Regneregler

1. Simple regler for regning med tal.

Vi arbejder bl.a. med følgende fire regningsarter: plus (+), minus (–), gange (·) og dividere (: eller brøkstreg, se senere), eller med ”fremmedord”: addition, subtraktion, multiplikation og division. Svarende til disse regningsarter taler vi om en sum, en differens, et produkt og en brøk af/imellem to tal. Når vi opskriver en række tal med bl.a. disse regningsarters symboler iblandet, taler vi om et matematisk udtryk.
Hvis et (matematisk) udtryk indeholder en multiplikation (et produkt, (gange)) eller en division (en brøk, (dividere)), så skal disse operationer udføres før eventuelle additioner (summer, (plus)) og subtraktioner (differenser, (minus)). Og hvis et udtryk indeholder parenteser, så skal disse regnes ud først. Dette er en del af regningsarternes hierarki, som omtales yderligere i det følgende.

Eksempel 1.1.
a) $2 + 3{\cdot}5 = 2 + 15 = 17$ (2 + 3·5 giver altså ikke 25, som man måske kunne tro !!)
b) $4{\cdot}9 - 2{\cdot}11 + 9 = 36 - 22 + 9 = 23$
c) $-2{\cdot}(11 + 9) = -2{\cdot}20 = -40$
d) $6{,}3 + 28:4 + 3 - 1{,}8{\cdot}4 = 6{,}3 + 7 + 3 - 7{,}2 = 9{,}1$
e) $(6 - 12:3){\cdot}8 + 11 = (6 - 4){\cdot}8 + 11 = 2{\cdot}8 + 11 = 16 + 11 = 27$
f) $23 - (20 - 11) = 23 - 9 = 14$ (Bemærk, at dette er lig med: $23 - 20 + 11$, så minusparentesen hæves ved at ændre fortegnene inde i parentesen !) ♥

Når man skal udtrykke en division, så gøres det oftest ved hjælp af en brøkstreg. Man skriver f.eks. $\frac{3}{4}$ i stedet for 3:4 eller $\frac{-7}{19}$ i stedet for –7: 19.
Det øverste tal i en brøk (dvs. tallet over brøkstregen) kaldes tælleren, og det nederste tal (dvs. tallet under brøkstregen) kaldes nævneren.
Bemærk desuden, at hvis der står en sum i tælleren eller nævneren af brøken, så udregnes summen først, som om der stod en parentes omkring den (en ”skjult” parentes), inden selve brøken (divisionen) udregnes. Det samme er tilfældet, hvis der står en differens. Dette er også en del af regningsarternes hierarki.

Eksempel 1.2.
a) $6 - \frac{4}{5} + 8{,}4 = 6 - 0{,}8 + 8{,}4 = 13{,}6$

b) $10 - \frac{3+6}{18} + \frac{12-5}{7} = 10 - \frac{(3+6)}{18} + \frac{(12-5)}{7} = 10 - \frac{9}{18} + \frac{7}{7} = 10 - 0{,}5 + 1 = 10{,}5$

c) $40 + \frac{55}{7+4} + \frac{23-13}{5-3} = 40 + \frac{55}{(7+4)} + \frac{(23-13)}{(5-3)} = 40 + \frac{55}{11} + \frac{10}{2}$

$= 40 + 5 + 5 = 50$ ♥

Hvis man ganger et tal med sig selv, siger man, at man <u>kvadrerer</u> tallet, eller at man tager tallet "i anden". F.eks. er:
$25^2 = 25 \cdot 25 = 625$, $0{,}6^2 = 0{,}6 \cdot 0{,}6 = 0{,}36$ og $(-3)^2 = (-3) \cdot (-3) = 9$.
På samme måde betyder f.eks. 5^3, at man ganger 5 med sig selv tre gange, altså:
$5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$
Tallene 25^2, $0{,}6^2$, $(-3)^2$, 5^3 kaldes en potens af henholdsvis 25, 0,6, –3 og 5.
Når der optræder potenser i et udtryk, så skal disse udregnes før gange og dividere, plus og minus. Men udtryk **<u>i</u>** parentes regnes stadigvæk først.

<u>Eksempel 1.3.</u>
a) $2^3 + 4 \cdot 3^2 = 8 + 4 \cdot 9 = 8 + 36 = 44$

b) $(2+6)^2 + \frac{3^3}{10} + \frac{120}{2^3+4} = 8^2 + \frac{27}{10} + \frac{120}{8+4} = 64 + 2{,}7 + \frac{120}{12} = 64 + 2{,}7 + 10 = 76{,}7$

c) $\frac{(5+6)^2}{70 - 2 \cdot 5^2} = \frac{11^2}{70 - 2 \cdot 25} = \frac{121}{70-50} = \frac{121}{20} = 6{,}05$

d) $((4+3)^2 - 9):8 + 7 = \frac{(7^2 - 9)}{8} + 7 = \frac{49-9}{8} + 7 = \frac{40}{8} + 7 = 5 + 7 = 12$ ♥

På baggrund af det ovenstående kan vi opstille følgende foreløbige oversigt:

<u>Regningsarternes hierarki:</u>

Generelt regner man fra venstre mod højre, når man skal udregne værdien af et udtryk, men nogle regningsarter kommer før andre (har højere prioritet, ligger højere i hierarkiet):

1. Først beregnes udtryk i parenteser.
   Hvis der er parenteser inde i hinanden, begyndes med den inderste.

2. Herefter beregnes potenser.

3. Herefter foretages multiplikation (gange) og division (brøk).

4. Til sidst udføres addition (plus, sum) og subtraktion (minus).

Beregningen af udtryk inde i en parentes følger de samme regler/det samme hierarki og den deraf givne rækkefølge (Jfr. Eksempel 1.3.d)). I denne forbindelse minder vi om de ”skjulte” parenteser i brøker omtalt ovenfor.

Øvelse 1.4:
Udregn hvert af følgende udtryk uden brug af regnemaskine:

a) $6\cdot(-4) + 3\cdot(-8) - (-7) + 5:2$

b) $(6\cdot(-4) + 3\cdot(-8) - (-7) + 5) : 2$

c) $(5 + 7)^2 + (6 - 2)^2 - (7 + 1)^2$

d) $2\cdot(-5) + 56 : (9 - 5) + 6^2$

e) $\dfrac{7+5^2}{9+7} - (-0{,}4)^2 + (4+6)\cdot(2{,}2-1)$

f) $(6 - 9)^3\cdot 2 + \dfrac{17+3\cdot 11}{10^2 - 9\cdot 11} + (47 - 3\cdot 15)^2$

2. Generelle regler for sum, differens og produkt

I stedet for at regne med bestemte værdier af tallene, kan vi regne med ”symbolske værdier”, idet vi lader tallene være repræsenteret ved bogstaver. Hvis vi f.eks. vil skrive en sum af to tal uden at specificere hvilke to tal det drejer sig om, så kan vi skrive: $a + b$, hvor a står for værdien af det ene tal og b står for værdien af det andet tal. Vi kunne også skrive $p + q$ eller $\alpha + \beta$, idet vi kan anvende de bogstaver (bl.a. fra det latinske eller græske alfabet), som vi har lyst til at anvende.
Denne fremgangsmåde har bl.a. den fordel, at vi kan angive regneregler som gælder for alle tal – uanset de konkrete værdier. F.eks. kan vi skrive: $a - (b + c) = a - b - c$ for at fortælle, at reglen om at hæve/fjerne en parentes med et minus foran gælder for alle tal uanset deres værdi. (Parentesen fjernes som omtalt ved at skifte fortegn på tallene inde i parentesen).

Efter samme princip kan vi nu opskrive følgende regler:

Sætning 2.1

1. Den modsatte værdi til den modsatte værdi af et tal er lig med tallet selv:
   $-(-a) = a$

2. I en sum er rækkefølgen af de enkelte led uden betydning:
   $a + b = b + a$

3. En plusparentes kan hæves og sættes uden videre:
   1) $a + (b + c) = a + b + c$
   2) $a + (b - c) = a + b - c$

4. En minusparentes kan hæves og sættes, hvis man inde i parentesen forandrer + til – og – til + :
   1) $-(a + b) = -a - b$ 2) $-(a - b) = -a + b = b - a$
   3) $a - (b + c) = a - b - c$ 4) $a - (b - c) = a - b + c$

5. Faktorernes rækkefølge (orden) i et produkt er uden betydning:
   1) $ab = a \cdot b = b \cdot a = ba$ 2) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) = a \cdot b \cdot c$

6. En flerleddet størrelse ganges med et tal ved at gange hvert led med tallet.
   $a \cdot (x + y) = a \cdot x + a \cdot y$

7. Når en flerleddet størrelse har en fælles faktor, kan denne sættes udenfor en parentes:
   $ay + ax = a \cdot (y + x)$

8. Man ganger to flerleddede størrelser med hinanden ved at gange hvert led i den ene med hvert led i den anden:
   $(a + b) \cdot (c + d) = ac + ad + bc + bd$

9. Kvadratet på en toleddet størrelse er lig: Kvadratet på første led plus kvadratet på andet led, + eller – det dobbelte produkt:
   1) $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$
   2) $(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$
   3) $(-a - b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$

10. To tals sum gange de samme to tals differens er lig kvadratet på første led minus kvadratet på andet led:
    $(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$

11. Man kvadrerer et produkt ved at kvadrere hver faktor for sig.
    $(a \cdot b)^2 = a^2 \cdot b^2$

Bevis:
Vi vil her kun bevise regel 8 – 11. De øvrige forudsættes velkendte eller umiddelbart indlysende.

Ad 8): $(a + b)\cdot(c + d) = (a + b)\cdot c + (a + b)\cdot d = a\cdot c + b\cdot c + a\cdot d + b\cdot d = ac + ad + bc + bd$

Ad 9): $(a + b)^2 = (a + b)\cdot(a + b) = a\cdot a + b\cdot a + a\cdot b + b\cdot b = a^2 + ab + ab + b^2$
$= a^2 + 2ab + b^2$

De øvrige regler i pkt. 9 bevises på samme måde. Detaljerne overlades til læseren.

Ad 10): $(a + b)\cdot(a – b) = a\cdot a + b\cdot a – a\cdot b – b\cdot b = a^2 – b^2$

Ad 11): $(a\cdot b)^2 = (a\cdot b)\cdot(a\cdot b) = a\cdot b\cdot a\cdot b = a\cdot a\cdot b\cdot b = a^2\cdot b^2$ ♥

Reduktion og omskrivning:

Ved omskrivning af et matematisk udtryk forstås en beregningsmæssig ændring af udtrykket til ny form (f.eks. ved at parenteser regnes ud, multiplikationer udføres, led i anden regnes ud osv.).
Ved reduktion af et matematisk udtryk forstås en omskrivning af udtrykket til en simplere form. Ved denne reduktion anvendes de gældende regneregler og regningsarternes hierarki, og værdien af udtrykket må ikke ændres.
Med mindre andet nævnes , så betyder ”reducér” almindeligvis: reducér mest muligt.

Eksempel 2.2.
Vi vil reducére følgende udtryk mest muligt:

a) $3x – (2\cdot(x + 1) – 4)$ b) $7 – 3(2a + 5) + (5a – 2) – 2(4a + 3)$

Ad a): $3x – (2\cdot(x + 1) – 4) = 3x – (2x + 2 – 4) = 3x – (2x – 2) = 3x – 2x + 2 = x + 2$

Ad b): $7 – 3(2a + 5) + (5a – 2) – 2(4a + 3) = 7 – (6a + 15) + 5a – 2 – (8a + 6) =$
$7 – 6a – 15 + 5a – 2 – 8a – 6 = 7 – 15 – 2 – 6 – 6a + 5a – 8a = –16 – 9a$ ♥

Eksempel 2.3.
Vi vil omskrive udtrykket $x^2 + 6x + 9$ ved at skrive det som et produkt af to faktorer:
Ved at se på regel 9. 1) i sætning 2.1 får vi den idé, at $x^2 + 6x + 9$ kan være kvadratet på en toleddet størrelse, hvor først led er x (idet der står x^2) og hvor andet led er 3 (idet der står $9 = 3^2$). Hvis dette skal være tilfældet, skal det sidste led være ”det dobbelte produkt”, og det ses netop, at $2\cdot x\cdot 3 = 6x$, hvormed vi i alt har: $x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2 = (x + 3)\cdot(x + 3)$ ♥

En række af omskrivningens og reduktionens aspekter, afkroge, faldgruber osv. vil blive blotlagt ved at løse de følgende øvelser:

Øvelse 2.4.

Omskriv: a) $(5a-2x)^2$ b) x^2+9y^2-6xy c) a^2+9b^2+6ab

Øvelse 2.5:

Reducer/omskriv:

a) $2a-(3b+a)$ b) $4+3\cdot(a-2)$ c) $-5a-(3a+8a)$

d) $x-(3\cdot 5x)$ e) $-3x\cdot(-2a)$ f) $6\cdot a\cdot 3-7\cdot(-a)\cdot 2$

g) $(2a+5b)(-a-7b)$ h) $2a+a^2+2\cdot(a+2)$ i) $-(-a-(b-2a))$

Øvelse 2.6.

Reducér/omskriv:

a) $5(-12b+3(a+4(b-a)+7)+4)$ b) $(cd+ab)(xy-pq)-(cd-ab)(xy+pq)$

c) $(7x+7y+7z-ax-ay-az)(x+y+z)$ d) $3\cdot(a+1)-(2\cdot((a+1)+1)-4)$

Øvelse 2.7.

Omskriv til produkt af faktorer:

a) x^2-1 b) $4x^2-4x+1$ c) $9a^2-4$

d) $x^2-26x+169$ e) $x^2+10x+25$ f) a^2-49

g) $4x^2-12x+9$ h) $36-b^2$ i) $9x^2+6x+1$

j) $25x^2-20x+4$ k) $36x^2-64$ l) $24-6x^2$

m) $4x^3+32x^2+64x$ n) $4x^3-16x$ o) $169x^2-208x+64$

Øvelse 2.8.

Reducér:

a) $7a+12b-5a-17b-4-3$

b) $(-a+b)-(a-b)$

c) $8a-(4a+3b)+(3a+5b)-(2a-4b)-2b$

d) $7x-(2x+4y)-(4x-6y)-(x+2y)$

e) $4(2x-3)-2(3x-4)+(3x+3)$

f) $3a(5a+2b)-4a(2a-3b)$

g) $4x(3x + 5y) - 3x(2x + 3y) + 2x(x - 2y)$

h) $3(x - (2x - 4)) - 11(1 - x - (-x - 1)) - 2(-(1 - 4x) - x)$

i) $a((2a + b)b - (2a - 3b)a - (5a - b)b)$

Øvelse 2.9.

Reducér/omskriv:

a) $(a - 2)(a + 5)$ b) $(x - 4)(x - 3)$

c) $(x - 3)(x + 3)$ d) $(3a - 4)(2a + 5)$

e) $(3a + 4)(6a - 8) - (2a - 3)(4a + 6)$ f) $(2x - 3y)(4x + 6y)$

g) $(3a + b)(-2a - 6b + 5)$ h) $(1 - \frac{1}{2}s)(1 + \frac{1}{2}s)$

Øvelse 2.10.

Skriv følgende udtryk som kvadratet på en toleddet størrelse:

a) $x^2 + 10x + 25$ b) $x^2 + 14x + 49$ c) $x^2 - 16x + 64$ d) $x^2 - 22x + 121$

e) $x^2 + 36x + 324$ f) $p^2 - 24p + 144$ g) $x^2 - 2x + 1$ h) $z^2 + 46z + 529$

Øvelse 2.11.

Skriv følgende udtryk på formen $a(x + b)^2$:

a) $x^2 + 16x + 64$ b) $-15x^2 - 30x - 15$

Øvelse 2.12.

Omskriv/Reducér følgende udtryk:

a) $(x + 3)^2$ b) $(x - 5)^2$ c) $(x - 8)(x + 8)$

d) $(2x - 3)^2$ e) $(4a + 1)^2$ f) $(3a + 5b)^2$

g) $(8x - 4y)^2$ h) $(3 + 5x)(3 - 5x)$ i) $(1 - 7b)^2$

j) $(x - 1)(x + 1)$ k) $(-x - y)^2$ l) $(4x + 3y)^2 - (3x - 4y)^2$

Øvelse 2.13.

Reducér følgende udtryk:

a) $(5a - 4b)^2 - (4a - 5b)^2$

b) $(2a + 3b)^2 - (a - 2b)^2 - 5b(2a + b)$

c) $(1 - \frac{1}{2}p)^2 - (1 + \frac{1}{2}p)^2 - s(-1)^2$

d) $9a^2 - (2a + 3b)(4a - 6b) - a(a - 2b) - 2ab$

3. Simple regler for brøker (division) med tal

Ved en brøk forstås et forhold mellem to tal, opskrevet ved hjælp af en brøkstreg, hvor tallet over brøkstregen kaldes tælleren og tallet under brøkstregen kaldes nævneren. Værdien af brøken findes ved at dividere nævneren op i tælleren.

Eksempel 3.1.

I brøken $\frac{12}{3}$ er tælleren 12 og nævneren 3, og brøkens værdi er 4.

Tilsvarende har vi, at i brøkerne: $\frac{22}{5}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{-40}{8}$ og $\frac{2}{7}$ er tællerne: 22, 1, -40 og 2, medens nævnerne er: 5, 4, 8 og 7.

Og værdien af disse brøker er giver ved:

$\frac{22}{5} = 4{,}4$, $\frac{1}{4} = 0{,}25$, $\frac{-40}{8} = -5$ og $\frac{2}{7} = 0{,}2857142857$.

Bemærk, at selv med 10 decimaler (cifre efter kommaet) er tallet 0,2857142857 ikke så præcis en værdi som selve brøken $\frac{2}{7}$ ♥

Når der regnes med brøker er der en række forhold at tage i betragtning. Vi ser først på følgende:

- En brøks fortegn bestemmes af såvel tællers som nævners fortegn.
- Når der står en sum eller en differens i en brøk, skal denne udregnes først (som om der stod en parentes omkring) inden selve brøkens værdi udregnes.
- En brøks værdi ændres ikke hvis tæller og nævner ganges eller divideres med samme tal (undtagen tallet 0).

Eksempel 3.2.

a) Vedrørende fortegn har vi f.eks., at: $\frac{-44}{11} = -4$, $\frac{18}{-6} = -3$ og $\frac{-40}{-5} = 8$

b) Udtrykket: $2 + \frac{5+13}{6} - \frac{25}{2+3}$ udregnes ved først at beregne 5 + 13 og 2 + 3 (som om der stod en ”skjult” parentes omkring disse led), og derefter udregne resten.

Vi får således: $2 + \frac{5+13}{6} - \frac{25}{2+3} \;=\; 2 + \frac{18}{6} - \frac{25}{5} \;=\; 2 + 3 - 5 \;=\; 0$

c) Brøkerne $\frac{5}{2}$ og $\frac{25}{10}$ har samme værdi, nemlig 2,5, dvs. $\frac{5}{2} = \frac{25}{10}$.

Vi kan komme fra $\frac{5}{2}$ til $\frac{25}{10}$ ved at gange både tæller og nævner med samme tal, nemlig 5. Vi siger da, at brøken $\frac{5}{2}$ forlænges med 5.

Og vi kan komme fra $\frac{25}{10}$ til $\frac{5}{2}$ ved at dividere både tæller og nævner med samme tal, nemlig 5. Vi siger da, at brøken $\frac{25}{10}$ forkortes med 5.

Samlet kan dette kort formuleres: $\frac{5}{2} = \frac{5\cdot 5}{2\cdot 5} = \frac{25}{10}$ ♥

Når man vil lægge brøker sammen, skal de have samme nævner (de skal være ”ensbenævnte”). Hvis de har den samme nævner (en fælles nævner), skal vi blot lægge tællerne sammen og beholde nævneren, hvorimod hvis de ikke har en fælles nævner, må vi først forlænge eller forkorte brøkerne på passende måde, så de får en fællesnævner. Tilsvarende gøres ved en differens af brøker.

Eksempel 3.3.

a) $\frac{1}{8}$ stykke lagkage plus $\frac{3}{8}$ stykker lagkage, giver i alt $\frac{4}{8}$ stykker lagkage, dvs. $\frac{1}{2}$ lagkage.

b) $\frac{2}{11} + \frac{5}{11} = \frac{7}{11}$, $\frac{6}{19} - \frac{31}{19} = -\frac{25}{19}$, $\frac{11}{6} + \frac{31}{6} - \frac{20}{6} = \frac{22}{6}$

c) For at udregne summen: $\frac{7}{8} + \frac{5}{12}$ må vi først give brøkerne en fællesnævner. Det ses at tallet 24 kan bruges som fællesnævner, idet den første brøk skal forlænges med 3 medens den anden brøk skal forlænges med 2 for at få nævneren 24. Vi har altså:

$$\frac{7}{8} + \frac{5}{12} = \frac{7\cdot 3}{8\cdot 3} + \frac{5\cdot 2}{12\cdot 2} = \frac{21}{24} + \frac{10}{24} = \frac{31}{24}$$

d) For at udregne differensen: $\frac{9}{7} - \frac{3}{5}$ må vi først finde en fællesnævner. Det ses, at tallet 35 kan bruges. (Bemærk, at 35 = 7·5. Som fællesnævner kan altid bruges produktet af nævnerne !).

