega_2(0)$, hvor vi for hvert $h \in \omega_2(0)$ kan definere: $\Delta g(h) = g(x_o+h) - g(x_o)$, og dermed får vi for $h \in \omega_2(0)$, at: $g(x_o+h) = g(x_o) + \Delta g(h)$
Da $\Delta g(h) \to 0$ for $h \to 0$ (idet g er differentiabel og dermed kontinuert i x_o) gælder der specielt, at der findes en omegn $\omega_3(0)$, så: $h \in \omega_3(0) \Rightarrow \Delta g(h) \in \omega_1(0)$. Lad $\omega(0) = \omega_2(0) \cap \omega_3(0)$.
Lad $F = f \circ g$. Vi skal undersøge differenskvotienten for F, og vi ser først på tælleren $\Delta F(h)$.
For $h \in \omega(0)$ gælder der: $\Delta F(h) = F(x_o+h) - F(x_o) = f(g(x_o+h)) - f(g(x_o))$, og da $g(x_o+h) = g(x_o) + \Delta g(h)$ ser vi (idet $g(x_o) = y_o$), at: $\Delta F(h) = f(y_o + \Delta g(h)) - f(y_o)$ for $h \in \omega(0)$.
Hvis vi derfor i det ovenstående erstatter s med $\Delta g(h)$, så får vi for $h \in \omega(0)$, at:
$f(y_o + \Delta g(h)) - f(y_o) = (f'(y_o) + T(\Delta g(h)))\cdot\Delta g(h)$. For $h \in \omega(0)$ gælder derfor alt i alt, at:

$$\frac{\Delta F(h)}{h} = \frac{(f'(y_o)+T(\Delta g(h)))\cdot\Delta g(h)}{h} = (f'(y_o)+T(\Delta g(h)))\cdot\frac{\Delta g(h)}{h}.$$

Da $T(\Delta g(h)) \to 0$ for $h \to 0$ og $\frac{\Delta g(h)}{h} \to g'(x_o)$ for $h \to 0$ ser vi, at: $\frac{\Delta F(h)}{h} \to f'(y_o)\cdot g'(x_o)$ for $h \to 0$, hvormed det ønskede er bevist. ♥

Appendix 4: Elasticitet.

Som mål for funktioners "følsomhed" overfor ændringer i den uafhængige variable anvendes ofte – og specielt i økonomisk orienterede sammenhænge – begrebet elasticitet:

Definition A.4.1.

Hvis en positiv funktion f får tilvæksten Δf, når den uafhængige variable får tilvæksten Δx med udgangspunktet x, så defineres (interval-)elasticiteten $E_f(x;\Delta x)$ på følgende måde:

$$E_f(x;\Delta x) = \frac{\frac{\Delta f}{f(x)}}{\frac{\Delta x}{x}}$$

hvor $\Delta f = f(x+\Delta x) - f(x)$.

Størrelsen $\frac{\Delta f}{f(x)}$ angiver den relative tilvækst i funktionsværdierne svarende til den relative tilvækst $\frac{\Delta x}{x}$ i den uafhængige variable.

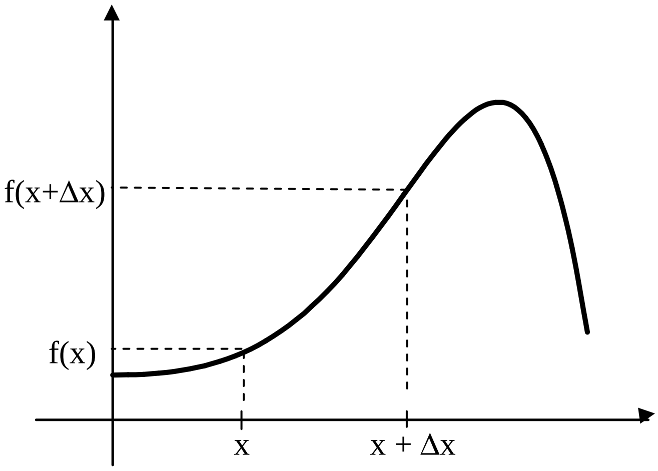


Fig. A.4.1

Elasticiteten angiver altså forholdet mellem den relative vækst i funktionsværdierne og den relative vækst i den uafhængige variable (x-værdierne). Når man benytter elasticitetsbegrebet, vil man altså hellere arbejde med relativ (procentuel) vækst end med absolutte størrelser.
Hvis der f.eks. for en funktion f gælder, at $E_f(21;4) = 0{,}7$, så betyder det, at med udgangspunkt 21 og en tilvækst på $\Delta x = 4$ er den relative vækst i funktionsværdierne $\frac{7}{10}$ gange så stor som den relative vækst i den variable, som bevirkede ændringen i funktionen. (I det konkrete tilfælde er den relative funktionstilvækst altså $\frac{2}{15}$, dvs. ca.13 % (kontrollér dette !)).
Elasticitet af den type, der betragtes i det ovenstående, kaldes som anført for interval-elasticitet, idet der er tale om en tilvækst over et interval af bredden Δx.
Hvis derimod Δx er ganske lille ($\Delta x \approx 0$), så fremkommer det man kalder punkt-elasticitet. Vi vil undersøge denne lidt nærmere, så vi ser på følgende omskrivning af $E_f(x;\Delta x)$ fra definition A.4.1:

$$E_f(x;\Delta x) = \frac{\Delta f}{f(x)} \cdot \frac{x}{\Delta x} = \frac{\Delta f}{\Delta x} \cdot \frac{x}{f(x)} \approx f'(x) \cdot \frac{x}{f(x)}$$

hvor vi har anvendt, at $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ stort set er det samme som $f'(x)$, når $\Delta x \approx 0$. I denne situation udelades Δx i opskrivningen efter E'et, så for punkt-elasticiteten $E_f(x)$ får vi alt i alt:

Definition A.4.2.

Punkt-elasticiteten $E_f(x)$ for en funktion f i et punkt x er givet ved: $\quad E_f(x) = f'(x) \cdot \frac{x}{f(x)}$

Vi skal i denne bog kun arbejde med punkt-elasticitet og vi vil kort omtale den som elasticiteten. $E_f(x)$ beskriver funktionens "opførsel" i umiddelbar nærhed af punktet x. Hvis der f.eks. gælder, at $E_f(12) = 0{,}3$, så betyder det, at den relative vækst i funktionsværdierne (når vi er i nærheden af 12), er 0,3 gange så stor som den relative vækst i den variable, som fremkaldte ændringen i funktionen.