Vi får hermed: $\frac{9}{7} - \frac{3}{5} = \frac{9\cdot 5}{7\cdot 5} - \frac{3\cdot 7}{5\cdot 7} = \frac{45}{35} - \frac{21}{35} = \frac{24}{35}$ ♥

Med hensyn til at gange og dividere i forbindelse med brøker gælder der følgende regler:

- Man ganger en brøk med et tal ved at gange tælleren med tallet og beholde nævneren.
- Man ganger to brøker med hinanden ved at gange tæller med tæller og nævner med nævner.
- Man dividerer en brøk med et tal ved at gange brøkens nævner med tallet og beholde tælleren.
- Man dividerer med en brøk ved at gange med den ”omvendte” brøk, dvs. ved at gange med den brøk, hvor tæller og nævner har byttet plads.

Eksempel 3.4.

Indledningsvist konstaterer vi, at f.eks. 6 gange $\frac{1}{4}$ lagkage er $\frac{6}{4}$ lagkage, dvs. 1½ lagkage.

Dernæst opfordres læseren til nøje at følge hver enkelt skridt i de følgende omskrivninger og overveje/konstatere, hvad der sker og hvilke regler der bruges:

a) $\frac{3}{10}\cdot 9 = \frac{3\cdot 9}{10} = \frac{27}{10}$

b) $\frac{-7}{9}\cdot 4 = \frac{-7\cdot 4}{9} = \frac{-28}{9}$

c) $8\cdot\frac{3}{13} = \frac{8\cdot 3}{13} = \frac{24}{13}$

d) $5\tfrac{2}{3}\cdot 4 = \frac{17}{3}\cdot 4 = \frac{68}{3}$

e) $\frac{21}{4}\cdot 4 = \frac{84}{4} = 21$

g) $\frac{31}{22}\cdot 33 = \frac{31\cdot 33}{22} = \frac{31\cdot 3}{2} = \frac{93}{2}$

h) $\frac{7}{4}\cdot\frac{3}{11} = \frac{7\cdot 3}{4\cdot 11} = \frac{21}{44}$

i) $\frac{-3}{8}\cdot\frac{2}{5} = \frac{-3\cdot 2}{8\cdot 5} = \frac{-6}{40} = \frac{-3}{20}$

j) $\frac{3}{8}\cdot\frac{8}{3} = \frac{24}{24} = 1$

k) $\frac{2}{11} : 3 = \frac{2}{11\cdot 3} = \frac{2}{33}$

l) $\frac{5}{3} : (-6) = \frac{5}{3\cdot(-6)} = \frac{5}{-18} = -\frac{5}{18}$

m) $\frac{\frac{4}{7}}{5} = \frac{4}{7\cdot 5} = \frac{4}{35}$

n) $4 : \frac{3}{5} = 4\cdot\frac{5}{3} = \frac{20}{3}$

o) $8 : \frac{-4}{7} = 8\cdot\frac{7}{-4} = \frac{56}{-4} = -14$

p) $\frac{5}{\frac{2}{3}} = 5\cdot\frac{3}{2} = \frac{15}{2}$

q) $\frac{9}{\frac{3}{7}} = 9\cdot\frac{7}{3} = 21$

r) $\frac{6}{13} : \frac{5}{11} = \frac{6}{13}\cdot\frac{11}{5} = \frac{66}{65}$

s) $\frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{7}} = \frac{2}{3}\cdot\frac{7}{5} = \frac{14}{15}$

t) $\frac{\frac{3}{8}}{\frac{8}{3}} = \frac{3}{8}\cdot\frac{3}{8} = \frac{9}{64}$

u) $\frac{\frac{15}{63}}{\frac{15}{63}} = \frac{15}{63}\cdot\frac{63}{15} = 1$ ♥

Her følger en række øvelser til indøvning af regnereglerne for brøker med tal:

Øvelse 3.5.
Beregn uden brug af lommeregner:

a) $\frac{2-5}{4}+6$ b) $\frac{45}{2+7}-\frac{-12}{4}$ c) $\frac{(-3)(-6)-8(-4)-6\cdot 2+3(-7)}{(-3)(-10)+2(-8)-(-2)2}$

Øvelse 3.6.
Forkort følgende brøker mest muligt uden brug af lommeregner:

a) $\frac{24}{16}$ b) $\frac{96}{36}$ c) $\frac{33}{55}$ d) $\frac{75}{125}$ e) $\frac{169}{221}$ f) $\frac{21}{35}$ g) $\frac{105}{140}$

Øvelse 3.7.
Løs følgende uden brug af lommeregner:

a) Forlæng $\frac{3}{4}$, så nævneren bliver 28

b) Forlæng $\frac{8}{7}$, så nævneren bliver 56

c) Forlæng $\frac{3}{4}$, så nævneren bliver delelig med 6

d) Skriv 4 som en brøk med nævneren 2

e) Skriv 3 som en brøk med nævneren 17

Øvelse 3.8.
Løs følgende uden brug af lommeregner

a) Forlæng brøken $\frac{2}{3}$ med 6 b) Forlæng brøken $\frac{4}{9}$ med 2

Øvelse 3.9.
Reducér mest muligt uden brug af lommeregner og beregn værdien:

a) $\frac{3}{7}+\frac{6}{7}+\frac{12}{7}$ b) $\frac{5}{6}+\frac{2}{3}+\frac{3}{5}$ c) $\frac{2}{3}+\frac{4}{9}+\frac{1}{6}$

d) $3+\frac{7}{8}+\frac{25}{6}$ e) $\frac{12}{5}-\frac{5}{6}-\frac{1}{7}$

Øvelse 3.10.

Reducér mest muligt uden brug af lommeregner og beregn værdien:

a) $\frac{2}{3}-\frac{3}{5}+\frac{5}{6}$ b) $\frac{2}{3}-\frac{1}{6}-\frac{2}{9}$ c) $3-\frac{7}{5}$ d) $\frac{3}{11}-\frac{14}{11}-1$ e) $\frac{5}{-3}-\frac{2}{3}$

Øvelse 3.11.

Reducér mest muligt uden brug af lommeregner og beregn værdien:

a) $\frac{5}{7}+\frac{6}{7}-\frac{4}{7}+\frac{13}{7}$ b) $\frac{2}{-3}+\frac{1}{2}$ c) $\frac{2}{3}-\frac{4}{9}+\frac{1}{6}$

d) $\frac{5}{12}-\frac{1}{5}+2$ e) $3+\frac{7}{8}-\frac{25}{6}$ f) $\frac{1}{16}+\frac{1}{8}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+1$

Øvelse 3.12.

Reducér mest muligt uden brug af lommeregner og beregn værdien:

a) $\frac{8}{11}\cdot 4$ b) $17\cdot\frac{2}{23}$ c) $-12\cdot\frac{-5}{20-4}$ d) $\frac{22}{-3}\cdot 11$

Øvelse 3.13.

Reducér mest muligt uden brug af lommeregner og beregn værdien:

a) $5\frac{3}{4}\cdot 3\frac{2}{3}$ b) $\frac{2}{5}\cdot\frac{7}{5}\cdot\frac{15}{4}\cdot\frac{2}{3}$ c) $\frac{2}{9}\cdot\frac{5+2}{3}$ d) $\frac{3}{4}\cdot\frac{7}{5}\cdot\frac{2}{3}$

Øvelse 3.14.

Reducér mest muligt uden brug af lommeregner og beregn værdien:

a) $\left(2\tfrac{1}{2}\right)\cdot\left(-3\tfrac{1}{5}\right)\cdot\frac{8}{3}$ b) $\left(\frac{3}{-8}\right):\left(\frac{5}{8}\right)$ c) $8\cdot\left(\frac{-5}{6}\right)-\frac{9}{4}:3+\frac{5}{3}:3-\left(\frac{-3}{-6}\right)$

Øvelse 3.15.

Reducér mest muligt uden brug af lommeregner og beregn værdien:

a) $\left(\frac{5}{6}\right)^2$ b) $\left(\frac{-3}{4}\right)^2$ c) $\left(\frac{2}{-4}\right)^2$ d) $\frac{-3}{-7}\cdot\frac{-3}{-7}$

Øvelse 3.16.
Reducér mest muligt uden brug af lommeregner og beregn værdien:

a) $\frac{3}{4}+\frac{1}{6}\cdot\frac{7}{5}-\frac{75}{9}:\frac{75}{4}$ b) $\frac{1}{9}+\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{7}-\frac{2}{11}$

c) $\dfrac{\frac{1}{5}-\frac{8}{3}}{\frac{2}{7}\cdot\frac{1}{4}}$ d) $\dfrac{\frac{1}{6}+\frac{4}{5}\cdot 3}{\frac{2}{9}+\frac{2}{13}}$

Øvelse 3.17
Reducér mest muligt uden brug af lommeregner og beregn værdien:

a) $\frac{5}{7}:3$ b) $\frac{3}{8}:6$ c) $\frac{1}{2}:2$ d) $3:\frac{5}{7}$ e) $6:\frac{3}{8}$ f) $2:\frac{1}{2}$

Skriv de samme opgaver op v.hj.a. brøkstreger i stedet for divisionstegnet (:).

Øvelse 3.18
Reducér mest muligt uden brug af lommeregner og beregn værdien:

a) $\dfrac{\frac{2}{5}}{\frac{1}{3}}$ b) $\dfrac{\frac{3}{2}}{\frac{3}{5}}$ c) $\dfrac{\frac{5}{9}}{\frac{7}{6}}$ d) $\dfrac{\frac{7}{4}}{\frac{4}{7}}$

Øvelse 3.19
Ved den reciprokke værdi af et tal forstås 1 divideret med tallet (f.eks. er den reciprokke værdi af 3 lig med $\frac{1}{3}$).

Bestem uden brug af lommeregner den reciprokke værdi af tallene: 5 , $\frac{4}{17}$, $3\frac{2}{5}$ og $\frac{-6}{11}$

4. Generelle regler for brøker (division)

Efter samme princip som ved sum, differens og produkt kan generelle regler for regning med brøker udtrykkes ved hjælp af ”symbolske værdier”, dvs. tal repræsenteret ved bogstaver. I denne sammenhæng gælder følgende sætning (hvor vi som tidligere nævnt bruger brøkstreger i stedet for divisionstegnet : i næsten alle situationer).

Sætning 4.1.

1) Fortegnet for en brøk fastlægges af såvel tæller som nævner:

a) $\frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}$ b) $\frac{-a}{-b} = \frac{a}{b}$

2) En brøk med flere led (sum eller differens) i tæller eller nævner indeholder ”skjulte” parenteser, hvilket spiller en rolle når sådanne brøker indgår i beregninger:

$$\frac{a+b}{c+d} = \frac{(a+b)}{(c+d)}$$

3) En brøks værdi forandres ikke, hvis dens tæller og nævner ganges med samme tal ($\neq 0$) (Dette kaldes **forlængning**):

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot x}{b \cdot x}$$

4) En brøks værdi forandres ikke hvis dens tæller og nævner divideres med samme tal ($\neq 0$) (Dette kaldes **forkortning**):

a) $\frac{a \cdot y}{b \cdot y} = \frac{a}{b}$ b) $\frac{a}{b} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}}$

5) Brøker med samme nævner lægges sammen (eller trækkes fra hinanden) ved at lægge tællerne sammen (eller trække tællerne fra hinanden) og beholde nævneren.

a) $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$ b) $\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}$

6) Man dividerer en flerleddet størrelse med et tal ved at dividere hvert af leddene med tallet:

a) $\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$ b) $\frac{a-b}{c} = \frac{a}{c} - \frac{b}{c}$

7) Når brøker skal lægges sammen eller trækkes fra hinanden, skal de have samme nævner. Hvis dette ikke er tilfældet, må vi finde en **fællesnævner** for brøkerne, og forkorte eller forlænge brøkerne for at opnå denne fællesnævner.
Som fællesnævner kan man altid benytte produktet af alle nævnerne:

a) $\frac{a}{b}+\frac{c}{d} = \frac{a\cdot d}{b\cdot d}+\frac{b\cdot c}{b\cdot d} = \frac{a\cdot d+b\cdot c}{b\cdot d}$ b) $\frac{a}{b}-\frac{c}{d} = \frac{a\cdot d}{b\cdot d}-\frac{b\cdot c}{b\cdot d} = \frac{a\cdot d-b\cdot c}{b\cdot d}$

8) Man ganger en brøk med et tal ved at gange tælleren med tallet og beholde nævneren.

$$\frac{b}{c}\cdot a=\frac{b\cdot a}{c}=b\cdot\frac{a}{c}$$

9) Man ganger to brøker med hinanden ved at gange tæller med tæller og nævner med nævner.

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$$

10) Man kvadrerer en brøk ved at kvadrere tæller og nævner hver for sig.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2=\frac{a^2}{b^2}$$

11) Man dividerer en brøk med et tal ved at gange brøkens nævner med tallet og beholde tælleren.

$$\frac{a}{b}:c=\frac{\frac{a}{b}}{c}=\frac{a}{b\cdot c}$$

12) Man dividerer med en brøk ved at gange med den omvendte brøk.

a) $a:\frac{b}{c}=\frac{a}{\frac{b}{c}}=a\cdot\frac{c}{b}$ b) $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}$

Bemærk desuden, at:

- Ved forkortning af en brøk fortsætter man almindeligvis indtil brøken er **uforkortelig**.
- Den **reciprokke værdi** af et tal a defineres som: 1 divideret med a, dvs. $\frac{1}{a}$

Eksempel 4.2.

a) $$2\cdot\frac{a+2b}{c}-\frac{b-a}{c}\cdot 4 \;=\; \frac{2(a+2b)}{c}-\frac{(b-a)\cdot 4}{c} \;=\; \frac{2a+4b-(4b-4a)}{c} \;=$$

$$\frac{2a+4b-4b+4a}{c} \;=\; \frac{6a}{c}$$

Først ganges 2-tallet op på den ene tæller og 4-tallet ganges op på den anden tæller. Da brøkerne allerede har en fællesnævner (c), sættes de på en fælles brøkstreg og samtidig ganges 2 og 4 ind i de respektive parenteser. Bemærk minustegnet foran den sidste parentes, idet den sidste brøk skulle trækkes fra. Endelig hæves minusparentesen – og der reduceres mest muligt.

b) $$\frac{28c^2ad}{4acb}=\frac{7cd}{b}$$

Brøken forkortes med 4, med a og med c, hvilket er muligt, idet der både i tæller og nævner står gange imellem tallene/bogstaverne. Vi kan kort sige, at brøken forkortes med 4ac.

c) $$\frac{x+y}{x}+\frac{x-y}{y} \;=\; \frac{y(x+y)}{xy}+\frac{x(x-y)}{xy} \;=\; \frac{xy+y^2+x^2-xy}{xy} \;=\; \frac{x^2+y^2}{xy}$$

Først skaffes en fællesnævner, nemlig xy (Vi anvender altså produktet af de to eksisterende nævnere). Den første brøk skal derfor forlænges med y medens den anden brøk skal forlænges med x. Da de to brøker nu har en fælles nævner, kan vi samle dem til én brøk. Samtidig hermed har vi ganget y og x ind i de respektive parenteser. Endelig reduceres mest muligt. (Bemærk, at denne sidste brøk <u>ikke</u> kan forkortes med x eller y, idet der står + og ikke · imellem x^2 og y^2 i tælleren !!!)

d) $$\frac{(a-b)(a+b)}{5a}+\frac{(a-b)^2}{2b} \;=\; \frac{a^2-b^2}{5a}+\frac{a^2+b^2-2ab}{2b} \;=$$

$$\frac{2b(a^2-b^2)}{10ab}+\frac{5a(a^2+b^2-2ab)}{10ab} \;=\; \frac{2ba^2-2b^3+5a^3+5ab^2-10a^2b}{10ab} \;=$$

$$\frac{5a^3-2b^3-8a^2b+5ab^2}{10ab}$$

Først udregnes tællerne, og herefter skaffes en fællesnævner (igen ved blot at gange de to eksisterende nævnere sammen). Den første brøk forlænges derfor med 2b, medens den anden brøk forlænges med 5a. Herefter samles de to brøker på én fælles brøkstreg, og samtidig hermed har vi ganget tællerne ud. Endelig reduceres mest muligt.

e) $\frac{c-d}{a}\cdot\frac{2a}{b^2}+\left(\frac{2c}{b}\right)^2-\frac{c}{b}:\frac{b}{4(c-d)} \quad = \quad \frac{(c-d)\cdot 2a}{a\cdot b^2}+\frac{(2c)^2}{b^2}-\frac{c}{b}\cdot\frac{4(c-d)}{b} \quad =$

$$\frac{2c-2d}{b^2}+\frac{4c^2}{b^2}-\frac{4c^2-4cd}{b^2} \quad = \quad \frac{2c-2d+4c^2-(4c^2-4cd)}{b^2} \quad = \quad \frac{2c-2d+4cd}{b^2}$$

Først konstateres, at det udtryk vi skal reducere, består af tre led. I det første led ganger vi tæller med tæller og nævner med nævner, og vi husker parentesen om c – d, idet dette er en flerleddet størrelse, som skal ganges med et tal. I det andet led benytter vi reglen om, at en brøk i anden er tælleren i anden divideret med nævneren i anden, og vi husker parentes omkring 2c, idet det er hele tælleren, vi skal have i anden. I det tredje led skulle vi dividere med en brøk, hvilket har ført til, at vi nu ganger med den omvendte brøk. Herefter forkorter vi den første brøk med a og ganger 2 ind i parentesen i tælleren, i den anden brøk benytter vi, at $(2c)^2 = 2c\cdot 2c = 4c^2$, og i det tredje led ganger vi brøkerne sammen. Da de tre brøker, som vi herefter er nået frem til, alle har samme nævner, har vi allerede en fællesnævner, og vi kan derfor samle de tre brøker til én brøk. Vi husker her parentesen om $4c^2 - 4cd$, idet den sidste brøk skal trækkes fra de øvrige brøker. Ved at hæve minusparentesen og reducére kommer vi endelig frem til resultatet. ♥

Eksempel 4.3.

Ved reduktion af $\frac{5xy-15yz+10y^2}{5xyz}$ kan vi følge forskellige ”veje” (fremgangsmåder):

a) $\frac{5xy-15yz+10y^2}{5xyz} \quad = \quad \frac{5y\cdot(x-3z+2y)}{5y\cdot xz} \quad = \quad \frac{x-3z+2y}{xz}$

b) $\frac{5xy-15yz+10y^2}{5xyz} \quad = \quad \frac{5xy}{5xyz}-\frac{15yz}{5xyz}+\frac{10y^2}{5xyz} \quad = \quad \frac{x}{xz}-\frac{3z}{xz}+\frac{2y}{xz} \quad = \quad \frac{x-3z+2y}{xz}$

c) $\frac{5xy-15yz+10y^2}{5xyz} \quad = \quad \frac{\frac{5xy}{5y}-\frac{15yz}{5y}+\frac{10y^2}{5y}}{\frac{5xyz}{5y}} \quad = \quad \frac{x-3z+2y}{xz}$

I den første omskrivning sætter vi et fælles led udenfor en parentes i tælleren, idet 5y indgår i alle tre led i tælleren. Samtidig fremhæver vi, at 5y også indgår i nævneren. Ved at forkorte brøken med 5y, som nu er <u>ganget på</u> både i tæller og nævner (jfr. sætning 4.1. 4) pkt. a)), fremkommer resultatet.
I den anden omskrivning benytter vi sætning 4.1. 6), idet brøken er udtryk for en flerleddet størrelse (tre led) delt med et tal. I hver af disse brøker, hvor der ikke indgår + eller – , forkortes med 5y. (Egentlig kunne den første brøk også forkortes med x og den anden brøk

med z, men dette undlades for at sikre en fælles nævner for de tre brøker). Da de tre brøker har en fælles nævner, samles de til én brøk, hvormed resultatet fremkommer.
I den tredje omskrivning forkorter vi brøken ”direkte” med 5y ved at dividere tæller og nævner med 5y. I denne sammenhæng husker vi på, at tælleren består af flere led, hvorfor hvert led bliver delt med 5y. Ved at forkorte hver af de fire ”små brøker” når vi frem til resultatet. ♥

Her følger en række øvelser til indøvning af regnereglerne for brøker:

Øvelse 4.4.
Forkort følgende brøker mest muligt:

a) $\frac{22a^2}{4a}$ b) $\frac{13ab}{39b}$ c) $\frac{36a^2bc}{60ab^2c}$ d) $\frac{145a^2b^2}{174ab^3}$

Øvelse 4.5.

a) Forlæng $\frac{7a}{5}$, så nævneren bliver 30

b) Forlæng $-\frac{3a}{b}$, så nævneren bliver 7ab

c) Forlæng $\frac{b}{2a}$, så nævneren bliver delelig med 2b

d) Forlæng brøken $\frac{2a}{3b}$ med 4x

Øvelse 4.6.
Forkort brøkerne:

a) $\frac{8a}{13a}$ b) $\frac{3ab}{9b}$ c) $\frac{3ab}{2ab}$ d) $\frac{6a-9}{3}$

e) $\frac{6a\cdot 9}{3}$ f) $\frac{6a-9b}{3}$ g) $\frac{6a\cdot 8b}{3b}$

Øvelse 4.7.
Reducér/Omskriv følgende:

a) $\frac{4a}{3}+\frac{3a}{4}-\frac{5a}{6}$ b) $\frac{7x+5y}{a-b}-\frac{2x+3y}{a-b}-\frac{3x-y}{a-b}$ c) $\frac{4a^2}{9}-16$

d) $\left(\frac{14a+21b}{3}\right):7$ e) $\frac{3x-2}{2x}-\frac{4x-5}{5x}-\frac{2x+1}{4x}$

Øvelse 4.8.
Reducér:

a) $-(x+2)\cdot\frac{x+5}{17}$ b) $\frac{2+a}{4}\cdot\frac{3}{3a-1}$ c) $\frac{x-2}{1-x}-\frac{3-x}{1-x}$ d) $-\frac{x-2}{x}+\frac{x-3}{x-1}$

Øvelse 4.9.
Reducer følgende:

a) $\frac{1}{2x}+\frac{3}{3x+5}$ b) $\frac{1-6x}{-3}+\frac{1}{2+x}$ c) $\frac{5}{4a+3}-\frac{3}{4a}$

d) $\frac{a+4}{a+1}-\frac{a-3}{a-2}$ e) $\frac{3x-2}{2x+5}-\frac{4x-5}{5x-1}-\frac{2x+1}{4x+3}$

Øvelse 4.10:
Skriv tallet w som uforkortelig brøk, når x = 214 og y = 374 og

$$w=\frac{y}{x-y}+\frac{x}{x+y}+\frac{2xy}{x^2-y^2}$$

Øvelse 4.11.
Reducér:

a) $7\cdot\left(\frac{5}{7}\cdot y\right)$ b) $\frac{12a+9b}{3}$ c) $\frac{3}{2x}\cdot 4x$

d) $\left(\frac{x}{y}\right)^2\cdot(2\cdot y)^2$ e) $\frac{3}{2\cdot(y+1)}\cdot 4\cdot(y+1)$ f) $\frac{10a+5ab}{5a}$

g) $\frac{2+a}{m}+\frac{3-6a}{m}-\frac{4-5a}{m}$

Øvelse 4.12.
Reducér:

a) $\dfrac{(b+2)\cdot 3-(b+4)}{b+1}$ b) $\dfrac{a\cdot(a+3)-2\cdot(a+3)}{a-2}$ c) $\dfrac{y^2+x^2-2xy}{x^2+2xy+y^2}$

d) $\dfrac{2ab+6bc}{6a^2c+18ac^2}$ e) $\dfrac{a-2b}{a+b}-\dfrac{-3a+2b}{a+b}+\dfrac{-3a+5b}{a+b}$

Øvelse 4.13.
Reducér mest muligt:

a) $\dfrac{2p}{q+p}:\dfrac{8p^2}{q}$ b) $\dfrac{x-a}{x+a}:\dfrac{x+a}{x-a}$ c) $\dfrac{\dfrac{2p-3q}{pq}}{\dfrac{6p}{2p+3q}}$ d) $\dfrac{y^2-x^2}{\dfrac{x+y}{xy}}$

5. Kvadratrod.

Ved <u>kvadratroden</u> af et ikke-negativt tal forstås den ikke-negative værdi, som opløftet i anden giver tallet. Til at beskrive kvadratroden af et tal anvendes symbolet $\sqrt{\ }$. Hvis vi derfor vil angive kvadratroden af 25, så skriver vi: $\sqrt{25}$, og da 5 er et ikke-negativt tal, som opløftet i anden giver 25, (dvs. $5^2 = 25$) ser vi, at $\sqrt{25} = 5$. Nu er det naturligvis således, at det kun er de færreste tal, der har så ”pæne” kvadratrødder som vi netop så, at 25 har. Hvis vi f.eks. vil bestemme værdien af $\sqrt{17}$, så findes der ikke noget ”pænt tal” som opløftet i anden giver 17. På en regnemaskine kan vi finde en <u>tilnærmet</u> værdi af $\sqrt{17}$. Med 6 decimaler giver dette: 4,123106, men denne værdi er ikke helt præcis (bemærk, at $4{,}123106^2 = 17{,}00000309$, dvs. vi får ikke præcis 17). Uanset hvor mange decimaler vi tager med (endeligt antal), så vil vi stadigvæk kun have en tilnærmet værdi af $\sqrt{17}$. Den mest præcise angivelse af det tal, som opløftet i anden giver 17, er derfor kvadratroden af 17 skrevet med kvadratrodssymbolet, altså $\sqrt{17}$.

I almindelighed giver vi følgende definition:

<u>Definition 5.1.</u>
Kvadratroden af et ikke-negativt tal a betegnes $\sqrt{a}$.
Værdien af $\sqrt{a}$ er det <u>ikke-negative</u> tal, som opløftet i anden giver a.

Dette kan også formuleres således:
Hvis a er et ikke-negativt tal, dvs. hvis $a \geq 0$, så gælder der:

$$(*) \qquad \sqrt{a} = b \quad \Leftrightarrow \quad (\, b \geq 0 \ \wedge \ b^2 = a \,)$$

(Symbolet $\wedge$ læses: ”og”, og det betyder, at <u>begge</u> udsagn omkring det skal være opfyldt.
Symbolet $\Leftrightarrow$ læses: ”ensbetydende med”, og det betyder, at hvis det ene udsagn ($\sqrt{a} = b$) gælder, så gælder det andet udsagn ($b \geq 0 \wedge b^2 = a$) også – og omvendt !).

(∗) kaldes ofte for <u>rodprøven</u> (dvs. en test af, at et udsagn om en kvadratrod er korrekt)

Bemærk bl.a., at

- vi **<u>ikke kan tage kvadratroden af et negativt tal,</u>** (hvorfor ikke ??), og
- **<u>kvadratroden af et tal altid har en positiv værdi eller evt. værdien 0,</u>** **(**idet $\sqrt{0} = 0$).

Øvelse 5.2.

Udregn mest muligt inden lommeregneren tages i brug:

a) $\sqrt{36}+\sqrt{0{,}36}\ +\ \sqrt{81}+\sqrt{\dfrac{1}{4}}$ b) $-5^2+(-4)^2\cdot\sqrt{64}+\sqrt{(-2)\cdot(-32)}$

c) $\dfrac{\sqrt{676}+\sqrt{121}+\sqrt{1369}}{\sqrt{529}-13}$ d) $\dfrac{12:\sqrt{9}+98:\sqrt{49}}{\sqrt{100}\cdot\sqrt{0{,}4}}$

Øvelse 5.3.

Bestem værdien af $\sqrt{36+64}$ og af $\sqrt{36}+\sqrt{64}$. Kommentér resultatet.
Bemærk den skjulte parentes i udtrykket $\sqrt{36+64}$

I lighed med sum, differens, produkt og brøk gælder der også nogle regneregler for kvadratrødder:

Sætning 5.4.

1) For alle $a \geq 0$ er $\sqrt{a} \geq 0$
2) For alle $a \geq 0$ er $(\sqrt{a})^2 = a$
3) For alle $a \geq 0$ gælder $\sqrt{a^2} = a$; og for alle $a < 0$ gælder: $\sqrt{a^2} = -a$
4) For alle $a \geq 0$ gælder: $x^2 = a \Leftrightarrow (\ x = -\sqrt{a}\ \vee\ x = \sqrt{a}\ )$
   (Tegnet $\vee$ læses ”eller” og det betyder, at mindst et af udsagnene omkring det skal være opfyldt).
5) For alle $a \geq 0$ og $b \geq 0$ gælder: $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$
6) For alle $a \geq 0$ og $b > 0$ gælder $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$
7) Kvadratroden af en sum eller en differens kan **ikke omskrives**.
   Der gælder således almindeligvis, at $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a}+\sqrt{b}$ og $\sqrt{a-b} \neq \sqrt{a}-\sqrt{b}$
   (Tegnet $\neq$ betyder: er forskellig fra).

Bevis:

Ad 1) og 2): Dette følger direkte af definition 5.1.

Ad 3): Hvis $a \geq 0$ så følger resultatet: $\sqrt{a^2} = a$ direkte af rodprøven (jfr. definition 5.1) (a er et ikke-negativt tal, som opløftet i anden giver a^2).
Hvis $a < 0$, så er $-a > 0$, og da $(-a)^2 = a^2$ ses værdien $-a$ at passe i rodprøven, altså:
Hvis $a < 0$, så er $\sqrt{a^2} = -a$

Ad 4): Vi skal bevise, at der for et ikke-negativt tal a gælder:
$x^2 = a \Leftrightarrow (x = -\sqrt{a} \;\vee\; x = \sqrt{a})$, dvs. at udsagnet: $x^2 =$ a er ensbetydende med udsagnet: $x = -\sqrt{a} \;\vee\; x = \sqrt{a}$, og dette vil som nævnt tidligere sige, at vi skal argumentere for, at <u>hvis</u> det ene udsagn gælder, <u>så</u> gælder det andet også, <u>og omvendt</u>.

- Vi antager først, at $x^2 =$ a er opfyldt.
  Heraf ses, at x er et tal, som opløftet i anden giver tallet a. Hvis x er ikke-negativ, så har vi derfor ifølge definition 5.1, at $x = \sqrt{a}$. Hvis x er negativ, så har vi dels, at –x er positiv, dels at $(-x)^2 = x^2 =$ a, hvormed vi ser, at –x opfylder rodprøven i definition 5.1.
  Dette giver os, at: $-x = \sqrt{a}$ og dermed, at $x = -\sqrt{a}$. Hermed er det ønskede bevist.
  (Bemærkning til læseren: Lad dig ikke snyde af, at der står et minus foran x og vi alligevel siger, at –x er positiv. Dette skyldes jo, at tallet x selv er negativ. Hvis f.eks. $x = -3$, så er $-x = -(-3) = 3$, altså et positivt tal).
- Vi antager derefter omvendt, at udsagnet: $x = -\sqrt{a} \;\vee\; x = \sqrt{a}$ er opfyldt.
  Hvis $x = \sqrt{a}$, så får vi ifølge regel 1), at: $x^2 = (\sqrt{a})^2 = a$, og hvis $x = -\sqrt{a}$, så ser vi tilsvarende, at $x^2 = (-\sqrt{a})^2 = (\sqrt{a})^2 = a$. Hermed er det ønskede bevist.

Ad 5): Ifølge regel 1) har vi, at $\sqrt{a} \geq 0$ og $\sqrt{b} \geq 0$, hvoraf vi ser, at $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b} \geq 0$. Da vi desuden har, at $(\sqrt{a}\cdot\sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2\cdot(\sqrt{b})^2 = a\cdot b$, hvor regel 2) er anvendt, får vi ifølge rodprøven det ønskede resultat.
Ad 6): Bevises på helt samme måde som regel 5). Detaljerne overlades til læseren.
Ad 7): For at sikre, at de to størrelser ikke er ens, skal vi kunne finde et sæt af værdier, som giver forskellig værdi på venstresiden og på højresiden. I denne sammenhæng henvises til øvelse 5.3. ♥

<u>**Eksempel 5.5.**</u>
a) $(\sqrt{3{,}2})^2 - \sqrt{3{,}2^2} = 3{,}2 - 3{,}2 = 0$ ifølge regel 2) og 3) i sætning 5.4.
b) $x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 2 \vee x = -2$ ifølge regel 4) i sætning 5.4.
c) $x^2 = 5 \Leftrightarrow x = \sqrt{5} \vee x = -\sqrt{5}$ ifølge regel 4) i sætning 5.4. I denne og lignende situationer tillader man sig ofte at skrive følgende: $x^2 = 5 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{5}$, men det betyder det samme. Med 5 decimalers nøjagtighed har vi: $x^2 = 5 \Leftrightarrow x = \pm 2{,}23607$
d) Ifølge regel 5) og 6) i sætning 5.4. har vi:

$$\sqrt{16\cdot 49} = \sqrt{16}\cdot\sqrt{49} = 4\cdot 7 = 28 \qquad \text{og} \qquad \sqrt{\frac{81}{25}} = \frac{\sqrt{81}}{\sqrt{25}} = \frac{9}{5}$$

Regel 5) og 6) kan imidlertid også anvendes fra højre mod venstre, f.eks. hvis vi vil omskrive $\sqrt{20}\cdot\sqrt{5}$ (vi har hér: $\sqrt{20}\cdot\sqrt{5} = \sqrt{20\cdot 5} = \sqrt{100} = 10$), eller hvis vi vil sætte et tal udenfor kvadratrodstegnet f.eks. $\sqrt{60} = \sqrt{4\cdot 15} = \sqrt{4}\cdot\sqrt{15} = 2\cdot\sqrt{15} = 2\sqrt{15}$.
Bemærk skrivemåden: $2\sqrt{15}$, som altså betyder: 2 gange med $\sqrt{15}$.

e) Ved anvendelse af regel 5) i sætning 5.4 får vi:

$$\frac{\sqrt{ab}+\sqrt{bc}}{\sqrt{bd}} = \frac{\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}+\sqrt{b}\cdot\sqrt{c}}{\sqrt{b}\cdot\sqrt{d}} = \frac{\sqrt{a}+\sqrt{c}}{\sqrt{d}} \ ,$$

hvor vi også har anvendt reglen om forkortning af brøker.
Hvis vi gerne vil undgå at have et kvadratrodstegn i nævneren, kan vi forlænge brøken med $\sqrt{d}$, hvormed vi får:

$$\frac{\sqrt{a}+\sqrt{c}}{\sqrt{d}} = \frac{(\sqrt{a}+\sqrt{c})\cdot\sqrt{d}}{(\sqrt{d})^2} = \frac{\sqrt{ad}+\sqrt{cd}}{d},$$ hvor regel 5) igen er anvendt.

f) $\frac{a}{\sqrt{a}}$ kan ifølge regel 2) i sætning 5.4 omskrives således: $\frac{a}{\sqrt{a}} = \frac{(\sqrt{a})^2}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}}{\sqrt{a}} = \sqrt{a}$

g) Vi vil omskrive udtrykkene: $\frac{2}{\sqrt{8}-\sqrt{5}}$ og $\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{7}+\sqrt{2}}$, så der ikke optræder kvadratrødder i nævnerne. Dette gøres ved at forlænge brøkerne med et passende smart tal.
Ved benyttelse af regel 10 i sætning 2.1 ses, at kvadratrodstegnene kan forsvinde ved at forlænge den første brøk med $\sqrt{8}+\sqrt{5}$ og den sidste brøk med $\sqrt{7}-\sqrt{2}$. Dette giver følgende:

$$\frac{2}{\sqrt{8}-\sqrt{5}} = \frac{2\cdot(\sqrt{8}+\sqrt{5})}{(\sqrt{8}-\sqrt{5})\cdot(\sqrt{8}+\sqrt{5})} = \frac{2\sqrt{8}+2\sqrt{5}}{(\sqrt{8})^2-(\sqrt{5})^2} = \frac{2\sqrt{8}+2\sqrt{5}}{8-5} = \frac{4\sqrt{2}+2\sqrt{5}}{3}$$

og tilsvarende:

$$\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{7}+\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}\cdot(\sqrt{7}-\sqrt{2})}{(\sqrt{7}+\sqrt{2})\cdot(\sqrt{7}-\sqrt{2})} = \frac{3\sqrt{2}\sqrt{7}-3\sqrt{2}\sqrt{2}}{7-2} = \frac{3\sqrt{14}-6}{5}$$ ♥

Her følger en række øvelser til indøvning af regnereglerne for kvadratrødder:

Øvelse 5.6.
Udregn uden brug af lommeregner:

a) $2\cdot\sqrt{2^2+3\cdot 7}$ b) $\frac{12}{3+\sqrt{9}}$ c) $\frac{(\sqrt{9}+14)\cdot 4+5\cdot((8-3)\cdot 5-11)}{(2\cdot\frac{3}{2}-2)+\sqrt{16}\cdot(9+2^2\cdot 2)}$

Øvelse 5.7.
Bestem kvadratroden af følgende tal v.hj.a. lommeregneren:
2, 10, 1000, 50, 0,5 , 0,00002 , 0,0000000000052 og 123456789123456

Øvelse 5.8

Reducér mest muligt: $\dfrac{3a}{2+3\cdot 4}+\dfrac{4a}{\sqrt{81}+\sqrt{25}}$

Øvelse 5.9

Beregn følgende tal – og kommentér resultatet.

$\sqrt{625-400}$, $\sqrt{625}-\sqrt{400}$, $\sqrt{4+25}$, $\sqrt{4}+\sqrt{25}$, $\sqrt{169+81}$, $\sqrt{169}+\sqrt{81}$

Øvelse 5.10.

Bestem værdien af: $\left(\sqrt{3^2}\right)^2$ og $\sqrt{(-5)^2}$

Øvelse 5.11.

Beregn uden brug af lommeregner:

a) $\sqrt{12100}$ b) $\sqrt{27}\cdot\sqrt{3}$ c) $\sqrt{\dfrac{16}{25}}$ d) $\dfrac{\sqrt{20}}{\sqrt{5}}$

Øvelse 5.12.

Omskriv følgende brøker, så der ikke optræder kvadratrødder i nævneren, og reducér derefter mest muligt uden brug af lommeregner:

a) $\dfrac{17}{\sqrt{17}}$ b) $\dfrac{\sqrt{2}+11}{\sqrt{2}}$ c) $\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{11}}{\sqrt{5}}$ d) $\dfrac{6}{\sqrt{12}-\sqrt{5}}$ e) $\dfrac{2\sqrt{3}-3\sqrt{2}}{3\sqrt{7}+2\sqrt{13}}$

Øvelse 5.13.

Reducér mest muligt uden brug af lommeregner (Der optræder såkaldte ”blandede tal” i denne opgave, noget normalt bør undgås !!):

a) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{4\tfrac{1}{2}}+\sqrt{10}\cdot\sqrt{8\tfrac{1}{10}}+\sqrt{2}\cdot\sqrt{10}\cdot\sqrt{11\tfrac{1}{4}}$ b) $\sqrt{32}+\sqrt{50}-\sqrt{162}+\sqrt{98}$

c) $\sqrt{45}+\sqrt{40}-\sqrt{125}+\sqrt{250}-\sqrt{360}$ d) $\sqrt{175}+\sqrt{112}-\sqrt{343}-\dfrac{14}{\sqrt{7}}$

e) $\sqrt{16\tfrac{1}{3}}\cdot\dfrac{\sqrt{2\tfrac{1}{2}}}{\sqrt{30}}$ f) $\dfrac{\sqrt{5\tfrac{1}{7}}\cdot\sqrt{7\tfrac{1}{5}}}{\sqrt{35}}$

Øvelse 5.14.

Reducér mest muligt (b, c, x, y, p og q er alle positive tal):

a) $\sqrt{bc}\cdot\sqrt{\frac{b}{c}}$ b) $\sqrt{xy}\cdot\sqrt{\frac{1}{x}}\cdot\sqrt{y}$ c) $\frac{x}{\sqrt{x}}$ d) $\frac{x^2}{\sqrt{x}}$

e) $\frac{3\sqrt{p}+2\sqrt{q}}{3\sqrt{p}-2\sqrt{q}}$ f) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{x+y^2}\cdot\sqrt{\frac{x}{3y^2+3x}}$ g) $\sqrt{\frac{4x^2+24x+36}{x^2+9}}$

Øvelse 5.15.

Argumenter for følgende regel: $x^2 = y^2 \Leftrightarrow x = y \ \vee \ x = -y$

(Vejledning: Benyt sætning 5.4 pkt. 3) og 4))

6. Potenser og rødder

6.1. Potenser af tal og generelle regler for potenser.

Ved en potens af et tal forstår vi almindeligvis et tal opløftet i et helt tal. F.eks. er 3^5 en potens af 3 (tallet 5 kaldes eksponenten). Som det formodentlig er læseren bekendt har vi, at: $3^5 = 3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3$ (= 243), og vi bruger talemåden: "3^5 er 3 ganget med sig selv 5 gange".
Tilsvarende har vi: $(-2{,}3)^3 = (-2{,}3)\cdot(-2{,}3)\cdot(-2{,}3)$ (= $-12{,}167$), og generelt har vi, at hvis a er et givet tal og n er et positivt helt tal, så er: $a^n = a\cdot a\cdot a\cdot \ldots\cdot a$, hvor der er n led i produktet.
Dette potensbegreb vil vi nu udvide til at omfatte andre eksponenter end positive hele tal. I første omgang vil vi udvide det til at omfatte alle heltallige eksponenter (altså også 0 og negative hele tal), og senere i kapitlet vil vi udvide det til at omfatte eksponenter, som er en brøk imellem to hele tal.

Som motivation for den første definition vil vi bemærke, at hvis $a \neq 0$ er et givet tal, så gælder der for alle $n \geq 2$, at $a^n : a = a^{n-1}$, f.eks., at $7^9 : 7 = 7^8$, $2^{11} : 2 = 2^{10}$ og $a^5 : a = a^4$ (Hvorfor ??).
Denne "potensregneregel" vil vi nu benytte til at definere a^n, hvor n er 0 eller et negativt helt tal.