Eksempel A.4.3.

a) Hvis $f(x) = ax + b$, så er: $E_f(x) = \dfrac{ax}{ax+b}$ (kontrollér).

Hvis vi f.eks. har, at: $f(x) = -0{,}8x + 2000$, så er: $E_f(x) = \dfrac{-0{,}8x}{-0{,}8x+2000}$, hvoraf vi f.eks. ser, at: $E_f(100) = -0{,}0417$, $E_f(500) = -0{,}25$ og $E_f(2000) = -4$.
Hvis vi f.eks. ud fra x = 500 forøger x-værdien med 2 %, så giver $E_f(500) = -0{,}25$, at funktionsværdien aftager/falder med $0{,}25 \cdot 2\% = 0{,}5$ %.

Det overlades som en øvelse til læseren at tegne den del af grafen for f, der ligger i 1. kvadrant, markere de tre omtalte punkter på grafen og anføre elasticiteten udfor punkterne, samt kommentere resultatet. (Hvad sker der med elasticiteten for $x \to 0+$ og for $x \to 2500-$? Kommentér.)

b) Hvis $g(x) = b \cdot x^r$, så er: $E_g(x) = g'(x) \cdot \dfrac{x}{g(x)} = b \cdot r \cdot x^{r-1} \cdot \dfrac{x}{b \cdot x^r} = r$, dvs. elasticiteten er konstant lig med r uanset værdien af x. Vi siger, at funktionen g er isoelastisk.
Hvis f.eks. $g(x) = 15000 \cdot x^{-2,3}$, så er $E_g(x) = -2{,}3$ for alle x, hvormed vi f.eks. ser, at hvis vi ud fra en vilkårlig x-værdi forøger denne værdi med 0,8 %, så formindskes funktionsværdien med $-2{,}3 \cdot 0{,}8$ % = 1,84 %.

c) Hvis $h(x) = b - a \cdot e^{kx}$, så er $E_h(x) = -ak \cdot e^{kx} \cdot \dfrac{x}{b - a \cdot e^{kx}} = \dfrac{-akx \cdot e^{kx}}{b - a \cdot e^{kx}}$.

Hvis f.eks. $h(x) = 6000 - 1{,}3 \cdot e^{0,002 \cdot x}$, så er $E_h(x) = \dfrac{-0{,}0026 \cdot x \cdot e^{0,002x}}{6000 - 1{,}3 \cdot e^{0,002x}}$, hvoraf vi f.eks. ser,

at $E_h(500) = -0{,}000589$, $E_h(1000) = -0{,}0032$, $E_h(1800) = -0{,}0288$ og $E_h(3600) = -2{,}94$.

Det overlades som en øvelse til læseren at tegne den del af grafen for h, der ligger i 1. kvadrant, markere de fire omtalte punkter på grafen og anføre elasticiteten udfor punkterne, samt kommentere resultatet. ♥

En "lille" elasticitet betyder ringe påvirkning af funktionsværdierne som resultat af forandring i den uafhængige variable, og tilsvarende kommentar gælder for en "stor" elasticitet. Der anvendes ofte følgende sprogbrug:
En funktion f siges at være:

- fuldstændig elastisk i x, når $|E_f(x)| \approx \infty$
- elastisk i x, når $|E_f(x)| > 1$
- neutral-elastisk i x, når $|E_f(x)| \approx 1$
- uelastisk i x, når $|E_f(x)| < 1$
- fuldstændig uelastisk i x, når $|E_f(x)| \approx 0$.

Opgavesamling – teoretiske opgaver.

Kapitel 1.

1.1 Bestem følgende tal: $\log_6(36)$, $\log_2(1024)$ og $\log_{10}(0{,}00001)$

1.2 Bestem værdien af a i hver af følgende ligninger: $\log_a 5 = 1$, $\log_a 27 = 3$, $\log_4 a = 2$

1.3 Omskriv følgende udtryk, hvor a og b er givne tal:
$\log_a(a^3 \cdot b^3)$, $\log_3(a^3 \cdot b^3)$, $\log_a(3ab)$, $\log_3(3ab)$

1.4 Bestem ln til hvert af følgende tal: e^2 , e^3 , $\sqrt{e}$, e^{-1} , e^{-2} , $\dfrac{\sqrt{e}}{e^3}$, $(\sqrt{e})^5$

1.5 Reducér følgende udtryk mest muligt:

a) $\dfrac{2\ln(e^7)+\ln(e^3)}{\ln(\sqrt[5]{e})-\ln(e^{-2})}$ b) $\dfrac{\ln(48x)-\ln(3x^2)}{\ln(256)+\frac{2}{3}\ln(x^{-3})}$

1.6 Reducer følgende udtryk mest muligt: $\dfrac{\log\left(\dfrac{b-a}{\sqrt{a}}\right)+\log\left(\dfrac{b^6}{b-a}\right)-11\cdot\log\left(\sqrt{b}\right)}{\log\left(\sqrt{b-a}\right)}$

1.7 Tegn i samme koordinatsystem graferne for funktionerne: $\log_{4,3}$ og $\log_{8,1}$

1.8 Bestem følgende tal med fire betydende cifre v.hj.a. en regnemaskine:
$5^{\sqrt{2}}$, $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$, $0{,}5^{-0{,}6}$, 2^{-e} , $(\ln 3)^{\ln 3}$, e^{π} , π^e , $\left(\frac{1}{7}\right)^{\frac{1}{7}}$, $(\sqrt{3})^{8{,}61}$, $1{,}1^{2{,}2}$

1.9 Løs følgende ligninger:

a) $e^x = 4$ b) $5^x = 10$ c) $e^x = e^{-x}$ d) $4^x = 5\cdot 2^x$
e) $7^x = 3^x$ f) $5^{x+1} = 8$ g) $5^{x+1} = 6^{x-2}$ h) $4^{7x} = 9$