Vi har: $a^4 = a^5 : a$, $a^3 = a^4 : a$, $a^2 = a^3 : a$. På samme måde fortsættes:

$$a^1 = a^2 : a = a \quad , \qquad a^0 = a^1 : a = a : a = 1 \, , \qquad a^{-1} = a^0 : a = 1 : a = \frac{1}{a} \quad ,$$

$$a^{-2} = a^{-1} : a = \frac{1}{a} : a = \frac{1}{a\cdot a} = \frac{1}{a^2} \quad , \qquad a^{-3} = a^{-2} : a = \frac{1}{a^2} : a = \frac{1}{a^2\cdot a} = \frac{1}{a^3} \quad , \qquad \text{osv. osv.}$$

På baggrund af dette giver vi følgende definition:

Definition 6.1.
For alle $a \neq 0$ og alle positive naturlige tal n sættes:

$$a^1 = a \quad , \quad a^0 = 1 \quad \text{og} \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Eksempel 6.2.

a) $8^0 = 1$ b) $2{,}6^1 = 2{,}6$ c) $4^{-3} = \frac{1}{4^3} = \frac{1}{64} = 0{,}015625$

d) $\left(\frac{1}{5}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(\frac{1}{5}\right)^2} = \frac{1}{\frac{1}{5^2}} = 5^2 = 25$ ♥

Ved omskrivninger af udtryk i forbindelse med såvel det klassisk kendte som det udvidede potensbegreb (jfr. definition 6.1.) gælder der følgende regneregler, som anføres uden bevis. (Beviset er ikke vanskeligt, men meget omstændeligt, idet der for hver del af sætningen skal tages hensyn til om n og m hver for sig er positive, nul eller negative – samt til deres indbyrdes størrelsesforhold).

Sætning 6.3.
For alle hele tal n og m, og for alle tal a og b, som ikke er 0, gælder der følgende regneregler:

1) $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ 2) $(a^n)^m = a^{nm}$ 3) $\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

4) $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$ 5) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$ 6) $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ og $\dfrac{1}{a^{-n}} = a^n$

Eksempel 6.4.
a) Ifølge regel 1 i sætning 6.3 har vi: $1{,}6^5 \cdot 1{,}6^7 \cdot 1{,}6^{-13} \cdot 1{,}6^3 = 1{,}6^{5+7-13+3} = 1{,}6^2 \quad (= 2{,}56)$

b) Ifølge regel 2 i sætning 6.3. har vi:

$$((-2)^3)^4 \cdot ((-2)^{-5})^4 \cdot ((-2)^{-1})^{-8} = (-2)^{3\cdot 4} \cdot (-2)^{-5\cdot 4} \cdot (-2)^{-1\cdot(-8)} =$$

$$(-2)^{12} \cdot (-2)^{-20} \cdot (-2)^8 = (-2)^{12-20+8} = (-2)^0 = 1$$

hvor vi i de sidste omskrivninger bruger regel 1).

c) Ifølge regel 3 i sætning 6.3 har vi: $\dfrac{\sqrt{7}^5}{\sqrt{7}^7} = \sqrt{7}^{5-7} = \sqrt{7}^{-2} = \dfrac{1}{\sqrt{7}^2} = \dfrac{1}{7}$

d) Ifølge regel 4 i sætning 6.3 – anvendt fra højre mod venstre – har vi:

$$8^7 \cdot 0{,}5^7 \cdot (-0{,}25)^7 = (8 \cdot 0{,}5)^7 \cdot (-0{,}25)^7 = 4^7 \cdot (-0{,}25)^7 = (4 \cdot (-0{,}25))^7 = (-1)^7 = -1$$

e) Ifølge diverse regler fra sætning 6.3 mm. har vi:

$$\frac{x^5 \cdot y^3 \cdot (x^2 \cdot y^{-3})^{-4} \cdot x^{-9}}{\left(\dfrac{x}{y}\right)^{-3}} = \frac{x^{-4} \cdot y^3 \cdot (x^2)^{-4} \cdot (y^{-3})^{-4}}{\dfrac{x^{-3}}{y^{-3}}} = x^{-4} \cdot y^3 \cdot x^{-8} \cdot y^{12} \cdot \frac{y^{-3}}{x^{-3}} =$$

$$x^{-12} \cdot y^{12} \cdot x^3 = x^{-9} \cdot y^{12}$$

Læseren opfordres kraftigt til led for led at beskrive hvilke regler, der anvendes i dette sidste reduktionseksempel ! ♥

Øvelse 6.5.
Bevis regel 1) i sætning 6.3 ved at gennemgå følgende skridt:

a) Argumentér for, at reglen gælder, hvis $n > 0$ og $m > 0$

b) Argumentér for, at reglen gælder, hvis m = 0 og n er vilkårligt valgt.

c) Argumentér for, at reglen gælder, hvis $n > 0$, $m < 0$ og $n \geq -m > 0$. Bemærk i denne sammenhæng, at da $m < 0$, så er $-m > 0$, og at vi dermed har:
$$a^n \cdot a^m = a^n \cdot \frac{1}{a^{-m}} = \frac{a \cdot a \cdot a....}{a \cdot a \cdot a...} \;,$$
hvor vi har anvendt definition 6.1, og hvor der i den sidste brøk står n a’er i tælleren og $-m$ a’er i nævneren. Omskriv videre herfra for at ende op med a^{n+m} .

d) Argumentér for, at reglen gælder, hvis $n > 0$, $m < 0$ og $n < -m$. Anvend samme omskrivningsprincip som i c)

e) Argumentér for, at reglen gælder, hvis $n < 0$ og $m < 0$. Anvend at $-n > 0$ og $-m > 0$, samt omskrivningsprincippet fra pkt. c).

f) Argumentér for, at da n og m optræder symmetrisk i regel 1, så er alle muligheder dækket i forbindelse med de ovenstående tilfælde a) – e), hvormed reglen er bevist.

Øvelse 6.6.
Bevis regel 6) i sætning 6.3 (Vejledning: Opdel i tre tilfælde: $n > 0$, $n = 0$ og $n < 0$).

Her følger nogle øvelser til indøvning af potensregnereglerne:

Øvelse 6.7.
Reducer følgende udtryk uden brug af lommeregner:

a) $2^2 \cdot 2^5$	b) $3^2 \cdot 3^{-9}$	c) $(\frac{1}{5})^{-2} \cdot (\frac{1}{5})^4$	d) $\dfrac{5^2}{5^{-4}}$
e) $((\frac{2}{3})^{-5})^{-2}$	f) $7^{-5} \cdot (\frac{1}{7})^{-5}$	g) $3^2 \cdot 3^4 \cdot 3^{-7} \cdot 3^5$	h) $2^2 \cdot 2^{-9} \cdot 2^5 \cdot 8$
i) $(\frac{1}{2})^{-3} \cdot (\frac{1}{2})^{-4}$	j) $(\frac{1}{2})^{-3} : (\frac{1}{2})^{-7}$	k) $((\frac{1}{2})^3)^{-4}$	l) $((\frac{2}{5})^{-2})^{-3}$

Øvelse 6.8.
Reducer følgende udtryk uden brug af lommeregner:

a) $5^{-4} \cdot 5^{-3} \cdot 25^{-3}$	b) $2^3 \cdot (\frac{1}{2})^{-5} \cdot 4^2 \cdot 8^{-3}$	c) $(\frac{1}{2})^3 \cdot 2^2 \cdot (\frac{1}{2})^{-3}$
d) $-3^3 \cdot 4 \cdot (-8)^{-2} \cdot (-24)^2$	e) $((\frac{1}{5})^2)^3$	f) $(((-3)^4)^3)^2$

Øvelse 6.9.
Udregn mest muligt inden lommeregneren tages i brug:

a) $(3^2 - 2^3)(3^4 - 4^3) + \sqrt{0{,}36}$

b) $9\cdot\sqrt{49} - 5^3\cdot 4 + 3\cdot 7^3 \cdot 11 \cdot 4^4 - 13^3$

c) $(9\cdot\sqrt{49} - 6^3 - (5 + 4^2))\cdot(3^6 \cdot 3 \cdot 2^4 - 13^4)$

d) $\dfrac{6\cdot 1^3 - 5^5\cdot 2^3 + 233}{9^4 : \sqrt{81} + 8\cdot(142-146)^5}$

Øvelse 6.10.
Reducér følgende udtryk:

a) $\dfrac{p^{19}\cdot(q^{-3})^5\cdot(pq)^{-12}}{\left(\dfrac{p^2}{q}\right)^{-13}}$ b) $\dfrac{xy}{y^5}\cdot\left(\dfrac{y}{x}\right)^4\cdot(x^2y^2)^{-3}\cdot x^5y^{11}$

6.2. Potenser af 10.

Af en række årsager, der alle sammen knytter sig til, at vi anvender 10-talsystemet til beskrivelse af størrelsen af forskellige værdier, er specielt reglerne for potenser af 10 af betydning.
I forlængelse af definition 6.1 og sætning 6.3 ser vi, at der gælder følgende sætning:

Sætning 6.11. Regneregler for potenser af 10

For alle hele tal n og m gælder:

1) $10^n\cdot 10^m = 10^{n+m}$ 2) $\dfrac{10^n}{10^m} = 10^{n-m}$ 3) $(10^n)^m = 10^{nm}$

4) $10^{-n} = \dfrac{1}{10^n}$ og $\dfrac{1}{10^{-n}} = 10^n$

Eksempel 6.12.
a) $10^7\cdot 10^{-3} = 10^4$ b) $10^{-8}\cdot 10^2 = 10^{-6}$ c) $(10^2)^4 = 10^8$

d) $\dfrac{10^3}{10^{-2}} = 10^{3-(-2)} = 10^5$ e) $\dfrac{(10^3)^4}{(10^{-3})^2} = \dfrac{10^{12}}{10^{-6}} = 10^{18}$ ♥

Potenser af 10 bruges specielt ved angivelse af meget store eller meget små størrelser. Men inden vi kommer yderligere ind på dette, skal det først bemærkes, at der er en nøje sammenhæng mellem potenser af 10 og antal nuller foran eller bagefter kommaet i decimalbrøker.

Eksempel 6.13.

a) 100000 er det samme som 10^5 ($= 1\cdot 10^5$)
b) 0,0001 er det samme som 10^{-4} ($= 1\cdot 10^{-4}$)
c) 34567,8 er det samme som $3{,}45678\cdot 10^4$
d) 0,000008765 er det samme som $8{,}765\cdot 10^{-6}$ ♥

Generelt gælder der, at

- kommaet flyttes n pladser til højre ved at gange med 10^n
- kommaet flyttes n pladser til venstre ved at gange med 10^{-n}

Eksempel 6.14.

Som netop omtalt bruges potenser af 10 bl.a. til at udtrykke meget store eller meget små størrelser.

a) Hvis vi skal angive Jordens masse, som er ca. 5980000000000000000000000 kg, så kan dette nemmere skrives og overskues på følgende måde: $5{,}98\cdot 10^{24}$ kg
b) Hvis vi skal angive størrelsen af den elektriske ladning, der sidder på en elektron, så kan vi skrive $1{,}602\cdot 10^{-19}$ C i stedet for: 0,0000000000000000001602 C
(C står for den fysiske enhed for elektrisk ladning: ”Coulomb”) ♥

I forbindelse med størrelser med en enhed (fysiske, kemiske, biologiske, geofysiske, ... størrelser) anvendes potenser af 10 så ofte, at man har indført en forkortet betegnelse for visse potenser af 10. Disse går under navnet: dekadiske præfikser (dekadisk kommer af decem, som betyder 10 på latin, og et præfix er en størrelse, man stiller foran (præ)).

De dekadiske præfikser:

T	G	M	k	h	da	d	c	m	μ	n	p	f	a
tera	giga	mega	kilo	hekto	deka	deci	centi	milli	mikro	nano	pico	femto	atto
10^{12}	10^9	10^6	10^3	10^2	10^1	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-6}	10^{-9}	10^{-12}	10^{-15}	10^{-18}

Eksempel 6.15.

a) Hvis vi f.eks. taler om en elektrisk strømstyrke på 4,8 μA (læses: mikro-ampere), så betyder dette: $4{,}8\cdot 10^{-6}$ A
b) Hvis vi taler om, at et givet kraftværk kan levere en effekt på 670 MW (læses: megawatt), så betyder dette: $670\cdot 10^6$ W ♥

Udover anvendelse af de dekadiske præfikser ser man ofte den såkaldte ”**scientific notation**” (naturvidenskabelig opskrivningsmetode) anvendt.
Denne metode består i at anføre talværdien med ét ciffer foran kommaet samt en potens af 10 ganget på (altså f.eks. $2{,}14\cdot 10^{-5}$ i stedet for 0,0000214)
Denne metode er også anvendt i eksempel 6.13 c) d) og i eksempel 6.14.

Her følger en række øvelser til indøvning af regnereglerne for potenser af 10 mm.:

Øvelse 6.16.
Reducér mest muligt:

a) $10^2\cdot 10^{-4}$ b) $(10^2\cdot 10^{-4})^3$ c) $(10^{-2})^3\cdot 10^{-4}$ d) $(10^{-2})^{-1}\cdot 10^{-4}\cdot(\frac{1}{10^{-2}})^3$

Øvelse 6.17.
Omskriv hvert af nedenstående tal til decimaltal:

a) 10^1+10^{-3} b) $(10^1+10^3)\cdot 10^{-2}$ c) $\frac{10^2+10^3}{10^2}$ d) $3\cdot 10^1+5\cdot 10^3$ e) $7\cdot 10^{-1}+5\cdot 10^2$

Øvelse 6.18.
Angiv en række eksempler på brug af de dekadiske præfikser.

Øvelse 6.19.
Skriv hver af følgende værdier ved hjælp af dekadiske præfixer:

a) 8500000 m	b) 0,0000000023 m	c) 0,0056 m	d) 9876 m
e) 2300000 Ω (ohm)	f) 23000000 Ω	g) 98760000000 W	h) 0,000532 A

Øvelse 6.20
Skriv hvert af følgende tal v.hj.a. scientific notation:

a) 123456	b) 7564,2345	c) 0,00001278	d) 9876,0076

Øvelse 6.21.
Udregn mest muligt inden lommeregneren tages i brug:

a) 20 kΩ · 23 μA (Ω·A = V (Volt)) b) $1{,}602\cdot 10^{-19}$ C · 2000 kV (C·V = J (Joule))

c) $\frac{3\cdot 10^8}{630\cdot 10^{-9}}$ d) $6{,}63\cdot 10^{-34}\cdot 280\cdot 10^{18}$ e) $6{,}02\cdot 10^{23}\cdot 1{,}66\cdot 10^{-27}$

Øvelse 6.22.
Ifølge Ohm's lov: $U = R \cdot I$ er spændingsforskellen U over en modstand lig med strømstyrken I igennem modstanden gange med modstandens størrelse R. (U måles i volt (V), R i ohm (Ω) og I i ampere (A)).
a) Bestem U, idet R = 14,6 MΩ og I = 0,4 mA
b) Bestem R, idet U = 12 kV og I = 0,8 mA
c) Bestem I, idet U = 30 V og R = 325 kΩ.

Øvelse 6.23.
Jorden kan med tilnærmelse antages at være en kugle med radius $6{,}367 \cdot 10^6$ m og med massen $5{,}976 \cdot 10^{24}$ kg. Rumfanget af en kugle er: $\frac{4}{3}\pi r^3$, hvor r er radius i kuglen; og den gennemsnitlige massefylde af et givet legeme er legemets masse divideret med dets rumfang.
a) Bestem Jordens gennemsnitlige massefylde.
b) Jord<u>skorpen</u> (dvs. de øverste 30 km) har en gennemsnitlig massefylde på omkring 2,7 g/cm^3. Hvilke konklusioner kan drages ved sammenligning af de to massefylder ?

6.3. Rødder (den n'te rod).

På samme måde som med kvadratroden kan vi definere den n'te rod af et tal a :

Definition 6.24.
Lad a være et ikke-negativt tal og lad n være et positivt helt tal. Den n'te rod af a betegnes $\sqrt[n]{a}$, og værdien af $\sqrt[n]{a}$ er det <u>ikke-negative</u> tal, som opløftet i n'te giver a.

Dette kan også formuleres således:
Hvis a er et ikke negativt tal, dvs. hvis $a \geq 0$, og hvis n er et positivt helt tal, så gælder der:

(∗) $\sqrt[n]{a} = b \quad \Leftrightarrow \quad (b \geq 0 \ \wedge \ b^n = a)$

(∗) kaldes ofte for <u>rodprøven</u> (dvs. en test af, at et udsagn om en (n'te) rod er korrekt).

Eksempel 6.25.
a) $\sqrt[5]{32} = 2$, idet $2 \geq 0$ og $2^5 = 32$

b) $\sqrt[6]{4{,}826809} = 1{,}3$, idet $1{,}3 \geq 0$ og $1{,}3^6 = 4{,}826809$

c) $\sqrt[7]{1} = 1$, idet $1 \geq 0$ og $1^7 = 1$

d) $\sqrt[n]{0} = 0$, idet $0 \geq 0$ og $0^n = 0$

e) $\sqrt[11]{4367} = 2{,}142524$, idet $2{,}142524 \geq 0$ og $2{,}142524^{11} = 4367$.

Faktisk gælder der: $2{,}142524^{11} = 4366{,}994553$, så tallet 2,142524, der er fundet på lommeregneren, angiver altså kun en <u>tilnærmet</u> værdi af $\sqrt[11]{4367}$. ♥

<u>Øvelse 6.26.</u>

Bestem følgende værdier:

a) $\sqrt[3]{8{,}6}$ b) $\sqrt[22]{0{,}891}$ c) $\sqrt[13]{3768544}$ d) $\sqrt[5]{0{,}000076}$

I forbindelse med den n'te rod af tal gælder der en række regneregler i lighed med reglerne for kvadratrødder, bl.a. følgende (hvis bevis overlades til læseren):

<u>Sætning 6.27.</u>

For alle $a \geq 0$, alle $b > 0$ og alle positive hele tal n gælder:

1) $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$ 2) $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

Regel 1) i sætning 6.27 gælder også for $b = 0$. Hvorfor ?

<u>Eksempel 6.28.</u>

a) $\sqrt[5]{160} = \sqrt[5]{32 \cdot 5} = \sqrt[5]{32} \cdot \sqrt[5]{5} = 2 \cdot \sqrt[5]{5} = 2\sqrt[5]{5}$ (= 2,759459) .

Værdien i parentesen er fundet v.hj.a. lommeregneren. Bemærk, at der i opskrivningen: $2\sqrt[5]{5}$ er et skjult gangetegn imellem 2 og $\sqrt[5]{5}$

b) For alle $x > 0$ og $y > 0$ gælder der:

$$x^2 \cdot \sqrt[4]{\frac{y^5}{x^8}} \cdot \sqrt[4]{y^3} = x^2 \cdot \frac{\sqrt[4]{y^5}}{\sqrt[4]{x^8}} \cdot \sqrt[4]{y^3} = x^2 \cdot \frac{\sqrt[4]{y^4 \cdot y}}{\sqrt[4]{x^4 \cdot x^4}} \cdot \sqrt[4]{y^3} =$$

$$x^2 \cdot \frac{\sqrt[4]{y^4} \cdot \sqrt[4]{y} \cdot \sqrt[4]{y^3}}{\sqrt[4]{x^4} \cdot \sqrt[4]{x^4}} = x^2 \cdot \frac{y \cdot \sqrt[4]{y^3 \cdot y}}{x \cdot x} = y^2$$

Her er reglerne i sætning 6.27 samt definition 6.24 brugt flere gange i omskrivningen. ♥

Her følger et par øvelser til indøvning af regler for den n'te rod:

Øvelse 6.29.
Reducér/Omskriv – og udregn:
a) $\sqrt[4]{405}$ b) $\sqrt[3]{18} \cdot \sqrt[3]{12}$ c) $\sqrt[6]{62500}$ d) $\sqrt[5]{6} \cdot \sqrt[6]{5}$

Øvelse 6.30.
Reducér mest muligt (alle de variable: p, q, u, w, x, y og z er positive):

a) $\sqrt[3]{xyz} \cdot \sqrt[3]{z^{-1}xy}$ b) $\sqrt[4]{p^2q} \cdot \sqrt[4]{\frac{q^2}{p}} \cdot \sqrt[4]{\frac{q}{p}}$ c) $\sqrt[7]{\frac{u^6}{w^3}} \cdot w \cdot \sqrt[7]{\frac{u^8}{w^4}} \cdot \frac{1}{u^2}$

6.4. Udvidelse af potensbegrebet.

Ved hjælp af den n'te rod kan vi udvide potensbegrebet til at omfatte potenser af ikke-negative tal, hvor eksponenten er en brøk mellem to hele tal.
Udvidelsen bygger dels på rodprøven i definition 6.24, dels på potensregnereglen: $(a^s)^t = a^{st}$, som vi ønsker også skal gælde for det nye potensbegreb (jfr. sætning 6.3. 2).