1.10 Løs følgende ligninger:

a) $2^{2x} - 6\cdot 2^x + 5 = 0$ b) $\dfrac{e^x+2}{e^x} = 3-\frac{1}{2}e^x$

c) $2\cdot e^x - 6\cdot e^{-x} - 1 = 0$ d) $5e^{-5x} - 2e^{-2x} = 0$

1.11 Løs følgende ligningssystemer med 2 ubekendte:

a) $2^x = 5^y$ og $3^x = 5\cdot 4^y$ b) $3^{x+1} = 8^{y-1}$ og $4^x = 6^y$

1.12 Løs følgende ligninger:

a) $\log x = 2{,}3$ b) $\ln x + \log x = 8$ c) $\log_3 x = -1{,}4$

d) $\log_4(x+4) = 2$ e) $\log_4(x) + 4 = 2$ f) $\ln(x^2) + 2\ln x = 5$

g) $3\log_2(x^6) - 2\log_2(x^3) = 9$ h) $\log(\sqrt{x}) + \log(x^2) = 0{,}2$ i) $\ln(\sqrt[4]{x}) + \ln(\sqrt[6]{x}) = 1$

1.13 Løs ligningerne:

a) $(\ln x)^2 + 4\ln x - 5 = 0$ b) $\dfrac{\ln(x^2)+2}{\ln x} = 1 + \ln(x^3)$

1.14 Bestem tallet a, så ligningen: $\frac{1}{4}a^x - 16a^{-x} = 3$ har løsningen ln2.

1.15 Det kan bevises, at: $(1+\frac{x}{n})^n \to e^x$ for $n \to \infty$.

Efterprøv denne formel ved på regnemaskinen at bestemme værdierne af e^x og af $(1+\frac{x}{n})^n$ for:

a) x = 2, og n = 5, n = 50, n = 5000 , n = 500.000
b) x = 5, og n = 5, n = 50, n = 5000 , n = 500.000

1.16 a) Om en eksponentialfunktion f er givet, at dens graf går igennem punktet: $(6, \frac{729}{65})$.
Bestem den eksakte værdi af f(12) og af f(18)
b) Om en eksponentialfunktion g er givet, at g(2,4) = 1,6435.
Bestem værdierne: g(7) og g(11).

1.17 Løs følgende ligninger:

a) $12\cdot 3^x = 84$ b) $0{,}63\cdot 0{,}8^x = -1{,}78$ c) $200\cdot 100^x = 4$ d) $\dfrac{21\cdot 2{,}4^x}{13{,}6\cdot 0{,}8^x} = 30$

1.18 Løs følgende uligheder:

a) $\ln x < 1{,}92$ b) $5e^x \geq 11$ c) $\ln(x^2) + \ln x \geq 5$

d) $e^{2x} - 4e^x + 3 < 0$ e) $3^x + \dfrac{9}{3^x} < 10$ f) $\log_5(\sqrt{x}) + \log_8(x) > 10$

1.19 Bestem funktionsforskrifterne for de eksponentielle vækstfunktioner f, g og h, hvorom det gælder, at:
a) f(20) = 12 og f(34,6) = 100
b) g(–34) = 809 og g(11) = 19,6
c) h(1,23) = 0,0078 og h(82,3) = 0,019
Beregn funktionsværdien af tallet 100 for alle tre funktioner.

1.20 En funktion er givet ved: $g(x) = b\cdot a^x$, hvor $a, b \in R_+$
a) Beregn a og b, idet vi ved, at g(2,8) = 9 og g(4,2) = 3
b) Løs ligningen: g(x) = 5,63
c) Beregn den relative funktionstilvækst svarende til en tilvækst på 4,1 i den uafhængige variable.

1.21 Bestem den relative funktionstilvækst svarende til den absolutte tilvækst h = 1,3 for hver af de følgende eksponentielle vækstfunktioner:

a) $f(x) = 56 \cdot 1{,}82^x$ b) $f(x) = 10{,}9 \cdot 0{,}88^x$ c) $f(x) = 230 \cdot 1{,}1^x$

d) $f(x) = 4000 \cdot 0{,}65^x$ e) $f(x) = 0{,}75 \cdot 2{,}3^x$ f) $f(x) = 18 \cdot e^{-0{,}93x}$

Løs samme opgave, idet den absolutte tilvækst nu er h = – 0,6

1.22 a) Bestem fremskrivningsfaktoren svarende til tilvæksten 5 for hver af funktionerne i opgave 1.21.
b) Bestem vækstraten for hver af funktionerne i opgave 1.21.

1.23 Om en størrelse Q vides, at den aftager med 8 % pr. enhed, samt at Q(4) = 2300.
Bestem en forskrift for Q, og beregn Q(13).

1.24 Skitsér graferne for funktionerne: $f(x) = 52 \cdot e^{-0{,}64x}$ og $g(x) = 34 \cdot e^{0{,}37x}$
Find tallene b og c som opfylder, at: $f(x) = 52 \cdot b^x$ og $g(x) = 34 \cdot c^x$
Bestem halveringskonstanten for f og fordoblingskonstanten for g.
Løs ligningen: f(x) = g(x).

1.25 Bestem halverings- eller fordoblingskonstanterne for følgende funktioner:

a) $f(x) = 2{,}25 \cdot 3{,}8^{-x}$ b) $f(x) = 500 \cdot e^{0{,}5x}$ c) $f(x) = 0{,}39 \cdot 0{,}84^x$

d) $f(x) = 22 \cdot 1{,}6^x$ e) $f(x) = 4{,}8 \cdot 2^{\frac{x}{5}}$ f) $f(x) = 0{,}672 \cdot 3^{\frac{5-x}{8}}$

1.26 Bestem forskrifterne for de eksponentielle vækstfunktioner f, g, h og j, hvorom det gælder, at:
a) f(19) = 0,8 og f har fordoblingskonstanten 17
b) g(–3) = 28 og g har halveringskonstanten 11,6
c) h(1000) = 23568 og h har fordoblingskonstanten 478
d) j(50) = 50 og j har halveringskonstanten 0,9.
Beregn funktionsværdien af tallet –20 for hver af de fire funktioner.

1.27 Fordoblingskonstanten for en eksponentielt voksende funktion g er lig med 5,5 og g(2,8) = 11
a) Find en funktionsforskrift for g
b) Løs ligningen: g(x) = 3
c) Løs uligheden $g(x) \leq 20$
d) Hvor stor en tilvækst skal den uafhængige variable have for at give funktionen en relativ tilvækst på 80 % ?

1.28 Om funktionen $f(x) = a \cdot b^x$ er givet, at f(–1,6) = 300, at f er aftagende, samt at halveringskonstanten er 9.
a) Find a og b.
b) Løs uligheden: f(x) > 105
c) Beregn den relative funktionstilvækst svarende til en tilvækst på 3,7 i den uafhængige variable.
d) Beregn den tilvækst i den uafhængige variable, der giver en relativ tilvækst på –17 %.

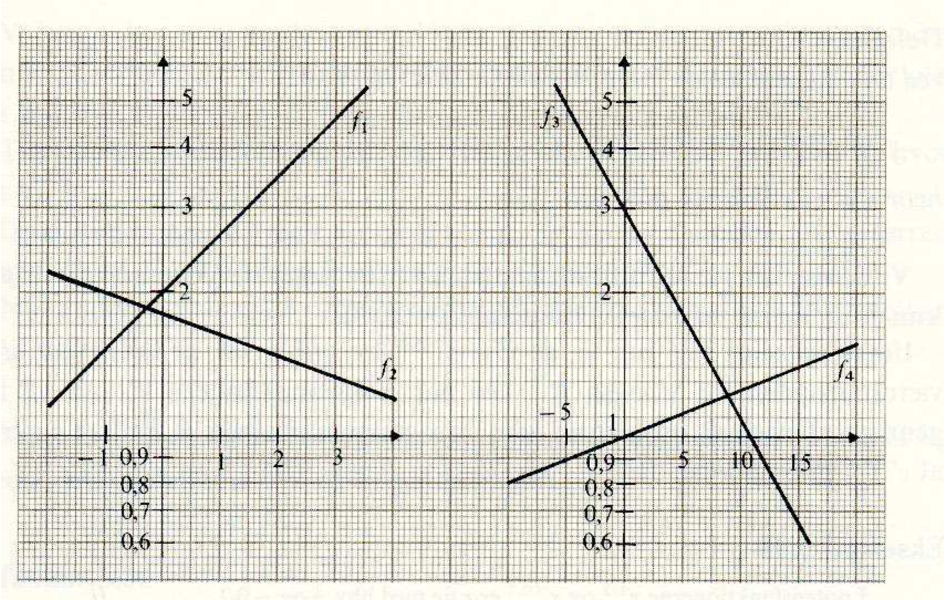
1.29 Indtegn graferne for funktionerne e^x og $8e^{\frac{1}{2}x}$ i et enkeltlogaritmisk koordinatsystem og bestem deres fordoblingskonstanter v.hj.a. grafen.
Løs v.hj.a. grafen ligningen: $e^x = 8e^{\frac{1}{2}x}$. Løs dernæst den samme ligning ved beregning.

1.30 Indtegn graferne for følgende funktioner såvel i et almindeligt koordinatsystem som i et enkeltlogaritmisk koordinatsystem (udvælg passende delmængder af definitionsmængderne ved tegningen af graferne):

a) $f(x) = 12 \cdot 2^x$ b) $g(x) = 310 \cdot 0{,}8^x$ c) $h(x) = 7 \cdot e^{-\frac{1}{2}x}$ d) $j(x) = 2x + 1$

Bestem eventuelle halverings- eller fordoblingskonstanter.

1.31 Find en funktionsforskrift for hver af funktionerne f_1 , f_2 , f_3 og f_4 på nedenstående figur og bestem (aflæs og beregn) halverings- eller fordoblingskonstanter.



1.32 Funktionen h er givet ved: $h(t) = \begin{cases} 20 \cdot 1{,}8^t & , \ t \le 2 \\ 180 \cdot 0{,}6^t & , \ t > 2 \end{cases}$

a) Tegn (et passende udsnit af) grafen for h i et enkeltlogaritmisk koordinatsystem.
b) Løs ligningen: h(t) = 2
c) Bestem Vm(h).

1.33 Løs følgende ligninger:
a) $x^{-1,8} = 5$ b) $28{,}6 \cdot x^{2,9} = 211$ c) $3 \cdot x^{0,5} = 8 \cdot x^{-0,7}$ d) $3 \cdot x^{0,5} + 5 = 2 \cdot x^{-0,5}$

1.34 Løs følgende uligheder:

a) $x^{2,6} \le 20$ b) $10 \cdot x^{1,5} > 86{,}9$ c) $4 \cdot x^{-\frac{1}{3}} + 9 \le 17{,}6$

1.35 a) Bestem forskrifterne for potensfunktionerne f, g og h som opfylder:
$f(1{,}4) = 2{,}8379$, $g(5) = 0{,}61703$ og $h(6{,}1) = 2{,}95936$
b) Tegn graferne for de tre funktioner.
c) Bestem en forskrift for de omvendte funktioner til f, g og h.

1.36 Tegn graferne for funktionerne $p(t) = 9{,}1\cdot t^{0,6}$ og $q(t) = 56\cdot t^{-1,3}$ i samme koordinatsystem. Løs såvel grafisk som ved beregning ligningen: $p(t) = q(t)$.

1.37 Bestem forskrifterne for de potentielle vækstfunktioner: f, g og h, hvorom det gælder, at:
a) $f(6{,}2) = 12$ og $f(24{,}6) = 100$
b) $g(3{,}4) = 809$ og $g(11) = 19{,}6$
c) $h(1{,}23) = 0{,}0078$ og $h(82{,}3) = 0{,}019$
Beregn funktionsværdien af tallet 100 for alle tre funktioner.

1.38 Grafen for en potentiel vækstfunktion går igennem punkterne: (3,17) og (11,4). Bestem en forskrift for funktionen og tegn dens graf.

1.39 Om funktionen $f(x) = k\cdot x^r$ er givet, at $f(3) = 8$ og $f(10) = 200$
a) Bestem værdierne af k og r.
b) Løs uligheden: $f(x) > 100$
c) Beregn den procentuelle tilvækst for funktionsværdierne, når den uafhængige variable forøges med 12 %.

1.40 Om en potentiel vækstfunktion g gælder, at $g(2000) = 45000$, samt at en forøgelse af den uafhængige variable på 10 % giver en forøgelse af funktionsværdien med 8 %
a) Bestem en funktionsforskrift for g
b) Hvor mange gange større bliver funktionsværdien, hvis den uafhængige variable bliver 3,5 gange større ?
c) Udregn den procentuelle forandring af funktionsværdien, når den uafhængige variable formindskes med 20 %.
d) Hvilken procentuel tilvækst i den uafhængige variable giver en procentuel forøgelse på 18 % i funktionsværdierne.