Eksempel 6.31.
Hvis vi f.eks. skal definere, hvad vi vil forstå ved tallet $64^{\frac{1}{6}}$, så skal værdien være et ikke-negativt tal, som ifølge potensregnereglen $(a^s)^t = a^{st}$ bl.a. opfylder, at $(64^{\frac{1}{6}})^6 = 64^{\frac{1}{6}\cdot 6} = 64^1 = 64$. Vi ser derfor, at tallet $64^{\frac{1}{6}}$ opfylder rodprøven for $\sqrt[6]{64}$, hvorfor vi må sætte $64^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{64}$ (som i øvrigt er lig med 2).
Idet vi som omtalt vil have potensregnereglen $(a^s)^t = a^{st}$ til at gælde, ser vi herefter f.eks., at $(\sqrt[6]{64})^7 = (64^{\frac{1}{6}})^7 = 64^{\frac{7}{6}}$, hvormed vi har fået tillagt en værdi til udtrykket $64^{\frac{7}{6}}$. (Værdien af $64^{\frac{7}{6}}$ er i øvrigt 128. Hvorfor ?).
På tilsvarende måde fastsætter vi, at: $21{,}9^{\frac{7}{6}} = (\sqrt[6]{21{,}9})^7$ og $0{,}0581^{\frac{7}{6}} = (\sqrt[6]{0{,}0581})^7$.

Det er selvfølgelig ikke kun muligt at udvide potenser af tal til at omfatte eksponenten $\frac{7}{6}$.
Vi kan bruge en vilkårlig brøk imellem to hele tal som eksponent i det udvidede potensbegreb. Hvis vi f.eks. gerne vil finde $33{,}7^{\frac{19}{4}}$, så anvendes samme fremgangsmetode, hvormed vi har: $33{,}7^{\frac{19}{4}} = (\sqrt[4]{33{,}7})^{19}$ (= 18040228,29) , hvor værdien i parentesen er fundet ved hjælp af lommeregneren.

Hvis vi gerne vil finde $9^{0,14}$, så konstaterer vi først, at $0{,}14 = \dfrac{14}{100}$, hvoraf vi ser, at

$9^{0,14} \;=\; 9^{\frac{14}{100}} \;=\; (\sqrt[100]{9})^{14} \quad (=1{,}36017)$.

Hvis endelig vi gerne vil finde f.eks. $5{,}1^{-\frac{5}{7}}$, så fastlægger vi dette som:

$5{,}1^{-\frac{5}{7}} \;=\; 5{,}1^{\frac{-5}{7}} \;=\; (\sqrt[7]{5{,}1})^{-5}$, hvor vi husker på, at $(\sqrt[7]{5{,}1})^{-5} = \dfrac{1}{(\sqrt[7]{5{,}1})^{5}}$.

V.hj.a. regnemaskinen får vi værdien: $5{,}1^{-\frac{5}{7}} = 0{,}3123149$. ♥

Indholdet i eksempel 6.31 kan generaliseres til følgende definition:

Definition 6.32.

For alle $a \geq 0$ og alle positive hele tal n sættes: $a^{\frac{1}{n}} \;=\; \sqrt[n]{a}$

For alle $a > 0$, alle hele tal p og alle positive hele tal q sættes: $a^{\frac{p}{q}} = (\sqrt[q]{a})^{p}$

Bemærk, at $\sqrt{a}$ altså er det samme som $a^{\frac{1}{2}}$, dvs.: $\sqrt{a} \;=\; a^{\frac{1}{2}}$

Bemærk desuden, at vi har defineret, at vi som eksponent kan have en vilkårlig endelig decimalbrøk. Hvis eksponenten f.eks. er 3,781, så opløfter vi blot det givne tal i brøken $\dfrac{3781}{1000}$.

Det bemærkes uden bevis, at

samtlige regneregler i sætning 6.3 gælder også for det udvidede potensbegreb.

I forbindelse med det udvidede potensbegreb gælder der desuden følgende sætning:

Sætning 6.33.

For alle $a > 0$, alle hele tal p og alle positive hele tal q gælder følgende formler:

$$\sqrt[q]{a^p} = (a^p)^{\frac{1}{q}} = a^{\frac{p}{q}} = (a^{\frac{1}{q}})^p = \left(\sqrt[q]{a}\right)^p$$

Beviset for denne sætning følger direkte af definition 6.32 samt af følgende potensregneregel: $(a^s)^t = a^{st} = a^{ts} = (a^t)^s$. Detaljerne overlades til læseren.

Her følger nogle øvelser til indøvning af det udvidede potensbegreb:

Øvelse 6.34.
Opskriv definitionen af hver af følgende størrelser og find værdien på lommeregneren:

a) $0{,}5^{\frac{3}{4}}$ b) $345^{\frac{1}{13}}$ c) $0{,}123^{0{,}123}$ d) $28^{-\frac{6}{11}}$ e) $41{,}2^{-\frac{13}{6}}$

Øvelse 6.35.
Reducér mest muligt:

a) $\sqrt[4]{7}\cdot 7^{\frac{3}{5}}\cdot 7^{1{,}25}$ b) $\dfrac{\sqrt[5]{6}\cdot 3^{\frac{7}{4}}\cdot 2^{\frac{1}{3}}}{12^{\frac{3}{5}}}$ c) $\dfrac{5^{-2{,}3}\cdot 2^{1{,}9}(5\cdot 2)^{3{,}6}}{2^{0{,}2}\cdot 5^{-1{,}8}}$

Øvelse 6.36.
Reducér mest muligt:

a) $\dfrac{x^{3{,}4}\cdot x^{-1{,}2}\cdot x^{\frac{-6}{5}}}{\sqrt{x}\cdot x^{\frac{1}{10}}}$ b) $\dfrac{p^{\frac{-8}{11}}\cdot q^{\frac{3}{2}}\cdot (p\cdot q^{\frac{1}{3}})^{\frac{3}{7}}}{p^{-5}\cdot \sqrt[21]{q^5}}$

7. Regningsarternes hierarki

På side 4 så vi på regningsarternes hierarki. Men vi har siden da indført to nye regningsarter: roduddragning og udvidet potensopløftning. Disse nye regningsarters plads i hierarkiet fremgår af følgende oversigt:

Regningsarternes hierarki:

Generelt regner man fra venstre mod højre, når man skal udregne værdien af et udtryk, men nogle regningsarter kommer før andre (har højere prioritet, ligger højere i hierarkiet):

1. Først beregnes udtryk i parenteser. (Dette gælder også i de såkaldte skjulte parenteser i brøker og under rodtegn). Hvis der er flere parenteser inde i hinanden, begyndes med den inderste.

2. Herefter beregnes rødder og potenser.

3. Herefter foretages multiplikation (gange) og division (brøk).

4. Til sidst udføres addition (plus, sum) og subtraktion (minus).

Bemærk, at beregningen af udtryk inde i parenteser eller under rodtegn naturligvis følger det samme hierarki (samme rækkefølge).

Eksempel 7.1.

Ved udregning af udtrykket: $(5+\sqrt{25-3^2})\cdot(\sqrt[3]{5\cdot 7-2^3}+(6-2)^{-2}\cdot(5^2+7))$ skal ledene udregnes i den rækkefølge, der fremgår af følgende omskrivning (Gør selv nøje rede for detaljerne !!!) :

$$(5+\sqrt{25-3^2})\cdot(\sqrt[3]{5\cdot 7-2^3}+(6-2)^{-2}\cdot(5^2+7)) \;=$$

$$(5+\sqrt{25-9})\cdot(\sqrt[3]{35-8}+4^{-2}\cdot(25+7)) \;=$$

$$(5+\sqrt{16})\cdot(\sqrt[3]{27}+4^{-2}\cdot 32) \;=\; (5+4)\cdot(3+2) \;=\; 9\cdot 5 \;=\; 45 \qquad \heartsuit$$

Øvelse 7.2.

Udregn følgende udtryk:

a) $5\sqrt{36+(-2)^5}$ b) $\dfrac{2+\sqrt{16-7}}{2+5^2-12}$ c) $(((56-4^3)+3)^2-20)\cdot 2$

8. Ligninger

En ligning er et udtryk (et såkaldt ”åbent udsagn”), hvori der optræder et lighedstegn og en eller flere ubekendte størrelser. F.eks. er:

a) $2x + 3 = 0$ b) $\sqrt{y-3} = 2y - 7$ c) $\frac{s}{s^2+3} - \frac{5s}{4} = \frac{1}{s^2}$

d) $2x^2 + 3x - 9 = 0$ e) $q^2 + 2q + p^2 + 8p = -13$

eksempler på ligninger, hvor der i de fire første ligninger er én ubekendt, medens der i den sidste er to ubekendte. Bemærk, at den variable naturligvis ikke behøver hedde x !!!

Vi siger at et tal er en løsning til en ligning, hvis tallet indsat på den ubekendtes plads gør lighedstegnet rigtigt (dvs. gør udsagnet sandt).
F.eks. er $x = -1{,}5$ en løsning til den første ligning, $y = 4$ er en løsning til den anden ligning, $s = -1$ er en løsning til den tredje ligning, $x = -3$ er en løsning til den fjerde ligning og $(q , p) = (1, -4)$ en løsning til den sidste ligning. (Det overlades til læseren at kontrollere dette ved at indsætte de forskellige værdier i de respektive ligninger).

Som det fremgår kan en ligning have et meget kompliceret udseende. Og mange ligninger kan have mere end én løsning. F.eks. er også $x = 1{,}5$ en løsning til den fjerde ligning, lige-som også $(q , p) = (-1, -2)$ er en løsning til den sidste ligning. (Kontrollér dette !!).

Vi siger, at vi løser ligningen, når vi bestemmer samtlige løsninger til ligningen.
Når man har bestemt samtlige løsninger til en given ligning, så bør disse (hvis man har lært om mængdelære) opskrives som en mængde. Denne mængde kaldes løsningsmængden L for ligningen. Dette vil blive anvendt i det følgende, selv om mængdelære ikke er omtalt i denne bog.

I stedet for ordet ”ubekendt” anvendes ofte ordet ”variabel”, og vi taler da om ligningens variable.

Almindeligvis gælder der følgende:
En ligning løses ved omskrivninger og reduktioner indtil vi kan udtale os entydigt om den/de variables værdier – f.eks. ved at den/de variable er blevet isoleret på den ene side af lighedstegnet. **En ligning løses** altså **ikke ved at gætte eller prøve sig frem.**

I det følgende vil vi kun betragte simple ligninger af typerne $ax = b$ eller $x^c = d$, hvor a, b, c og d er konstanter (givne tal) og x er den variable – eller ligninger der kan omskrives til disse typer. Ligninger af disse typer omtales i afsnit 8.1 – 8.5.
I afsnit 8.6 vil vi se på simple ligningssystemer af typen: $ax + by = c$ og $dx + ey = f$, hvor a, b, c, d, e og f er givne konstanter (givne tal), og x og y er de variable. (Dette kaldes to ligninger med to ubekendte. Mere herom senere).

I forbindelse med løsning af ligninger gælder der følgende generelle regler:

Sætning 8.1. **(Regneregler for løsning af ligninger)**

1) Man må lægge samme tal til eller trække samme tal fra på begge sider af et lighedstegn uden at ligningens sandhedsværdi ændres.
   $a = b \Leftrightarrow a + c = b + c$

2) Man må gange eller dividere med sammen tal på begge sider af lighedstegn, hvis tallet er forskelligt fra 0, uden at ligningens sandhedsværdi ændres.
   Hvis $c \neq 0$ har vi: $a = b \Leftrightarrow a \cdot c = b \cdot c$

3) Et produkt er nul, netop når en af faktorerne er nul. (Nulreglen for et produkt)
   $a \cdot b = 0 \Leftrightarrow (a = 0 \vee b = 0)$

4) En brøk er nul, netop når tælleren er nul. (Nulreglen for en brøk)
   $\frac{a}{b} = 0 \Leftrightarrow a = 0$

8.1. Én ligning med én ubekendt – løst ved omskrivning og reduktion

Vi starter med at se på et eksempel, hvordan sætning 8.1 sætter os i stand til at isolere den variable i en ligning og dermed løse ligningen.

Eksempel 8.2.

a) Betragt ligningen: $2x + 3 = 0$. Ved hjælp af sætning 8.1. 1) ser vi, at:

$$2x + 3 = 0 \Leftrightarrow 2x + 3 - 3 = 0 - 3 \Leftrightarrow 2x = -3$$

hvor vi har trukket 3 fra på begge sider af lighedstegnet og derefter reduceret hver side for sig. Ved hjælp af sætning 8.1. 2) ser vi herefter, at:

$$2x = -3 \Leftrightarrow \frac{2x}{2} = \frac{-3}{2} \Leftrightarrow x = -\tfrac{3}{2}$$

hvor vi har divideret med 2 på begge sider af lighedstegnet og derefter reduceret på hver side.

Med lidt rutine vil de samlede beregninger i dette eksempel blive anført på følgende korte form:

$$2x + 3 = 0 \Leftrightarrow 2x = -3 \Leftrightarrow x = -\tfrac{3}{2}$$

Vi ser af beregningerne, at $x = -\tfrac{3}{2} = -1{,}5$ er den eneste løsning til ligningen, hvormed løsningsmængden for denne ligning er givet ved: $L = \left\{-\tfrac{3}{2}\right\}$.

b) Vi vil løse ligningen: $2-\frac{3}{x}-2x = 2(\frac{5}{x}-x)-\frac{16}{x}$ ved at anvende 1) og 2) i sætning 8.1.

Vi starter med at konstatere, at x må være forskellig fra 0, idet der divideres med x i den opskrevne ligning, og man kan ikke dividere med 0 ! Vi kan derfor gange på begge sider af lighedstegnet med x og bevare ligningens sandhedsværdi. Bemærk, at **alle** led på begge sider af lighedstegnet skal ganges med x !!

Omskrivninger forløber herefter således:

$$2-\frac{3}{x}-2x \;=\; 2(\frac{5}{x}-x)-\frac{16}{x} \quad\Leftrightarrow\quad 2x-3-2x^2 \;=\; x\cdot(\frac{10}{x}-2x)-16 \quad\Leftrightarrow$$

$$2x-3-2x^2 \;=\; 10-2x^2-16 \quad\Leftrightarrow\quad 2x-3 \;=\; -6 \quad\Leftrightarrow\quad 2x+3=0$$

hvormed vi får den samme ligning som i a). Den oprindelige ligning var altså blot en ”iklædt” ligning, der tilsyneladende var sværere at løse end den endte med at være.

Som i a) er løsningen til ligningen: $x = -1{,}5$, dvs. $L = \left\{-\frac{3}{2}\right\}$. ♥

Øvelse 8.3.

Løs følgende ligninger:

a) $2x = 6$ b) $2x = 7$ c) $2 + x = 6$ d) $2 + x = 7$

Øvelse 8.4.

Løs følgende ligninger:

a) $5(x + 3) = 8 - 4(1 - x)$

b) $4 - 11(2 - 3t) = -3t + 7(5t - 4)$

c) $28{,}8(1{,}4x + 2{,}3) = -15{,}6x + 12{,}3$

d) $\frac{27y-3}{17}+\frac{3}{11} = 4$

e) $-87{,}82s + 31{,}2s - 4{,}1(2{,}3s - 1) = 34{,}56$

f) $\frac{1}{2x}+6x-3 = 5(\frac{1}{x}-2x)+16x$

Øvelse 8.5.

Løs følgende ligninger:

a) $2(x+\frac{1}{2})-\frac{2}{3}(x+8)=0$

b) $x(\frac{5}{2}+2x)-2(x^2+\frac{5}{13})=\frac{2}{7}$

c) $\frac{3}{7}(x+3)-(x-\frac{2}{3})=x+\frac{1}{3}$

d) $x(\frac{2}{7}x+\frac{3}{7})+\frac{2}{7}(\frac{3}{5}-x^2)=6x+8$

e) $\frac{3}{8}(x+8)=\frac{5}{28}(x-3)-\frac{11}{52}(x-18)$

Øvelse 8.6.

Løs følgende ligning:

$0{,}215\cdot130\cdot(T-100) + 0{,}195\cdot380\cdot(T-18{,}9) + 0{,}321\cdot4182\cdot(T-18{,}9) = 0$

I de ovenstående øvelser og eksempler har det været sådan, at efter passende omskrivning og reduktion er den oprindelige ligning ”kogt ned” til en ligning af typen: ax = b, som derefter løses ved simpelthen at dividere med a på begge sider af lighedstegnet. I en del af ligningerne optræder x^2 (ligesom højere potenser af x i princippet kunne optræde), men disse led ”går ud”, så de ikke spiller nogen rolle i den endelige løsning. At dette er tilfældet skyldes naturligvis, at tallene i ligningerne er valgt på en bestemt måde. Hvis vi f.eks. ændrer 16x til 17x i øvelse 8.4.f), så vil denne ligning efter omskrivning og reduktion blive til:
$2x^2 + 6x + 9 = 0$ (prøv selv !). Og en sådan ligning kan ikke løses på den ovennævnte måde. Løsning af sådanne ligninger vil ikke blive omtalt i denne bog, men tages op til behandling i anden sammenhæng.

8.2. Én ligning med én ubekendt – løst ved hjælp af nulreglerne.

Vi vil nu gå over til at se på eksempler og opgaver, hvor nulreglerne i sætning 8.1 anvendes.

Eksempel 8.7.

a) Vi vil løse ligningen: $(x-5)\cdot(3x+7) = 0$. Ifølge sætning 8.1.3) har vi:
$(x-5)\cdot(3x+7) = 0 \Leftrightarrow x-5=0 \vee 3x+7=0$
og ved at regne videre på hver af de to ”delligninger” ser vi, at:
$x-5=0 \vee 3x+7=0 \Leftrightarrow x = 5 \vee 3x = -7 \Leftrightarrow x = 5 \vee x = -\frac{7}{3}$
Vi ser hermed, at løsningsmængden til ligningen $(x-5)\cdot(3x+7) = 0$ er: $L = \left\{-\frac{7}{3}, 5\right\}$

b) Vi vil løse ligningen: $\dfrac{(2x-6)(x^2+5)(8-x)}{(2-2x)(x-3)} = 0$.

Vi konstaterer først, at for at ligningen overhovedet er defineret, skal vi kræve, at nævneren er forskellig fra nul. Vi starter derfor med at løse ligningen: $(2-2x)(x-3) = 0$. Som i pkt. a) ses løsningen til denne ligning at være: $x = 1 \vee x = 3$. Forudsætningen for at løse ligningen er altså, at: $x \neq 1 \wedge x \neq 3$. Ifølge sætning 8.1. 4) har vi herefter:

$$\frac{(2x-6)(x^2+5)(8-x)}{(2-2x)(x-3)} = 0 \Leftrightarrow 2x-6 = 0 \vee x^2+5=0 \vee 8-x = 0$$

Da $x^2 + 5 > 0$ for alle x, giver denne delligning ikke nogen løsninger. De øvrige delligninger giver $x = 3$ eller $x = 8$. Den mulige løsning $x = 3$ kan imidlertid ikke bruges, idet forudsætningen for at ligningen overhovedet var defineret bl.a. var, at $x \neq 3$. Den eneste brugbare løsning er altså: $x = 8$, hvormed vi ser:

$$\frac{(2x-6)(x^2+5)(8-x)}{(2-2x)(x-3)} = 0 \Leftrightarrow x = 8 \text{, dvs. } L = \{8\}$$ ♥

Øvelse 8.8.
Løs følgende ligninger:

a) $(x + 2)(\frac{1}{2}x - 5) = 0$

b) $(2x - 1)(-x + 3)(5 - 4x) = 0$

c) $\dfrac{5x-6}{3} = 0$

d) $\dfrac{5x-6}{x-2} = 0$

e) $\dfrac{3x-6}{x-2} = 0$

f) $\dfrac{(x-2)(5-3x)}{x+1} = 0$

g) $\dfrac{(x+1)(-x+7)(4x-12)}{(-3+x)(x-5)} = 0$

h) $x^2 - x = 0$

i) $2x^3 + x^2 = 0$

j) $x^4 + x^2 = 0$

8.3. Isolering af en variabel i en ligning.

En særlig afart af løsning af ligninger har man i problemstillinger, hvor det drejer sig om at <u>isolere</u> en af flere størrelser, der indgår i ligningen – og så udtrykke denne ved de øvrige størrelser.

Eksempel 8.9.

a) Hvis vi ved, at $y = 5x + 3$, så kan opgaven gå ud på at isolere x, og dermed udtrykke x ved y. Dette foregår således:

$$y = 5x + 3 \Leftrightarrow y - 3 = 5x \Leftrightarrow \frac{y-3}{5} = x \Leftrightarrow \tfrac{1}{5}y - \tfrac{3}{5} = x \Leftrightarrow x = \tfrac{1}{5}y - \tfrac{3}{5}$$

Vi har dermed isoleret x og fået resultatet: $x = \frac{1}{5}y - \frac{3}{5}$

b) Hvis vi ved, at $-M + c\sqrt{Q} = 3d^2$, hvor M, c, Q og d er positive størrelser, og vi gerne vil isolere Q, så gør vi følgende: $-M + c\sqrt{Q} = 3d^2 \Leftrightarrow \sqrt{Q} = \dfrac{3d^2 + M}{c} \Leftrightarrow$

$$Q = \left(\frac{3d^2 + M}{c}\right)^2$$ ♥

Øvelse 8.10.

a) Isolér R, idet $U = R \cdot I$

b) Isolér V, idet $m = \rho \cdot V$

c) Isolér R_y, idet $E = R_i \cdot I + R_y \cdot I$

d) Isolér t, idet $s = vt + s_o$

e) Isolér a, idet $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} = 2c + d$

f) Isolér p, idet $p \geq 0$ og idet $2p^2 - 5 = \sqrt{c+2}$

Øvelse 8.11.
Betragt ligningen:
$m_{lod} \cdot c_{mes} \cdot (T_{fælles} - 100) \; + \; m_{kal} \cdot c_{mes} \cdot (T_{fælles} - T_{start}) \; + \; m_v \cdot c_v \cdot (T_{fælles} - T_{start}) \; = \; 0$

a) Isolér c_{mes}

b) Isolér $T_{fælles}$

Øvelse 8.12.
Der er givet følgende tre ligninger: $E = hf - A$, $E = Ue$ og $c = \lambda f$
Isolér A, og angiv et udtryk for A, hvor størrelserne: U, e, h, c og λ (og ikke andre) forekommer.