1.41 Om en potentiel vækstfunktion h gælder, at $h(100) = 5000$, samt at en forøgelse af den uafhængige variable på 18 % giver en formindskelse af funktionsværdien med 12 %
a) Bestem en funktionsforskrift for h
b) Bestem fremskrivningsfaktoren for funktionsværdierne, når den uafhængige variable bliver 5 gange større ?
c) Udregn den procentuelle forandring af funktionsværdien, når den uafhængige variable formindskes med 10 %.
d) Hvilken procentuel tilvækst i den uafhængige variable giver en procentuel formindskelse på 71 % i funktionsværdierne.

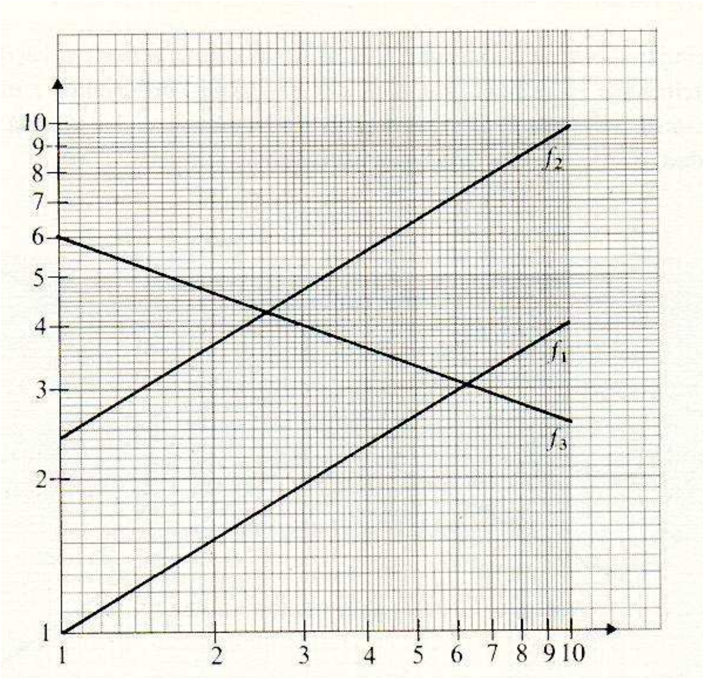
1.42 Tegn grafen for hver af de følgende funktioner i et dobbeltlogaritmisk koordinatsystem:

a) $f(x) = 20\cdot x^{-1,5}$ b) $g(x) = 2x$ c) $h(x) = 9\cdot x^{0,6}$ d) $j(x) = 1{,}2\cdot x^{1,8}$

1.43 Tegn graferne for de følgende tre funktioner i et almindeligt koordinatsystem, derefter i et enkeltlogaritmisk koordinatsystem og endelig i et dobbeltlogaritmisk koordinatsystem. (Brug i hver situation en passende delmængde af definitionsmængden). Kommentér resultatet:

a) $f(x) = 0{,}5x + 40$ b) $g(x) = 40\cdot 0{,}5^x$ c) $h(x) = 40\cdot x^{0,5}$

1.44 Angiv en funktionsforskrift for hver af funktionerne f_1 , f_2 og f_3 på nedenstående figur. Bestem for hver af funktionerne, hvilken relativ tilvækst i funktionsværdierne der svarer til en relativ tilvækst på 25 % i den uafhængige variable.



1.45 Følgende målte data skal undersøges med henblik på at opstille en lineær, en eksponentiel eller en potentiel vækstfunktion som model for dataene:

t	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
b(t)	29,4	30,1	30,9	31,7	32,5	33,3	34,1	34,8	35,6	36,4

a) Tegn grafen for funktionen b i et almindeligt, i et enkeltlogaritmisk og i et dobbeltlogaritmisk koordinatsystem. Hvilken af de tre modeller passer bedst ?

b) Anvend regression på grafregneren til at vurdere, hvilken af de tre modeller, der passer bedst. (OBS: Lineær regression med henblik på at tilpasse givne data til en lineær funktion foregår på helt samme måde som eksponentiel og potentiel regression. Den eneste forskel er, at i stedet for ExpReg eller PowReg anvendes: LinReg).

1.46 Samme spørgsmål som i opgave 1.45 på følgende data:

t	10	20	30	40	50	60	70	80	90
s(t)	1,20	1,45	1,70	2,08	2,50	3,00	3,60	4,35	5,20

Kapitel 3.

3.1 Find $f'(x)$ for hver af funktionerne:

a) $f(x) = \ln(\sqrt{x} \cdot x + 1)$ b) $f(x) = \ln(2x^2 + x + 9)$

3.2 Bestem $f'(x)$ for hver af følgende funktioner:

a) $f(x) = \ln(5x - 1)$ b) $f(x) = \ln(-8x)$ c) $f(x) = (\ln(2x))^2$

d) $f(x) = (\ln(x^3))^3$ e) $f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$ f) $f(x) = \ln(\ln(\sqrt{x} + 2))$

g) $f(x) = \log(x^2)$ h) $f(x) = \log(x^3 + 4)$ i) $f(x) = (\log x)^2$

3.3 Bestem et funktionsudtryk for den afledede funktion $f'(x)$ for hver af følgende funktioner:

a) $f(x) = \log_5(8x)$ b) $f(x) = (\log_3(2x))^2$ c) $f(x) = \log_{2,6}(3x^5)$

d) $f(x) = \log_2(\ln(\sqrt{2x+3}))$ e) $f(x) = \log_3(\log_4(5x + 1))$ f) $f(x) = \left(\log_2\left(\frac{x^2+1}{x}\right)\right)^4$

3.4 Lad funktionen f være givet ved: $f(x) = x \cdot \ln x + x$

a) Hvad er Dm(f) ?

b) Angiv ligningen for tangenten til grafen for f i punktet $(\frac{1}{2}, f(\frac{1}{2}))$

c) Bestem monotoniforholdene for f.

d) Bestem $\left\{f(x) \mid \frac{1}{10} \le x \le 1\right\}$

3.5 Bestem monotoniforhold og værdimængde for hver af funktionerne:

a) $f(x) = 5\ln x - x \;,\; x \in [1;8]$ b) $g(x) = \frac{\ln x}{x} \;,\; x \in [1;5]$

3.6 Bestem definitions- og værdimængde for funktionen: $h(x) = \ln(4 - x^2)$

3.7 Bestem differentialkvotienterne af følgende funktioner:

a) $e^x \cdot (\frac{1}{2})^x$ b) $\sqrt{2^x + x^2}$ c) $4^x - 3 \cdot 2^x + 7$ d) 4^{-3x}

e) $2^{x + \ln x}$ f) $5^{\sqrt{2x^2+4}}$ g) $(x^2 + 5) \cdot e^{x^2 - 5}$ h) $\frac{e^x}{e^x + e^{-x}}$

Bestem den eksakte værdi af differentialkvotienten i x = 2 for hver af de otte funktioner.

3.8 Angiv monotoniforhold og værdimængde for funktionen:

$$f(x) = e^{2x} - 4e^x + 3 \;,\; x \in [0,5 ; 2]$$

Bestem ligningen for tangenten til grafen for f i x = 1.
Skitsér grafen for f.

3.9 Bestem monotoniforhold og værdimængde for hver af funktionerne:

a) $g(x) = x \cdot 5^x \;,\; -1 \le x \le 1$

b) $h(x) = x \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2} \;,\; -2 \le x \le 5$

c) $f(x) = x^{-3} \cdot e^x \;,\; 1 \le x \le 6$

3.10 Bestem $f'(x)$ i hvert af følgende tilfælde:

a) $f(x) = e^{\frac{x}{3}}$ b) $f(x) = 3^{-5x}$ c) $f(x) = (e^x)^2$

d) $f(x) = 3^{\sqrt{x}} - \sqrt{4^x}$ e) $f(x) = \ln(e^{x+2} + 2)$ f) $f(x) = e^{2x} \cdot \ln(2x+4)$

g) $f(x) = \ln(e^x + x^2)$ h) $f(x) = \dfrac{3^x}{\log_3 x}$ i) $f(x) = x^2 \cdot 2^x$

j) $f(x) = x^2 \cdot e^{x^3+3}$ k) $f(x) = e^{\frac{1}{5x}}$ l) $f(x) = \dfrac{10}{1+8\cdot e^{-0{,}3x}}$

3.11 Bestem $f'(5)$ – med 4 betydende cifre – for hver af funktionerne i opgave 3.10

3.12 En funktion f er givet ved: $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{a + b\cdot e^{-x}}$, $x \in R$

hvor a og b er givne positive tal.

Vis, at det for alle $x \in$ R gælder, at: $f'(x) = -ae^x \cdot (f(x))^2$

3.13 a) Om en differentiabel funktion $\psi(q)$ gælder, at: $\psi'(q) = 0{,}3\cdot\psi(q)$ og $\psi(28) = 6000$
Bestem en funktionsforskrift for ψ

b) Grafen for funktionen λ går igennem punktet: (8, 70).
Desuden vides, at der for alle $t \in\,]\,0; 100[$ gælder, at: $\lambda'(t) = -0{,}26\cdot\lambda(t)$.
Bestem en forskrift for funktionen λ.

3.14 Betragt funktionen: $g(x) = \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\dfrac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right)$, hvor μ og σ er givne konstanter, $\sigma > 0$.

Bevis, at g har maksimum i $x = \mu$.

3.15 Bestem $f'(x)$ for hver af følgende funktioner:

a) $f(x) = 2\cdot x^{-1{,}2} + 3\cdot x^{1{,}8}$ b) $f(x) = \sqrt{7}\, x^{\sqrt{7}}$ c) $f(x) = x^{2{,}7}\cdot 2{,}7^x$

d) $f(x) = (x^2 + 3)^{4{,}6}$ e) $f(x) = \dfrac{2x^{0{,}8} + 3}{4x^{1{,}8} + 3}$ f) $f(x) = (\sqrt{2}\, x + 1)^{\sqrt{2}+1}$

g) $f(x) = x^{0{,}5} \cdot \ln x$ h) $f(x) = \sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{x^3}$ i) $f(x) = \dfrac{5}{\sqrt[3]{x}} - \dfrac{3}{\sqrt[5]{x}}$

3.16 Angiv monotoniforhold og værdimængde for følgende funktioner – og skitser deres grafer:

a) $f(x) = x^{\frac{3}{2}} \cdot e^{-x}$, $x \in \left[\frac{1}{2}; 4\right]$ b) $g(x) = x^e \cdot \ln x$, $x \in \left[\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right]$

I opgaverne 3.17 – 3.31 forudsættes kendskab til stamfunktionsbegrebet/integralregning.

3.17 Bestem en funktionsforskrift for funktionen h, idet det er givet, at:

$h'(x) = e^{3x} - 1$ og $h(0) = 1$

3.18 Bestem den stamfunktion G til funktionen

$$g(x) = \frac{1}{x} - x \quad , \quad x > 0$$

der har linien med ligningen y = 3 som tangent.

3.19 Udregn følgende ubestemte integraler:

a) $\int \frac{1}{5x}\,dx$ b) $\int \ln(3x)\,dx$ c) $\int e^{3+x}\,dx$ d) $\int (e^x)^4\,dx$

e) $\int 4^x\,dx$ f) $\int e^{\ln(x^3)}\,dx$ g) $\int \frac{3}{x}\,dx$ h) $\int \frac{x-5}{x}\,dx$

i) $\int \log_3(5x)\,dx$ j) $\int 2\cdot\sqrt[3]{x}\,dx$ k) $\int e^{5x}\,dx$ l) $\int e^{2x+3}\,dx$

m) $\int 2\sqrt{x^3}\,dx$ n) $\int \sqrt[5]{x^4}\,dx$

3.20 Bestem integralet: $\int (a + be^{-kx})\,dx$, hvor a, b og k er givne konstanter, k > 0.

Udregn integralet: $\int_0^8 (8 - 5e^{-1,4x})\,dx$

3.21 Udregn følgende bestemte integraler:

a) $\int_1^{11} (2{,}5\ln p - 2p)\,dp$ b) $\int_2^3 \frac{t^2+2}{2t}\,dt$ c) $\int_1^8 \log_2(x^2)\,dx$

d) $\int_1^e y^e\,dy$ e) $\int_3^4 3^q\,dq$ f) $\int_{0,5}^{2,5} (2{,}5s^{0,5} - 0{,}5s^{2,5})\,ds$