8.4. Ligninger af typen $x^c = d$, hvor c er et helt tal.

Vi vil nu gå over til at betragte ligninger af typen: $x^c = d$, hvor x er den ubekendte og c og d er givne tal. Vi vil først arbejde med ligninger af denne type, hvor c er et helt tal.

Eksempel 8.13.
Vi vil løse ligningerne:
a) $x^2 = 4$, b) $x^{12} = 234$, c) $x^3 = 5$, d) $x^7 = -30$ og e) $x^{-6} = 475$

Ad a): Ifølge sætning 5.4 4) har vi: $x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \sqrt{4} \vee x = -\sqrt{4} \Leftrightarrow x = 2 \vee x = -2$, hvormed vi ser, at L = $\{-2, 2\}$.

Ad b): Beviset for sætning 5.4. 4) bygger på rodprøven og på det faktum, at $(-x)^2 = x^2$.
Da rodprøven også gælder også for x^{12} (sammenlign definition 6.24 og definition 5.1 !), og da $(-x)^{12} = x^{12}$ (idet 12 minusser "ganget sammen" giver plus), ser vi, at:

$$x^{12} = 234 \;\Leftrightarrow\; x = \sqrt[12]{234} \vee x = -\sqrt[12]{234}$$

Da $\sqrt[12]{234} = 1{,}57556$ (fundet på lommeregneren), er løsningen til ligningen: $x^{12} = 234$ givet ved: L = $\left\{-\sqrt[12]{234} \,,\, \sqrt[12]{234}\right\}$ eller L = $\{-1{,}57556 \,,\; 1{,}57556\}$.
Den første løsningsmængde anvendes, hvis man vil give et eksakt facit, den anden løsningsmængde anvendes, hvis man vil give et tilnærmet, men i praksis ofte mere brugbart, facit. Generelt bør man angive begge typer facit.

Ad c): Ligningen $x^3 = 5$ adskiller sig fra de to foregående ligninger ved, at eksponenten 3 er et ulige tal, hvilket betyder, at $(-x)^3 = -x^3$ (f.eks. er $(-4)^3 = -64$).
Der vil derfor ikke være to løsninger til denne ligning, men kun løsningen: $x = \sqrt[3]{5}$, dvs.
L = $\left\{\sqrt[3]{5}\right\} = \left\{1{,}70998\right\}$

Ad d): Vi skal løse ligningen: $x^7 = -30$. Vi ved (jfr. c), at: $x^7 = 30 \Leftrightarrow x = \sqrt[7]{30}$. Da 7 er et ulige tal gælder desuden, at: $(-x)^7 = -x^7$. Hvis vi kombinerer disse to informationer, så får vi: $x^7 = -30 \Leftrightarrow x = -\sqrt[7]{30}$ (Overvej dette !!). Vi ser dermed, at: L = $\left\{-\sqrt[7]{30}\right\} = \left\{-1{,}62561\right\}$

Ad e): Vi har:

$$x^{-6} = 475 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{x^6} = 475 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{475} = x^6 \quad \Leftrightarrow \quad x^6 = 475^{-1} \quad \Leftrightarrow$$

$$x = \sqrt[6]{475^{-1}} \vee x = -\sqrt[6]{475^{-1}}$$

hvor vi i den sidste omskrivning har brugte samme fremgangsmåde som i pkt. b)

Da $\sqrt[6]{475^{-1}} = \sqrt[6]{0{,}00210526} = 0{,}35800$ ser vi, at

L = $\left\{\sqrt[6]{475^{-1}}\ ,\ -\sqrt[6]{475^{-1}}\right\}$ = $\left\{0{,}358\ ,\ -0{,}358\right\}$ ♥

I forlængelse af eksempel 8.13 anfører vi følgende sætning:

Sætning 8.14

Ligningen $x^n = d$, hvor n er et positivt helt tal, har følgende løsninger:

Ligning: $x^n = d$	**d > 0**	**d = 0**	**d < 0**
n lige	$x = \sqrt[n]{d} \vee x = -\sqrt[n]{d}$	x = 0	ingen løsninger
n ulige	$x = \sqrt[n]{d}$	x = 0	$x = -\sqrt[n]{-d}$

Ligningen $x^{-n} = d$, hvor n er et positivt helt tal, har følgende løsninger:

Ligning: $x^{-n} = d$	**d > 0**	**d = 0**	**d < 0**
n lige	$x = \sqrt[n]{d^{-1}} \vee x = -\sqrt[n]{d^{-1}}$	ingen løsninger	ingen løsninger
n ulige	$x = \sqrt[n]{d^{-1}}$	ingen løsninger	$x = -\sqrt[n]{(-d)^{-1}}$

I forbindelse med sætning 8.14 bemærkes, at hvis d < 0 , så er –d > 0 , samt at x^n for n = 0 ikke er omtalt, idet 0^0 ikke kan defineres og idet $x^0 = 1$ for $x \neq 0$ (jfr. definition 6.1).
Læseren opfordres i øvrigt til at gennemgå og vurdere rigtigheden af de enkelte dele af sætningen, herunder at sammenligne med eksempel 8.13.

Øvelse 8.15.
Løs ligningerne:

a) $x^8 = 8657$ b) $y^{18} = 0$ c) $q^6 = -92$
d) $t^5 = 4567$ e) $z^{221} = 0$ f) $w^9 = -9$
g) $x^{-3} = 0{,}0002367$ h) $p^{-4} = 12{,}3$ i) $s^{-12} = 0$
j) $y^{-7} = 0$ k) $z^{-8} = -87$ l) $t^{-7} = -0{,}07$

Øvelse 8.16.
Løs følgende ligninger:

a) $x^2 = 9$ b) $x^2 = 5$ c) $x^4 = 16$
d) $x^5 = 28$ e) $(2y)^6 = 11$ f) $x^6 = -20$
g) $q^{23} - 23 = 0$ h) $T^4 = 8{,}2\cdot 10^{14}$ i) $x^5 = -30$
j) $3x^{-11} = 22$ k) $(8y)^{-6} = 200$ l) $2z^5 - 25z^{-6} = 0$
m) $x^8 - 7x^5 = 0$ n) $\dfrac{(2x+6)(5-3x^9)}{x^2-4} = 0$

8.5. Ligninger af typen $x^c = d$, hvor c IKKE er et helt tal.

Når vi skal analysere ligninger af typen: $x^c = d$, hvor c ikke er et helt tal, er det vigtigt at huske på definitionen af x^c (dvs. af det udvidede potensbegreb, se definition 6.32).
Tallet c kan her udtrykkes som en brøk imellem to hele tal (hvormed bl.a. alle endelige decimalbrøker kan bruges), og i denne situation er x^c kun defineret for $x > 0$, og $x^c > 0$.

Eksempel 8.17.
Vi vil løse ligningen: $x^{\frac{12}{7}} = 88$. Ifølge definition 6.32 har vi: $x^{\frac{12}{7}} = (\sqrt[7]{x})^{12}$, hvormed ligningen kan løses således:

$$x^{\frac{12}{7}} = 88 \Leftrightarrow (\sqrt[7]{x})^{12} = 88 \Leftrightarrow \sqrt[7]{x} = \sqrt[12]{88} \Leftrightarrow x = (\sqrt[12]{88})^7 \Leftrightarrow x = 88^{\frac{7}{12}},$$

hvoraf vi ser, at $L = \left\{ 88^{\frac{7}{12}} \right\} = \{13{,}6233\}$.

Bemærk, at der i omskrivningen fra $(\sqrt[7]{x})^{12} = 88$ til $\sqrt[7]{x} = \sqrt[12]{88}$ ikke optræder $\pm\sqrt[12]{88}$, selv om man måske umiddelbart skulle tro det (ifølge sætning 8.14). Dette skyldes at x og $\sqrt[7]{x}$ er positive, hvormed kun $+\sqrt[12]{88}$ er relevant.

Bemærk desuden, at omskrivningen ovenfor også kan foretages med følgende notation:

$$x^{\frac{12}{7}} = 88 \;\Leftrightarrow\; (x^{\frac{12}{7}})^{\frac{7}{12}} = 88^{\frac{7}{12}} \;\Leftrightarrow\; x^{\frac{12}{7}\cdot\frac{7}{12}} = 88^{\frac{7}{12}} \;\Leftrightarrow\; x^1 = 88^{\frac{7}{12}} \;\Leftrightarrow\; x = 88^{\frac{7}{12}} \qquad ♥$$

I forlængelse af eksempel 8.17 bemærkes, at der gælder følgende sætning:

Sætning 8.18.

Under forudsætning af, at: $x > 0$, $d > 0$, $c \neq 0$, $c = \frac{p}{q}$, hvor p og q er to hele tal som opfylder, at $q > 0$ og $p \neq 0$, løses en ligning af typen: $x^c = d$, på følgende måde:

$$x^c = d \;\Leftrightarrow\; x = d^{\frac{1}{c}}$$

eller udtrykt ved de hele tal p og q: $x^{\frac{p}{q}} = d \;\Leftrightarrow\; x = d^{\frac{q}{p}}$

Bevis:

Vi bemærker først, at hvis c er en brøk imellem to hele tal, så er den reciprokke værdi af c, dvs. $\frac{1}{c}$, også en brøk imellem to hele tal. Dette indses således:

Hvis $c = \frac{p}{q}$, så er $\frac{1}{c} = \frac{1}{\frac{p}{q}} = 1 \cdot \frac{q}{p} = \frac{q}{p}$

Det ses hermed, at hvis x^c er defineret, så er $d^{\frac{1}{c}}$ også defineret.

Efter samme princip som i eksempel 8.17 og ved anvendelse af regnereglerne for potenser fra sætning 6.3 har vi herefter: $x^c = d \Leftrightarrow (x^c)^{\frac{1}{c}} = d^{\frac{1}{c}} \Leftrightarrow x^{c\cdot\frac{1}{c}} = d^{\frac{1}{c}} \Leftrightarrow x^1 = d^{\frac{1}{c}} \Leftrightarrow x = d^{\frac{1}{c}}$, hvor den første ensbetydende-pil indses således: $x^c = d \Rightarrow (x^c)^{\frac{1}{c}} = d^{\frac{1}{c}}$ følger af at opløfte størrelserne på begge sider af lighedstegnet i $\frac{1}{c}$. Pilen den modsatte vej: $(x^c)^{\frac{1}{c}} = d^{\frac{1}{c}} \Rightarrow x^c = d$ følger af at opløfte størrelserne på begge sider af lighedstegnet i c (overvej !!).

Hermed ses det, at den første løsningsmåde gælder.

Den anden løsningsmåde følger direkte heraf, idet vi som nævnt har: $c = \frac{p}{q} \Leftrightarrow \frac{1}{c} = \frac{q}{p}$ ♥

Øvelse 8.19.

Løs følgende ligninger:

a) $x^{\frac{3}{8}} = 72$ b) $x^{-\frac{21}{17}} = 58$ c) $100x^{0,91} = 91$ d) $\frac{1}{x^{-2,34}} = 200$

e) $4z^{7,2} = -19$ f) $w^{3,4} = 22\cdot w^{1,6}$ g) $t^{8,6} - 21{,}6t^{3,1} = 0$ h) $19x^2 = \dfrac{12}{x^{0,62}}$

Øvelse 8.20.
Løs følgende ligninger:

a) $2x\sqrt{x} = 85$ b) $\dfrac{5x}{\sqrt[5]{x}} = 1000$ c) $\sqrt[9]{y^5} = 22{,}6$ d) $\sqrt[6]{t^{3,6}} = 91{,}2$

8.6. To ligninger med to ubekendte (ligningssystemer)

Det sidste emne, vi skal beskæftige os med i denne bog, er to ligninger med to ubekendte. Pointen er (som vi også så ovenfor f.eks. under ”isolering”), at en ligning godt kan indeholde flere variable. F.eks. kan vi se på ligningen: $2x + 5y = 28$. Det er her muligt at isolere x (finde x udtrykt ved y), hvormed vi får: $x = -\frac{5}{2}y + 14$, ligesom det er muligt at isolere y (finde y udtrykt ved x), hvormed vi får: $y = -\frac{2}{5}x + \frac{28}{5}$.
Men det er ikke muligt at finde ”den værdi” af x og y, som opfylder ligningen, idet der er uendeligt mange muligheder. Hvis vi ser på den sidste omskrivning af ligningen til: $y = -\frac{2}{5}x + \frac{28}{5}$ kan vi se, at uanset hvad x sættes til at være, så kan vi finde en y-værdi, som sammen med den givne x-værdi opfylder ligningen. Hvis vi f.eks. sætter $x = 10$, så skal y være : $y = -\frac{2}{5}\cdot 10 + \frac{28}{5} = \frac{8}{5}$, hvormed $(x,y) = (10, \frac{8}{5})$ er en løsning til ligningen. Og hvis vi sætter $x = -11$, så skal y være: $y = -\frac{2}{5}\cdot(-11) + \frac{28}{5} = \frac{50}{5} = 10$, hvormed $(x,y) = (-11,10)$ er en løsning til ligningen. Osv.

Hvis vi nu udover ligningen: $2x + 5y = 28$ har givet ligningen: $-2x + 3y = 7$, som (x,y) <u>også</u> skal opfylde (dvs. at vi nu leder efter (x,y)’er, som opfylder <u>begge</u> ligninger), så kan vi benytte følgende fremgangsmåde:
Hvis (x,y) ligger i løsningsmængden for begge ligninger, så er x-værdien for disse løsninger den samme i de to ligninger. Vi kan derfor finde x udtrykt ved y af den ene ligning og indsætte dette udtryk i stedet for x i den anden ligning. Af $2x + 5y = 28$ ses som før, at: $x = -\frac{5}{2}y + 14$. Dette indsættes i stedet for x i den anden ligning: $-2x + 3y = 7$, hvormed vi får: $-2\cdot(-\frac{5}{2}y + 14) + 3y = 7$, hvilket kan reduceres således:

$$-2\cdot(-\tfrac{5}{2}y + 14) + 3y = 7 \iff 5y - 28 + 3y = 7 \iff 8y = 35 \iff y = \frac{35}{8}$$

Vi ser således, at hvis begge ligninger skal være opfyldt samtidigt, så er der kun én mulighed for y, nemlig $y = \frac{35}{8}$. Den tilsvarende værdi for x findes herefter ved at indsætte $y = \frac{35}{8}$ i udtrykket: $x = -\frac{5}{2}y + 14$, hvormed vi får:

$$x = -\frac{5}{2}\cdot\frac{35}{8}+14 = -\frac{5\cdot 35}{2\cdot 8}+\frac{14\cdot 16}{16} = -\frac{175}{16}+\frac{224}{16} = \frac{49}{16}$$

Der er derfor kun et talsæt (x,y), som opfylder begge ligninger, nemlig: (x,y) = $(\frac{49}{16},\frac{35}{8})$.

Denne netop anvendte metode kaldes substitutionsmetoden, og vi siger, at vi har løst to ligninger med to ubekendte (ligningerne: $2x + 5y = 28$ og $-2x + 3y = 7$) ved substitution (indsættelse).

Filosofien i løsning af to ligninger med to ubekendte ved substitution er altså følgende:

1. I den ene ligning isoleres den ene variable, (dvs. i den ene ligning findes den ene variable udtrykt ved den anden variable).
2. Dette udtryk indsættes (substitueres) i den anden ligning, hvormed denne bliver til én ligning med én ubekendt (den anden variable).
3. Denne ligning løses, hvormed værdien/værdierne af den anden variable findes.
4. Denne/Disse værdi(er) indsættes i udtrykket fra pkt. 1, hvormed værdien/værdierne af den første variable findes.
5. Løsningen til ligningssystemet består af alle de talpar: (første variable, anden variable) , som fremkommer på denne måde.

Det er i princippet muligt at udvide det ovenstående til dels at omfatte mere komplicerede ligninger med to ubekendte (f.eks. ligningerne: $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 1 = 0$ og $x - 2y - 2 = 0$), dels at omfatte flere ligninger med flere ubekendte, (f.eks. $2x - 3y + z = 23$, $x + 21y - 3z = -1$ og $-x + 5y + z = 7$ – eller generelt n ligninger med n ubekendte), men løsning af sådanne ligninger ligger udenfor rammerne af denne bog, og vi vil ikke komme yderligere ind herpå.

Øvelse 8.21.

Løs ligningssystemerne:

a) $2x - 2y = -1$ og $2x + 2y = 12$

b) $5p + 8q - 12 = 0$ og $10p + 3q - 37 = 0$

c) $\frac{1}{4}\alpha + \frac{3}{5}\beta = 1$ og $\frac{2}{5}\beta - \frac{1}{8}\alpha = \frac{12}{5}$

d) $u + v = 12$ og $\frac{213}{51}u - \frac{41}{17}v = \frac{8}{34}$

Øvelse 8.22.

Løs følgende ligningssystemer:

a) $\dfrac{100-\mu}{\sigma} = 0{,}21$ og $\dfrac{200-\mu}{\sigma} = 0{,}86$

b) $3(x^3 - 2x) + (x^2 - 1)x + 6y = -4(\frac{1}{2} - x)(\frac{1}{2} + x)x - 12$ og

$y^2 + 2x + 5(y^2 + 3y) = (2 + 3y)(3 + 2y)$

OPGAVESAMLING
(Blandede opgaver)

1. Reducér/Omskriv udtrykkene

a) $\dfrac{\sqrt{7}\cdot\sqrt{18}}{\sqrt{14}}$ b) $\dfrac{\sqrt{6}-2}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ c) $\sqrt{27}-\sqrt{12}$

2. Reducér følgende udtryk uden brug af lommeregner:

a) $\dfrac{2^3\cdot(2^4)^2\cdot 2^{-7}}{2^{-3}\cdot(2^2)^3}$ b) $\dfrac{3^4:5^{-5}\cdot 2^4:3^{-3}}{2^6\cdot 3^{-3}:2:5^{-7}}$ c) $\dfrac{(-5)^{-3}\cdot(-4)^{-2}}{(-20)^{-1}}$

d) $\dfrac{5^{-3}:5^4\cdot 3^7:5^{-3}}{3^7:5^2\cdot 3^{-3}:5^4}$ e) $\dfrac{3^6:5^{-4}\cdot 5^{-3}:3^6}{3^2\cdot 5^{-2}:3^4:5}$

***3.** Løs ligningssystemet 4x + 3y = -1
5x + 2y = 4

4. Løs følgende ligninger ved hjælp af nulreglen:

a) $(x-2)(x+7)(x-15) = 0$ b) $x^2+11x = 0$ c) $(3x+5)(-x+5) = 0$

d) $x(4x+8) = 0$ e) $(2(x+5)+8)(5x+x(x-5)) = 0$

5. Reducér uden brug af lommeregner til én uforkortelig brøk:

a) $\dfrac{7}{8}\cdot\dfrac{4}{3}$ b) $\dfrac{3}{10}\cdot\dfrac{5}{13}$ c) $\dfrac{28}{25}\cdot\dfrac{15}{42}\cdot\dfrac{7}{6}$

6. Reducér følgende udtryk.

a) $\dfrac{(ac)^n\cdot c^q\cdot(a^{-2})^p}{c^{-n}\cdot a^{n-q}}\cdot\left(\dfrac{a}{c}\right)^2$ b) $\dfrac{(ab^n)^m\cdot a^{n+2}}{(a^m b)^{n+1}}$

c) $\dfrac{(c^4)^{-3}-c^2c^8c^{-1}}{(c^2)^5-c\cdot c^4}+(c^4)^5:c^{10}$ d) $\dfrac{(3ab^2)^3\cdot(2a^2b^{-1})^{-4}}{(2a^4b)^{-2}\cdot(3a^2b^3)^3}$

7. Løs ligningerne : * a) $\sqrt{7-x} = 4$ b) $\sqrt{2x+9} = 5$

8. Reducér følgende udtryk:
a) $(x + y)^2 - (x - y)^2$ b) $(x + 2y)^2 - (2x + y)^2$

9. Reducér udtrykkene:
a) $(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})$ b) $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2-(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})$

c) $\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}-\dfrac{2\sqrt{ab}}{a-b}$

***10.** Reducér følgende brøker:
a) $\dfrac{ac+cd}{acd}$ b) $\dfrac{2m+m^2-4m}{m}$
c) $\dfrac{(x-y)^2}{2a}+\dfrac{y(x-y)}{a}$ d) $\dfrac{a+b}{ab}+\dfrac{b-c}{bc}-\dfrac{a-c}{ca}$