3.22 Beregn værdien af følgende bestemte integraler:

a) $\int_1^2 5^{2x+1}\,dx$ b) $\int_1^2 \left(\frac{\sqrt{x}}{x} + \frac{\sqrt[4]{x}}{x}\right)dx$ c) $\int_2^5 2^{-x}\,dx$

d) $\int_1^2 (5x^4 + \tfrac{1}{2}e^x - 7\ln x)\,dx$ e) $\int_1^4 (5\cdot 2{,}3^x - 3\cdot x^{2,3})\,dx$ f) $\int_0^2 2^x\cdot(2^x)^2\,dx$

g) $\int_2^4 (4x^{-2,6} + 2x^{0,7} - x^{-1})\,dx$ h) $\int_1^5 (\log_4(\tfrac{x}{4}) + \log_3(\tfrac{x}{3}))\,dx$ i) $\int_1^2 (x^{\sqrt{2}} - \sqrt{2}^{\,x})\,dx$

3.23 Betragt funktionen $h(x) = 3\cdot e^{0,4x}$, $x \in [0 ; 8]$

Bestem arealet mellem grafen for h og førsteaksen.

3.24 Skitsér grafen for funktionen $g(x) = 0{,}4\cdot x^{1,9}$.

Bestem en ligning for tangenten til grafen for g i punktet (1, g(1)).

Grafen for g, tangenten og linien med ligningen x = 4 afgrænser en punktmængde.

Bestem arealet af denne punktmængde.

3.25 Skitsér graferne for funktionerne $f(x) = \frac{1}{4}e^x$ og $h(x) = -x^2 + 6x$ i samme koordinatsystem.

Løs ligningen: f(x) = h(x) v.hj.a. grafregneren.

Beregn arealet af mængden af punkter (x,y), som opfylder: $f(x) \leq y \leq h(x)$

I opgaverne 3.26 – 3.31 anvendes integration ved substitution og/eller delvis integration.

3.26 Udregn følgende ubestemte integraler:

a) $\int \frac{1}{x \cdot \ln x}\,dx$ b) $\int \frac{5x^2}{2+x^3}\,dx$ c) $\int \frac{\ln(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\,dx$ d) $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx$

e) $\int \frac{\ln x}{x}\,dx$ f) $\int 5x\ln(3x^2+1)\,dx$ g) $\int \frac{1}{5x-4}\,dx$ h) $\int \frac{3}{x}\cdot(\ln x)^2\,dx$

i) $\int x^5 \ln x\,dx$ j) $\int \frac{x+1}{x^2+2x+2}\,dx$ k) $\int \frac{\log_5(3x)}{x}\,dx$ l) $\int \frac{\ln x}{x^2}\,dx$

m) $\int (\ln x)^2\,dx$ n) $\int x\cdot\ln(2x-1)\,dx$

3.27 Udregn følgende ubestemte integraler

a) $\int x\cdot 2^x\,dx$ b) $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$ c) $\int \frac{2}{x}\cdot 2^{\ln x}\,dx$ d) $\int x^2 e^x\,dx$

e) $\int x\cdot 4^{x^2+2}\,dx$ f) $\int x^{1,1}(x^{2,1}+8)^{2,7}\,dx$ g) $\int 3^x\cdot\ln(3^x+3)\,dx$ h) $\int x^{-2}\cdot e^{\frac{1}{x}}\,dx$

3.28 Udregn følgende bestemte integraler:

a) $\int_1^3 t\cdot\ln(t^2)\,dt$ b) $\int_2^4 \frac{0{,}5v+1}{v^2+4v+11}\,dv$ c) $\int_0^2 u^2\cdot 3^u\,du$ d) $\int_1^e \frac{5+\ln\lambda}{\lambda}\,d\lambda$

e) $\int_{20}^{30} 2(\ln q)^2\,dq$ f) $\int_2^e (\sigma^2+2)\cdot\ln\sigma\,d\sigma$ g) $\int_{-6}^{6} (3x+2)\cdot e^x\,dx$ h) $\int_0^1 \frac{5}{3m+2}\,dm$

3.29 Beregn værdien af følgende bestemte integraler:

a) $\int_0^1 \frac{x-3}{x^2-9}\,dx$ b) $\int_2^5 \frac{1}{2}x\cdot e^{-x^2}\,dx$ c) $\int_e^{e^2} x\cdot(\ln x)^2\,dx$ d) $\int_0^{2,5} 2x\cdot 4^x\,dx$

e) $\int_6^7 \frac{2x}{x^2-4}\,dx$ f) $\int_1^3 (x\ln x+x)\,dx$ g) $\int_1^2 x\cdot e^{3x+2}\,dx$ h) $\int_7^{10} \frac{1}{x-6}\,dx$

i) $\int_1^2 2x^2\cdot 4^{x^3}\,dx$ j) $\int_1^5 \log_2(x)\log_3(x)\,dx$ k) $\int_1^4 x^{\frac{2}{5}}\cdot\ln x\,dx$ l) $\int_3^5 2^{\ln x}\cdot\frac{1}{x}\,dx$

m) $\int_0^2 x^2\cdot 2^{4x}\,dx$ n) $\int_5^{2e} \frac{\ln(\ln(x))}{x}\,dx$ o) $\int_4^9 \frac{1}{2}x\ln(x^2+1)\,dx$ p) $\int_2^4 \frac{6x}{2x-1}\,dx$

3.30 Bestem konstanten k, så: $\int_0^6 k\cdot\log_5(4t+1)\,dt \;=\; 1$

3.31 Lad f(x) = $\int_1^x \frac{(\log_2(t))^2}{t}\,dt$. Løs ligningen: f(x) = 2 , x > 0

Resten af opgaverne til kapitel 3 handler om emner fra afsnit 3.6: Beslægtede funktioner.

3.32 Tegn graferne for funktionerne f, g og h givet ved:
$f(x) = 18 - 6\cdot e^{-0{,}43x}$, $g(x) = 200 + 124\cdot e^{-0{,}16x}$ og $h(x) = 20 - 11\cdot e^{0{,}092x}$

3.33 Tegn graferne for: $f(x) = 23\cdot(1-e^{-0,26x})$, $x \geq 0$ og $g(x) = 18\cdot(1-e^{-0,5x})$, $x \geq 0$

3.34 Om funktionen f er givet, at f er defineret og kontinuert i intervallet [0; 230] , at f(50) = 1200 og at $f'(x) = 27 - 0{,}12\cdot f(x)$ for alle $x \in\ ]0;230[$. Bestem en forskrift for f og tegn grafen.