11. Løs hver af følgende ligninger
a) $5x + 1 = 3x - 9$ b) $2 + 4(x - 1) = (x + 3) - \frac{1}{2}(10-6x)$
c) $\frac{1}{2}(8x-1)+5 = 4x + 1$ d) $-2x + 8 = 4(3x + 1) - 5$
e) $3(4 - x) = \dfrac{1+7x}{3}$ f) $\dfrac{2x-5}{2}=\frac{1}{2}-(1-2x)$

12. Omskriv følgende udtryk til én brøk og reducér mest muligt:
a) $\left(\dfrac{2ab}{c}:\dfrac{4a}{bc}\right):\dfrac{b^2}{2}$ b) $\dfrac{b+a}{a}-\dfrac{b-a}{b}-\dfrac{a^2-b^2}{ab}$
c) $\dfrac{2}{x-y}-\dfrac{1}{x}-\dfrac{x-y}{xy}+\dfrac{1}{y}$ d) $\dfrac{2a+3b}{3b}-\dfrac{2a-3b}{2a}-\dfrac{2a^2-9b^2}{6ab}$

13. Isolér a: $3xa+2a=4\sqrt{p}$

***14.** Forkort mest muligt uden brug af lommeregner:
a) $\dfrac{1}{13}:7$ b) $\dfrac{2}{3}:\dfrac{5}{11}$ c) $\dfrac{10}{7}:\dfrac{15}{49}$ d) $\left(\dfrac{4}{7}:\dfrac{10}{3}\right):\dfrac{5}{14}$

15. Reducér følgende udtryk uden brug af lommeregner:

a) $10^3 \cdot 10^{-5} \cdot 10^4$　　b) $\dfrac{10^{12} \cdot 10^8}{10^7 \cdot 10^{-3}}$　　c) $\dfrac{10^7 \cdot 10^8}{10^{12}}$

*d) $\dfrac{(10^2)^3 \cdot 10^{-5}}{(10^4)^2}$　　*e) $\dfrac{10^{21} \cdot 10^{-15}}{10^4}$　　*f) $\dfrac{10^{13} \cdot (1000)^{-3}}{(100)^4 \cdot 10^5}$

***16.** Reducér:

a) $(1-s)(1+t)+s(t-1)-st$　　b) $2q(p + 2) - p(2q - p)$

c) $(3b - a)^2 - (3b + a)(3b - a) + 6b(3a + b)$　　d) $(4x - y)(y + x) - 4x(y - x) + y^2$

e) $(5a + b)(a - b) - (a + b)^2$

f) $(3m - 4n)^2 + (3m - 4n)(3m + 4n) + 24mn$

<u>17. **Løs ligningerne:**</u>

a) $\dfrac{5x-1}{2x} - \dfrac{2x+1}{3x} = 3\tfrac{1}{2}$　　b) $\dfrac{x}{x-2} + \dfrac{x}{x+4} = 2$

c) $\dfrac{4}{x-2} - \dfrac{x}{4-x} = 1$　　d) $(3x - 1)^2 = (3x + 1) \cdot (3x - 1)$

18. Forkort nedenstående brøker:

a) $\dfrac{x^2-6x+9}{x^2-9}$　　b) $\dfrac{4x^2+4x+1}{4x^2-1}$

c) $\dfrac{y^3+y^2}{y^2+2y+1}$　　d) $\dfrac{x^2-4y^2}{x^2+4xy+4y^2}$

19. Vis (uden brug af lommeregner), at

a) $\dfrac{\sqrt{108}-\sqrt{12}}{\sqrt{27}-\sqrt{3}} = 2$　　b) $\dfrac{\sqrt{125}+\sqrt{45}}{\sqrt{180}-\sqrt{80}} = 4$　　c) $\dfrac{\sqrt{162}-\sqrt{128}}{\sqrt{18}-\sqrt{8}} = 1$

20.
Løs følgende ligninger:

a) $x^{-\frac{5}{19}} = 111$　　b) $x^{\frac{14}{23}} = 418$　　c) $220x^{1,67} = 167$　　d) $\dfrac{1}{y^{-12,4}} = 0,221$

e) $34q^{18,6} = -23,4$　　f) $s^{7,7} = 77 \cdot s^{8,8}$　　g) $\alpha^{14,3} - 32,5\alpha^{8,7} = 0$　　h) $85w^2 = \dfrac{132}{w^{1,56}}$

***21.** Løs hver af følgende ligninger

a) $2x + 5 = 9$ b) $4(x-5) = 2(x+1) + 3$

c) $\tfrac{1}{2}x - 4 = -\tfrac{1}{2}x + 5$ d) $\dfrac{6x-1}{4} = 3 - x$

22. Reducér følgende udtryk

a) $\dfrac{3a+8}{5} + \dfrac{4-a}{10}$ b) $\dfrac{x+2y}{3} + \dfrac{y-5x}{7}$ c) $\dfrac{a+5}{7a} - 1$ d) $\dfrac{1}{a-3} + \dfrac{1}{2}$

***23.** Reducér følgende brøker:

a) $\dfrac{x^{-7} \cdot y^4 \cdot z^5}{y^{-2} \cdot z^{-3} \cdot x^{-6}}$ b) $\dfrac{m^4 \cdot n^{-3} \cdot k^{-6}}{k^7 \cdot m^{-3} \cdot n^4}$

c) $\dfrac{w^{-3} \cdot u^9 : v^3}{u^{-2} : w^{-4} \cdot v^6}$ d) $\dfrac{b^{-3} : a^7 \cdot d^4}{a^4 \cdot d^5 : b^{-8}}$

24. Vis, at $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ og $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

25. Løs ligningerne:

a) $\dfrac{1}{3x-2} - \dfrac{1}{3x+2} = \dfrac{7x+1}{18x^2-8}$ b) $\dfrac{3x-7}{4x+2} = \dfrac{3x-14}{4x-13}$

26. Reducér følgende udtryk.

a) $\dfrac{a+b}{a} + \dfrac{2a+b}{3a} + \dfrac{5a+2b}{12a}$ b) $\dfrac{a+3b}{3b} - \dfrac{5a-3b}{5a}$

c) $\dfrac{x^2+5x}{x^2-1} - \dfrac{x-3}{x-1}$ d) $\dfrac{6y+2}{y+1} + \dfrac{2y-1}{3y+3}$

27. Reducér:

a) $\dfrac{\frac{2a}{3}}{\frac{a}{12}}$ b) $\dfrac{\frac{5a}{b}}{\frac{10}{9b}}$ c) $5a \cdot \dfrac{3b}{10a}$ d) $\dfrac{7a}{5b} \cdot \dfrac{3b}{14} \cdot \dfrac{10}{9a}$

28. Angiv størrelsen af følgende tal:

a) 2^{-3} b) $(\tfrac{1}{5})^{-1}$ c) 10^{-1} d) 10^{-4} e) 3^{-3} f) $(\tfrac{1}{2})^{-5}$

29. Udregn følgende udtryk:
a) $(x + 3)(x - 9)$ b) $(p - 2)(p + 11)$ c) $(4w - 3u)(u + 5w)$

***30.** Løs ligningerne
a) $x^2 - 0{,}04 = 0$ b) $x^2 - 0{,}004 = 0$ c) $(7 + x)^2 - (7 - x)^2 = 130$
d) $(5x + 3)^2 - (3x + 2)^2 - (4x + 1)^2 = 0$

***31.** Reducér følgende udtryk:
a) $\dfrac{a}{a-b} + \dfrac{b}{b-a} - \dfrac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$ b) $\dfrac{a+b}{a^2-b^2} + \dfrac{1}{a+b} + \dfrac{2a}{(a+b)^2}$

32. Reducér uden brug af lommeregner:
a) $\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[6]{5}$ b) $\dfrac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[6]{5}}$ c) $\sqrt[4]{9} \cdot \sqrt[5]{3} \cdot \sqrt[6]{3}$

***33.** Reducér udtrykket:
$$\frac{\dfrac{2x}{x-3} + \dfrac{9}{2x^2-18}}{\dfrac{6-5x}{2x-6} - \dfrac{3x}{2x+6}}$$

34. Løs ligningerne:
a) $x^5 = 2546$ b) $y^{128} = 0$ c) $q^9 = -5232$
d) $t^{34} = 14555$ e) $z^3 = 0$ f) $m^{-6} = -22$
g) $\mu^{-5} = 0{,}0001739$ h) $p^{-6} = 17{,}9$ i) $y^{-46} = 0$
j) $\alpha^{-7} = 0$ k) $z^{-4} = -188$ l) $t^{-13} = -0{,}000564$

***35.** Reducér følgende udtryk:
a) $2x + (3x - 4) - (5 - x)$ b) $3a + (5a - b) - (7a + 3b)$
c) $9x - (11x - 4y) + (x - 2y)$ d) $-(x + 2y) + 6(3x - 1)$

36. Reducér udtrykket $\dfrac{((ab)^n a^n)^q \cdot b^{-n}}{(\frac{a}{b})^n \cdot (a^{-p})^{-q} \cdot a^{-n}}$

***37.** Reducér mest muligt:

a) $(\frac{1}{x}-\frac{1}{y})(\frac{1}{x}+\frac{1}{y})-(\frac{x+y}{xy})^2$

b) $\frac{4a+7b}{3a+3b}-\frac{3a-5b}{2a-2b}+\frac{2a^2-16ab}{6a^2-6b^2}$

***38.** Isolér b: $\frac{1}{p+b}=2q^2$

39. Reducér

a) $(xy)^{-\frac{1}{2}}\cdot\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{3}{2}}$

b) $\frac{1}{\sqrt{xy}}\cdot\frac{x}{y}\cdot\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$

***40.** Reducér uden brug af lommeregner til én uforkortelig brøk:

a) $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$ b) $\frac{3}{8}+\frac{5}{12}$ c) $\frac{13}{7}-\frac{2}{11}$

d) $\frac{5}{6}+\frac{2}{15}+\frac{13}{7}$ e) $\frac{1}{9}-\frac{1}{10}$

41. Skriv som almindelig decimalbrøk (uden brug af lommeregner):

a) $92\cdot 10^{-6}$ b) $1{,}35\cdot 10^{-4}$ c) $0{,}45\cdot 10^{-2}$

d) $1247\cdot 10^{-2}$ e) $0{,}056\cdot 10^{-5}$ f) $5{,}78\cdot 10^{-7}$

42. Reducér mest muligt:

a) $\sqrt[6]{53}\cdot 53^{\frac{13}{5}}\cdot 53^{3,5}$

b) $\frac{\sqrt[5]{10}\cdot 5^{\frac{11}{6}}\cdot 2^{\frac{2}{3}}}{20^{\frac{18}{5}}}$

c) $\frac{11^{-1,4}\cdot 3^{2,9}(11\cdot 3)^{2,2}}{3^{0,6}\cdot 11^{-1,4}}$

43. Løs ligningerne:

*a) $(x-5)(x+3)(x-17)(x+3)=0$

b) $(x^2-49)(x-49)^2=0$

c) $\frac{(x+4)(3x-6)}{(3x+5)}=0$

*d) $\frac{(q-5)(q+5)(8-q)}{(q-8)(q+3)(q-5)}=0$

e) $\frac{(s^2-25)(s-25)^2}{(s-5)(s+8)(9-s)}=0$

***44.** Vis rigtigheden af omskrivningsformlen: $(10x+5)^2=100x(x+1)+25$
Hvad siger formlen for x = 7?
Angiv en metode til at udregne 35^2, 45^2, 55^2 osv. uden brug af lommeregner.

***45.** Reducér følgende udtryk:

a) $\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[7]{5^4}\cdot 5\sqrt{5}\cdot\sqrt[4]{5^3}$ b) $\dfrac{\sqrt[3]{7}\cdot\sqrt[4]{7}\cdot\sqrt{14}\cdot 2\sqrt{2}}{\sqrt{7}\cdot\sqrt{28}}$

***46.** Løs ligningen $\sqrt{7x}+\sqrt{5x}=11$

***47.** Omskriv følgende udtryk ved at sætte en faktor udenfor parentes.

a) $3x^2 + x$ b) $(x + 2)(3x - 1) - 2(3x - 1)$ c) $y(1+y)^2 + (1+ y)^3$

***48.** Løs følgende ligninger:

a) $3 + 4x = - x + 7$ b) $-\dfrac{1}{2}x - x^3 - 1 = -x^3 + \dfrac{1}{2}x$

c) $x - \dfrac{11}{7} = \dfrac{1}{8}x + 2$ d) $\dfrac{8x-11}{4} - \dfrac{37\frac{1}{2}-11x}{3} = \dfrac{5\frac{2}{3}x+12}{2}$

49. Reducér følgende udtryk:

a) $\dfrac{x}{xy-y^2}+\dfrac{y}{xy-x^2}$ b) $\dfrac{1-\frac{2}{x}}{1-\frac{x}{2}}$ c) $\dfrac{1}{2(x+1)}+\dfrac{1}{2(x-1)}-\dfrac{1}{x}$

50. Udregn følgende udtryk:

a) $17\sqrt{(13^2-5)+(-3)^3}$ b) $\dfrac{5-\sqrt{40-4}}{72+6^3-232}$ c) $(((210-5^3)+31)^2-(20+3^4))\cdot 3$

51. Isolér c: $(x-c)^2-(x+c)^2=\dfrac{2Q-3P}{4X}$

52. Reducér følgende udtryk

a) $6(8x - 7y - 15) - 7(7x - 6y - 13)$ b) $x(y - z) - y(x - z) + z(x - y)$

c) $3x(3y + 7z) - 8y(x - 2z) - 5z(4x + 3y)$

53. Reducér følgende udtryk:

a) $\dfrac{4-m^2}{6m-12}$ b) $\dfrac{-3(a-2b)^2}{4b^3-a^2\cdot b}$ c) $\dfrac{(25a^2-9b^2)^3}{(5a+3b)^3}$

***54.** Reducér følgende udtryk uden brug af lommeregner.

a) $\dfrac{5^2 \cdot 5^{-3} \cdot 25}{5^{-7} \cdot 5}$ b) $\dfrac{3^{-4} \cdot 6^{-4}}{9^{-4}}$ c) $\dfrac{(-3)^{-2} \cdot 6^{-2}}{90^{-2}}$

d) $\dfrac{(-3)^{-4} \cdot (-4)^{-1}}{(-12)^{-2}}$ e) $\dfrac{(3^2)^3 \cdot (3^{-4})^2 \cdot 2}{3^{-2} \cdot 3^6}$ f) $\dfrac{16^2 \cdot 2^{-3} \cdot 8}{4^3 \cdot 2^{18} \cdot \frac{1}{64}}$

55. Skriv hvert af følgende tal v.hj.a. scientific notation:
a) 987654 b) 2543,8766 c) 0,000004356 d) 12,00345

***56.** Reducér mest muligt (Tallene a, b, x, y og z er alle positive):

a) $\sqrt{2xy} \cdot \sqrt{18xy}$

b) $5\sqrt{ab} \cdot 4\sqrt{3ab} \cdot 2\sqrt{6a^2b^2}$

c) $\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right) + \left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)^2$

d) $(\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z})(\sqrt{x} + \sqrt{y} - \sqrt{z}) - (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2$

e) $\dfrac{3\sqrt{a} - 2\sqrt{b}}{3\sqrt{a} + 2\sqrt{b}} - \dfrac{3\sqrt{a} + 2\sqrt{b}}{3\sqrt{a} - 2\sqrt{b}} + \dfrac{12\sqrt{ab}}{4b - 9a}$

57. Reducér uden brug af lommeregner til én uforkortelig brøk:

a) $\dfrac{5}{34} \cdot (\dfrac{1}{3} + \dfrac{4}{5})$ b) $(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3}) \cdot \dfrac{7}{5}$ c) $(\dfrac{7}{8} - \dfrac{2}{3})(\dfrac{1}{2} + \dfrac{4}{5})$

58. Reducér følgende udtryk:

a) $\dfrac{(a^{-2})^3 - a \cdot a^{-2} \cdot a^{-3}}{(a^2)^3 - a^{-2} \cdot a^3} - (a^3)^{-2} \cdot a^{-2} : a^{-3}$ b) $\dfrac{a^3 \cdot b^2 \cdot (a^{-4})^5 \cdot (b^3)^{-2}}{(a \cdot b)^2 \cdot (a^{-7} \cdot b^{-3})^3}$

c) $\dfrac{(a^3)^4 : a^{10} - b^{-8} \cdot (b^2)^5}{(a^2)^3 : a^5 - b}$ d) $\dfrac{a(a+b) + b(a+b)}{(a^6)^2 \cdot a^{-11} + (b^{-2})^3 \cdot b^7}$

***59.** Reducér udtrykkene.

a) $\dfrac{3x+2}{2x^2 - 8x + 8} - \dfrac{x+2}{2x^2 - 8}$ b) $\dfrac{12x+5}{4x^2 + 8x + 4} + \dfrac{1}{2x^2 - 2} + \dfrac{8x-3}{4x^2 - 8x + 4}$

60. Løs følgende ligninger:

a) $\frac{1}{2}x + 3 = \frac{6}{7}x - 1$ b) $x + \frac{3x-9}{5} = 4 - \frac{5x-12}{3}$

c) $2(x+\frac{1}{2}) - \frac{2}{3}(x+8) = 0$ d) $\frac{3}{7}(x+3) - (x-\frac{2}{3}) = x + \frac{1}{3}$

61. Udregn følgende udtryk:

a) $(\frac{1}{2}a+b)(\frac{1}{3}b+a)$ b) $(3x-2y)^2 - (3x-2y)(3x+2y) - 4y(3x-2y)$

62. Løs ligningen: $\frac{4}{3}\pi r^3 = 3000$

63. Bevis, at der gælder: $\sqrt{5+2\sqrt{6}} = \sqrt{3}+\sqrt{2}$

Bestem hele tal a og b, så $\sqrt{8-4\sqrt{3}} = \sqrt{a}-\sqrt{b}$

64. Reducér mest muligt:

a) $\frac{2x}{y} + \frac{7y}{2x} - \frac{3}{xy} + \frac{5y}{3x}$ b) $6\cdot\left(\frac{2a}{3}\right)^2 - 3\cdot\left(\frac{5a}{6}\right)^2 + \left(3\cdot\frac{a}{4}\right)^2$

c) $5a\cdot\left(2a+\frac{b}{5}\right)\cdot\left(2a-\frac{b}{5}\right) - \left(2a-\frac{b}{5}\right)^2$ d) $\frac{x+9y}{x+12y}$

65. Løs ligningerne:

a) $\frac{x}{x+2} + \frac{x}{x-2} = 2$ b) $\frac{4}{x} + \frac{3x}{4} = \frac{8}{x} + \frac{x}{4}$ c) $\frac{x+10}{x-5} - \frac{8x}{2x-10} = 22$

d) $(2x - 2)(x + 2) - (x + 1)(2x - 1) = 5$

66. Omskriv til kvadratet på en toleddet størrelse

a) $x^2 + 2x + 1$ b) $x^2 + 3x + 2,25$ c) $t^2 - 8t + 16$ d) $4y^2 - 12y + 9$

67. Beregn – <u>eventuelt</u> v.hj.a. lommeregneren

a) $3,6 \cdot 10^{-67} \cdot 2,7 \cdot 10^{-12}$

b) $35 \cdot 10^{-24} / 7 \cdot 10^{-28}$

***68.** Udregn følgende udtryk

a) $(a + 2b)(a - 2b)$ b) $(x + 1)(x - 1)$ c) $(5x - 7)(5x + 7)$ d) $(2y + 3)(2y - 3)$

69. Løs ligningerne

a) $(2(x+8) - x)(x + 5(x - 6)) = 0$ b) $(2(x + 8) - 2x)(4x + 40) = 0$

c) $(2(x + 8) - (x + 16))\cdot(x + 16) = 0$ d) $(\frac{x}{2} + \frac{2}{3})(\frac{x}{5} - \frac{4}{7})(\frac{1}{3} + \frac{x}{5}) = 0$

***70.** Løs i hvert af følgende tilfælde det angivne ligningssystem:

a) $\begin{aligned} 2x + 5y &= -1 \\ -3x + y &= 8 \end{aligned}$ b) $\begin{aligned} 2x + 6y &= -1 \\ -3x - 9y &= 8 \end{aligned}$ c) $\begin{aligned} 2x + 6y &= -1 \\ -3x - 9y &= 1\tfrac{1}{2} \end{aligned}$

71. Reducér mest muligt:

a) $\sqrt{\dfrac{225x^4y^8}{16x^2y^4}}$ b) $\sqrt{\dfrac{25x^2 + 16y^2}{25x^2 + 60xy + 36y^2}}$

72. Reducér følgende brøker:

a) $\dfrac{a - 1}{1 - a^2}$ b) $\dfrac{3a^2 - 48b^2}{2a^2 - 16ab + 32b^2}$ c) $\dfrac{am + bm + an + bn}{am + bm - an - bn}$

73. Løs ligningerne:

a) $\dfrac{5}{9}(x - 7) = \dfrac{9}{23}(x + 13) - \dfrac{21}{48}(x - 12)$

b) $\dfrac{5}{7}x + \dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{3}(x + 8)$ c) $\dfrac{5}{7}x + 8 = x + \dfrac{1}{3} + \dfrac{5 - x}{21}$

74. Udregn uden brug af lommeregner:

a) $\dfrac{3}{7} + \dfrac{10}{7} + \dfrac{1}{7}$ b) $\dfrac{2}{3} + \dfrac{7}{3} + \dfrac{5}{3}$ c) $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4}$

d) $\dfrac{4}{5} + \dfrac{2}{3} + \dfrac{7}{8}$ e) $\dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{3} + \dfrac{3}{4}$