3.35 Bestem forskrifter og tegn graferne for funktionerne f og g, som opfylder:
a) $f'(x) + 8f(x) = 23$ og grafen for f går igennem punktet (1,5)
b) $5000\cdot g'(x) - 300g(x) = 1400$ og $g(2) = 6$

3.36 Bestem en forskrift for den funktion f der opfylder, at: $\dfrac{df(x)}{dx} = -2\cdot f(x) + 1$ og f(3) = 1.

3.37 Bestem en forskrift for den funktion h der opfylder, at: $h'(x) - h(x) = 3$ og $h'(-2) = 1$

3.38 Om funktionen g gælder, at g(0) = 2000, at g er kontinuert i $[0;\infty[$ og differentiabel i $]0;\infty[$, samt at $g'(t) = 2\cdot(4000 - g(t))$ for alle $t \in\ ]0;\infty[$.
Bestem en funktionsforskrift for g, og skitsér grafen.

3.39. Bestem en forskrift for funktionen ψ der opfylder: $\dfrac{d\psi}{dt} = 2\cdot(0{,}6 - \psi(t))\cdot\psi(t)$, samt at grafen for ψ går igennem punktet (10 , 0.5).

3.40. Om en funktion f gælder, at: $f'(x) = a\cdot f(x)\cdot(500 - f(x))$ for alle $x \in$ R, samt at f(20) = 100 og $f'(20) = 4$. Bestem værdien af a, anfør en forskrift for f og tegn grafen for f.

3.41. Bestem en forskrift for den funktion g der opfylder ligningen: $g'(t) = -0{,}05g(t)^2 + 100g(t)$, og som går igennem punktet (0,20).

3.42. Undersøg, om de følgende data med rimelighed kan beskrives ved en logistisk vækstfunktion, og bestem i bekræftende fald en forskrift for denne:

x	5	10	17	30	38	44	55	61
y	123	160	349	628	726	760	771	796

3.43. Beregn følgende integraler – og kontrollér resultaterne i b) og c) v.hj.a. grafregneren:

a) $\displaystyle\int \frac{2000}{1+0{,}3\cdot e^{-0{,}002x}}dx$ b) $\displaystyle\int_0^{200} \frac{50000}{10+35\cdot e^{-0{,}0042q}}dq$ c) $\displaystyle\int_{20}^{50} \frac{300\cdot 1{,}02^x}{3+1{,}02^x}dx$

Kapitel 5.

5.1 Undersøg grænseforholdene for x gående mod uendelig og for x gående mod 0 fra højre for hver af følgende funktioner:

a) $f(x) = x \cdot \ln x + x$ b) $f(x) = \frac{4}{x} + \frac{\ln x}{x^4}$ c) $f(x) = \sqrt{x} \cdot \ln x + x^{-3} \cdot 0{,}3^x$

d) $f(x) = x^3 \ln x + \frac{2^x}{x^2}$ e) $f(x) = 8 - \frac{2}{\ln x}$ f) $f(x) = x \cdot e^{-x} + x^{-1} \cdot e^x$

5.2 Bestem definitionsmængde og værdimængde for hver af følgende funktioner:

a) $f(x) = x^{-3} \cdot e^x$ b) $g(x) = x \cdot 5^x$ c) $h(x) = x \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}$

5.3 Bestem definitionsmængde og værdimængde for hver af følgende funktioner:

a) $f(x) = x^{\frac{3}{2}} \cdot e^{-x}$ b) $g(x) = x^e \cdot \ln x$ c) $f(x) = 5e^{1,8x} - 3e^{1,2x}$

5.4 Som omtalt i teksten findes der tre slags asymptoter: vandrette, lodrette og skrå. Undersøg for hver af de følgende funktioner, om de har asymptote(r), og bestem i bekræftende fald en ligning for hver af asymptoterne:

a) $f(x) = \log_5(x)$ b) $f(x) = x \cdot \log_3(x)$ c) $f(x) = 10 - 2e^x$

d) $f(x) = \frac{2^x}{x+2}$ e) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ f) $f(x) = 3x + \frac{x^3}{3^x}$

g) $f(x) = \frac{1{,}5 \cdot 1{,}5^x}{1{,}5^x + 1{,}5}$ h) $f(x) = 3x + 3 + e^{-3x}$ i) $f(x) = \frac{e^{-x}}{x^2 - 4}$

5.5 Funktionen $f(x) = x^x$ er hverken en potensfunktion eller en eksponentialfunkrion. Men ved hjælp af omskrivningen: $x^x = e^{x \cdot \ln x}$ kan vi bestemme forskellige egenskaber ved f.

a) Bestem Dm(f) og et udtryk for $f'(x)$
b) Bestem monotoniforhold og lokale ekstrema for f
c) Bestem værdimængden for f
d) Skitser grafen for f.

5.6 Udregn værdien af hvert af følgende uegentlige integraler:

a) $\int_2^\infty 5e^{-\frac{5}{4}x}dx$ b) $\int_8^\infty (2 \cdot x^{-2,6} + \frac{1}{x^2})\,dx$ c) $\int_{10}^\infty \frac{3\log x}{x^{2,1}}dx$

d) $\int_2^\infty 8 \cdot 1{,}4^{-x}\,dx$ e) $\int_8^\infty (3 \cdot x^{-2} + 2 \cdot 3^{-x})\,dx$ f) $\int_{39}^\infty \frac{0{,}38x^2}{1{,}37^x}dx$

5.7 Udregn værdien af hvert af følgende uegentlige integraler:

a) $\int_e^\infty \frac{2 + 3\ln x}{x^4}dx$ b) $\int_3^\infty \frac{1}{x \cdot (\ln x)^2}dx$ c) $\int_4^\infty 5x \cdot 0{,}3^x\,dx$

5.8 Bestem værdien af konstanten k, så $\int_1^\infty k \cdot t \cdot e^{-\frac{1}{2}t^2}\,dt = 1$

5.9 Lad α være en positiv konstant.

Vis ved anvendelse af delvis integration, at $\int_0^\infty \alpha t \cdot e^{-\alpha t}dt = \frac{1}{\alpha}$

Stikordsregister