75. Reducér udtrykket: $\dfrac{x^5 \cdot (yz)^{-3} \cdot (x^{-2})^{-3} \cdot y^4}{\left(\dfrac{x}{y}\right)^{-1} \cdot \left(x^6 \cdot z^5\right)^2}$

***76.** Reducér:

a) $\dfrac{x}{x-2y} - \dfrac{-2y}{2y-x}$ b) $\left(2a+\dfrac{1}{3b}\right)^2 - \left(2a-\dfrac{1}{3b}\right)^2$

c) $\dfrac{a\left(3c^2-2b\right)}{12bc^2} - \dfrac{b\left(5c^2-3a\right)}{15ac^2} + \dfrac{5a-6b}{30c^2}$

***77.** Løs ligningerne:

a) $x(\dfrac{5}{2}+2x)-2(x^2+\dfrac{5}{13})=\dfrac{2}{7}$ b) $x(\dfrac{2}{7}x+\dfrac{3}{7})+\dfrac{2}{7}(\dfrac{3}{5}-x^2)=6x+8$

***78.** Opløs i faktorer, dvs. skriv som et produkt af (flest mulige) faktorer.

a) $8ax + 4bx - 12cx$ b) $3a^3 - 6a^2 + 3a$ c) $a^2 - 16$

***79.** Udregn

a) $(x^2 + 2x + 2) \cdot (x^2 + 2x - 2)$ b) $(x - 1) \cdot (x^3 + x^2 + x + 1)$

c) $(x + \frac{1}{x})^2 - (x - \frac{1}{x})^2$ d) $(x^2 - 1) \cdot (x^2 + x + 1)$

80. Reducér følgende udtryk uden brug af lommeregner:

a) $2^3 \cdot 7^3 : 14^3$ b) $(\dfrac{1}{2})^2 \cdot (\dfrac{1}{3})^{-7} \cdot 3^4 \cdot 9^{-4}$ c) $\dfrac{(-4)^{-1} \cdot (-5)^{-1}}{(-100)^{-1}}$

d) $\dfrac{20^3 \cdot 4^{-2} \cdot 2}{2^{-3} \cdot 5^4 \cdot (\dfrac{1}{2})^{-3}}$ e) $\dfrac{64^2 \cdot 25^3}{256 \cdot 125}$ f) $\dfrac{2^{-3} \cdot (\dfrac{1}{2})^5 \cdot 4^{-2} \cdot 16 \cdot (\dfrac{1}{2})^{-2}}{(\dfrac{1}{2})^3 \cdot 2^5 \cdot 8^{-1}}$

81. Reducér følgende brøker:

a) $\dfrac{36a^2 - 49b^2}{36a^2 - 84ab + 49b^2}$ b) $\dfrac{a^2 - ab - a + b}{a^2 - ab + a - b}$ c) $\dfrac{2b(a+b) - a(a+b)}{3ab^2 - ab(a+b)}$

***82.** Løs ligningerne:

a) $\dfrac{x+5}{14} + \dfrac{3}{35} = \dfrac{x}{10} + \dfrac{13}{22}$ b) $\dfrac{3}{8}(x+8) - \dfrac{5}{28}(x-3) + \dfrac{11}{52}(x+17) = 0$

83. Reducér mest muligt:

a) $\dfrac{1}{a^2-b^2}+\dfrac{1}{b^2-a^2}$

b) $\dfrac{a+b}{b-a}\cdot(-b^2-a^2+2ab)$

c) $\dfrac{(2a)^2}{2a^2}\cdot\left(\dfrac{2}{a}\right)^2\cdot 4\cdot a\cdot\dfrac{a^2}{2}\cdot\dfrac{a}{4}$

d) $\dfrac{2a}{2a-3b}-\dfrac{b}{a+b}-\dfrac{5ab}{2a^2-ab-3b^2}$

84. Reducér mest muligt:

a) $\dfrac{-\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\left(\sqrt{x}\right)^2}$

b) $\dfrac{(4x+1)\cdot x\sqrt{x}-(2x^2+x)(\sqrt{x}+x\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}})}{(x\sqrt{x})^2}$

***85.** Isolér d: $\dfrac{1}{\sqrt{2d}}+4=\dfrac{1}{2q+\alpha}$

86. Reducér:

a) $5x\cdot 4y + 5\cdot 4y + 3x\cdot 6y + 6y\cdot 4$

b) $5a^2-3a^3+6a^2+9a^3-4a$

c) $3x^5\cdot 2x^2-2x^9:x^2+14x^6\cdot 2x^4:(7x^3)$

d) $4x^2(2x-3xy)+(3x^3+5y)\cdot 2x$

e) $(2x-3y)\cdot(x-2y)\cdot(4x+y)$

***87.** Reducér:

a) $(81xy)^5:(-27x)^5$

b) $a^5\cdot a^3\cdot a\cdot a^9\cdot a^2$

c) $a^3\cdot a^n\cdot(-a)^4\cdot(-a)^{2n}$

d) $2a^3\cdot 3a^9\cdot(4a)^3$

88. Reducér mest muligt:

a) $\dfrac{\dfrac{p+1}{p+q^2}-\dfrac{1}{p}}{\dfrac{p+1}{p+q^2}+\dfrac{q-p^2}{p^2+pq^2}}$

b) $\dfrac{x+\frac{2}{x}}{x-\frac{1}{x}}-\dfrac{x-\frac{2}{x}}{x+\frac{1}{x}}$

89. Løs ligningerne:

a) $\dfrac{2x+1}{3} = 8$

b) $\dfrac{5-x}{3x+17} = 1$

c) $\dfrac{3}{2x+1} = 8$

d) $\dfrac{(2x-1)(x+4)}{(x+1)(x-4)} = 2$

***90.** Reducér:

a) $3b^2\cdot\left(2a^2-3b^2\right)+5a^2(4b^2+3a^2)$ b) $(a-2b)^2-(a+2b)^2$

c) $(2x-3y)^2-(2x-3y)(3y+2x)$ d) $\left(15m^2-10mn+25m\right):(5m)$

e) $(-2xyz)^2+2(xy)^2\cdot z^2+x^2\cdot(2yz)^2$

***91.** Reducér følgende udtryk uden brug af lommeregner:

a) $(2\sqrt{3}-\sqrt{5})^2-(\sqrt{10}-\sqrt{6})^2$ b) $\dfrac{\sqrt{125}-\sqrt{20}}{\sqrt{80}-\sqrt{45}}$

c) $(2\sqrt{5}-3\sqrt{7})^2-(3\sqrt{5}+2\sqrt{7})\cdot(3\sqrt{5}-2\sqrt{7})$ d) $\dfrac{5}{\sqrt{10}-\sqrt{2}}-\dfrac{2\sqrt{5}+3\sqrt{2}}{2\sqrt{5}-3\sqrt{2}}$

92. Skriv følgende udtryk på formen $a(x+b)^2$:

a) $-3x^2+30x-75$ b) $9x^2+72x+144$ c) $-4x^2-24x-36$

93. Opskriv for hver af følgende størrelser definitionen heraf - og find værdien på lommeregneren:

a) $2{,}3^{\frac{12}{5}}$ b) $2000^{\frac{1}{15}}$ c) $5{,}432^{5{,}432}$ d) $67^{-\frac{8}{21}}$ e) $564{,}34^{-\frac{56}{8}}$

94. Vis, at for ethvert x gælder formlen: $x^2 = 100(x-25) + (50 - x)^2$
Angiv en metode til at udregne $41^2, 42^2 \ldots\ldots.. 59^2$ uden brug af lommeregner.

95. Løs ligningerne

a) $(x+\frac{1}{2})(x-\frac{1}{2})=(x-\frac{2}{3})^2$ b) $\dfrac{2x}{x-3}+\dfrac{x}{x+5}=3$

96. Reducér hvert af udtrykkene.

a) $\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}-\dfrac{(a-b)^2}{ab}$ b) $\dfrac{x+y}{x(x-y)}-\dfrac{x-y}{x(x+y)}+\dfrac{4x}{(x-y)(x+y)}$

*c) $\left(\dfrac{2a}{3}\right)^2-\left(\dfrac{5a}{3}\right)^2+\left(\dfrac{7a}{3}\right)^2$ d) $\left(\dfrac{2xy}{5z}\right)-1+\left(\dfrac{3xy}{z}\right)^2$

97. Løs følgende ligninger:

a) $2(\frac{1}{2}x-2)(x+1)=0$ b) $(3x-½)\cdot(22x+1)\cdot(-3x-5)=0$

***98.** Skriv – uden brug af lommeregner – som én uforkortelig brøk:

a) $\frac{7}{8}\cdot\frac{2}{3}$ b) $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$ c) $\frac{6}{9}\cdot\frac{3}{2}$ d) $\frac{9}{14}\cdot\frac{7}{3}$

99. Reducér mest muligt:

a) $\frac{3x+9y}{4x+12y}$ b) $\frac{a^2+4ab+4b^2}{a^2+2ab}$

c) $\frac{x^2-2xy+y^2}{x^2-y^2}$ d) $\frac{a+b}{a-b}+\frac{a-b}{a+b}+\frac{4ab}{a^2-b^2}$

100. Løs ligningerne:

a) $\frac{3}{8}x-\frac{1}{5}=\frac{12}{7}(x+19)$ b) $\frac{14}{9}x-12=4x+\frac{31}{4}-\frac{10-x}{11}$

c) $\frac{-x+15}{22}+\frac{6}{33}=\frac{2x}{11}+\frac{50}{66}$ d) $\frac{2}{34}(x-18)+\frac{65}{11}(x+3)-\frac{21}{16}(x-21)=0$

101. Reducér hvert af nedenstående udtryk

a) $x(2+x)-2x(1+x)+x^2$ b) $a(a+b)+b(2b-a)-b^2$

102. Bestem følgende værdier:

a) $\sqrt[73]{36788{,}5}$ b) $\sqrt[12]{0{,}000418}$ c) $\sqrt[11]{45678657}$ d) $\sqrt[6]{0{,}0000016}$

103. Reducér mest muligt:

a) $\left(\frac{x+y}{xy}\right)^2-\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{x}\right)\cdot\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{x}\right)$ b) $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\cdot\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right):\left(\frac{1}{2a}+\frac{1}{2b}\right)$

104. Opløs i faktorer, dvs. skriv som et produkt af (flest mulige) faktorer.

a) $9x^2 – 30xy + 25y^2$ b) $16a^2 + 40ab + 25b^2$ c) $6a^2 – 24$

105. Skriv – uden brug af lommeregner – hver af følgende brøker som én uforkortelig brøk:

a) $\frac{\frac{2}{3}}{\frac{7}{8}}$ b) $\frac{\frac{4}{5}}{\frac{8}{5}}$ c) $\frac{\frac{2}{3}}{\frac{6}{9}}$ d) $\frac{2}{\frac{2}{3}}$

***106.** Reducér følgende udtryk uden brug af lommeregner:

a) $4^3 \cdot 5^3 \cdot 10^3 \cdot 2^3$ b) $4^2 \cdot (-3)^2 \cdot (-2)^2$ c) $0{,}3^4 \cdot 10^4 \cdot 4^0$

d) $(\frac{1}{2})^4 \cdot 2^4 \cdot (\frac{4}{5})^4 \cdot (\frac{1}{4})^4$ e) $(\frac{1}{3})^5 : (-\frac{3}{2})^6$

107. Løs ligningssystemerne:

a) $\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}(y+1) = \frac{3}{2}$ b) $\frac{1}{x+y} = \frac{2}{3x+1}$

$\frac{1}{3}(x-y) - \frac{1}{2}y = \frac{9}{2}$ $\frac{1}{2x+1} = \frac{2}{7y}$

***108.** Reducér:

a) $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4}$ b) $\frac{a}{5} + \frac{a+1}{5} + \frac{2}{5}$ c) $\frac{3x}{x+2} + \frac{5x}{x+2} + \frac{-7x}{x+2}$

109. Løs følgende ligninger ved hjælp af nulreglen:

a) $(t-2)\cdot(t-5) = 0$ b) $(3p-8)\cdot(3p+9) = 0$

c) $z^2 - 8z = 0$ d) $w^3 + 22w^2 = 0$

110. Udregn følgende udtryk.

a) $(a+2b)^2$ b) $(2a-3b)^2$ c) $(x+1)^2$

d) $(4y-3)^2$ e) $(-5x+2)^2$ f) c) $(x+y)^2 - (x-y)^2$

111. Reducér:

a) $6x^4 \cdot 3x^2 \cdot x \cdot 4x^3 \cdot 5x^5$ b) $36x^5 : (4x^4) - 12x^4 : (3x^3)$

112. Reducér:

a) $\frac{3y}{y+2} + \frac{5y+2}{y+2} + \frac{-7(y-1)}{y+2}$ b) $\frac{x}{3} + \frac{2x}{5} - \frac{3x}{6}$ c) $\frac{a}{2} - \frac{3a}{6} + \frac{5}{3}$

d) $\frac{5}{2b} - \frac{12}{5b} - \frac{1}{2}$ e) $\frac{6}{xy} - \frac{5}{3yz} + \frac{1}{6xz}$

113. Løs ligningen $\sqrt{2x} + \sqrt{5x} = 4$

114. Reducér:

a) $\dfrac{ab+bc-(ac+b^2)}{2ab+ac-(2ab+bc)}$ b) $\dfrac{a}{a+4}+\dfrac{8a}{a^2+8a+16}-\dfrac{4a-16}{(a+4)^2}$

115. Reducér udtrykkene.

* a) $\dfrac{\sqrt[3]{a^4}\cdot a\cdot\sqrt[4]{a^2}\cdot a\sqrt{a}}{\sqrt[6]{a^5}\cdot\sqrt[3]{a}}$ b) $\dfrac{\sqrt{ab}\cdot\sqrt[3]{a^2}\cdot b^{5/2}}{\sqrt[6]{a}\cdot\sqrt[5]{a^8b^3}}$

***116.** Omskriv følgende udtryk til én brøk og reducér mest muligt:

a) $\dfrac{a}{b}-\dfrac{b}{a}-1$ b) $\dfrac{2}{a^2b^2}+3-\dfrac{3}{ab}$ c) $\dfrac{1}{3xy^2}-\dfrac{1}{6y}-\dfrac{1}{y}$ d) $\dfrac{a}{b^2}+\dfrac{a}{b}+a$

117. Udregn uden brug af lommeregner:

a) $-4\cdot\dfrac{5}{-6}$ b) $\dfrac{2}{3}-4\cdot\dfrac{-5}{6}$ c) $\dfrac{5}{-2}\cdot(-3)-\dfrac{-5}{3}\cdot(-3)-\dfrac{-2}{-4}\cdot 3$

***118.** Reducér:

a) $-3a\cdot(2x-5y)\cdot(y+3x)$ b) $(\frac{5}{2}x-y)\cdot(8x-6y)+5\cdot(5x-\frac{3}{5}y)\cdot(2x-y)$

***119.** Bestem en cirkaværdi af hvert af følgende udtryk uden brug af lommeregner (omskriv, reducér 10-talspotenserne, foretag overslagsberegning).
Udregn derefter den nøjagtige værdi af udtrykkene v.hj.a. lommeregneren.

a) $(6{,}023\cdot10^{23})^2\cdot1{,}602\cdot10^{-19}$ b) $\dfrac{(6{,}0\cdot10^8)^2}{(4{,}15\cdot10^{-15})^3}$

120. Reducér følgende brøker:

a) $\dfrac{(u-w)^2-u^2}{2u+w}$ b) $\dfrac{d(c+d)+c(d+c)-(d-c)^2}{7d}$

c) $\dfrac{(x+y)^2-(x-y)(x+y)-2y(x+y)}{x^2+1}$ d) $\dfrac{(a+5b)^2-(a-5b)^2}{ab}$

***121.** Løs ligningerne:

a) $(5x-3)^2 = (5x+3)\cdot(5x-3)$ b) $\frac{3}{7x-5} - \frac{2}{7x+5} = \frac{2x+11}{98x^2-50}$

122. Opløs i faktorer:

a) $4x^2 - 16x$ b) $4x^2 - 16$ c) $2x^2 - 8$ d) $(3a-1)x + (3a-1)y$

123. Vis ved kontroludregning, at $(10x + 5)^2 = 100x(x + 1) + 25$
Benyt denne formel til at udregne 35^2 , 45^2 og 85^2 uden brug af lommeregner.

124. Løs ligningerne:

a) $x^2 = 16$ b) $t^2 = 7$ c) $p^2 = 25$

***125.** Reducér følgende:

a) $\frac{6a+6}{5a-15} \cdot \frac{3a-9}{a+1}$ b) $\frac{r^2+r}{r^2+2r} \cdot \frac{5r+10}{3r+3}$ c) $\frac{q-p}{q^2+p^2-2qp}$

***126.** Løs følgende ligninger v.hj.a. nulreglen:

a) $x^5 - 5x^3 = 0$ b) $x^2 + 100x = 0$ c) $x^2 - 100 = 0$

127. Reducér:

a) $(3a - 2b + c)^2 - 5(2b - c)^2$
b) $(12p^3q^2 - 16p^2q - 24pq) : (4pq)$
c) $2x \cdot (2x - 1)^2 - (2x - 1)^3 - 1$
d) $a^2 \cdot (a^2 + 2b) + b^2 \cdot (3a - 2b) + 2a^3b - (a(a^3 - 5b^2) - 2a^2b(1 - a) - 2b^3)$

***128.** Reducér følgende udtryk:

a) $\frac{a^3 \cdot b^2 \cdot (a^{-4})^5 \cdot (b^3)^{-2}}{(a \cdot b)^2 \cdot (a^{-7} \cdot b^{-3})^3}$ b) $\frac{x^5 \cdot (yz)^{-3} \cdot (x^{-2})^{-3} \cdot y^4}{(\frac{x}{y})^{-1} \cdot (x^6 \cdot z^5)^2}$

129. Løs ligningssystemerne:

a) $8x - 15y = -3$
$2x + 3y = \frac{3}{2}$

b) $5x - 8y = 0$
$5x + 8y = 80$

130. Forkort følgende brøker:

a) $\dfrac{b^2 - a^2}{a + b}$ b) $\dfrac{13x - 13y}{52x - 52y}$ c) $\dfrac{9 - a^2}{a^2 + 6a + 9}$

d) $\dfrac{p^2 - 81}{p - 9}$ e) $\dfrac{3b - 9}{b^2 - 9}$ f) $\dfrac{4y^2 + 32y + 64}{4y^2 - 64}$

***131.** Udregn uden brug af lommeregner:

a) $4\tfrac{1}{5} \cdot 6\tfrac{1}{7}$ b) $5\tfrac{2}{3} \cdot 8\tfrac{7}{17}$ c) $\dfrac{5\tfrac{1}{3}}{1\tfrac{1}{3}}$ d) $\dfrac{5\tfrac{2}{3}}{9\tfrac{4}{9}}$

***132.** Løs ligningerne

a) $x^8 = 109$ b) $z^{-3} = 4{,}32 \cdot 10^{-12}$ c) $(2r + 3)^3 = 34 \cdot 10^7$

133. Reducér følgende:

a) $\dfrac{ap - cp}{2ap}$ b) $\dfrac{3n^3 + n^2 - 7n^4}{n^2}$ c) $\dfrac{(qx - py)^2}{3b} + \dfrac{yp(xq - py)}{4b}$

d) $\dfrac{2r + s}{st} + \dfrac{t + 3s}{rt} - \dfrac{r - 4t}{sr}$

***134.** Vis, at $\sqrt{9 - 4\sqrt{5}} = -2 + \sqrt{5}$ og $\sqrt{\dfrac{21}{4} - 2\sqrt{5}} = 2 - \tfrac{1}{2}\sqrt{5}$.

135. Udregn følgende tal uden brug af lommeregner (Tænk før du handler !!):

a) 203^2 b) 498^2 c) 1002^2

***136.** Opløs i faktorer:

a) $(x + 2y) \cdot 3 + (x + 2y) \cdot (x - 5)$ b) $(2a + b) \cdot x^2 - (2a + b) \cdot 25$

c) $x^2 - 4 + 2(x - 2)$

137. Isolér z: $\dfrac{1}{xyz} - \dfrac{1}{xy} = \dfrac{2x + b}{15Az}$

138. Reducér:

a) $\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}-\frac{x-y}{x+y}+2\cdot\frac{y^2}{(x+y)(x-y)}$ b) $\frac{(a+b)^2-(a-b)^2}{a^2\cdot b-a\cdot b^2}\cdot\frac{a-b}{2}$

139. Løs følgende ligninger:

a) $6p\sqrt{p}=167$ b) $\frac{9x^2}{\sqrt[6]{x}}=530$ c) $\sqrt[11]{s^8}=776{,}98$ d) $\sqrt[3]{m^{18,8}}=2100$

140. Reducér mest muligt:

a) $\frac{y^{4,3}\cdot y^{-2,1}\cdot y^{\frac{-8}{5}}}{\sqrt[10]{y^3}\cdot y^{\frac{7}{10}}}$ b) $\frac{r^{\frac{6}{14}}\cdot s^{\frac{5}{2}}\cdot(r\cdot s^{\frac{2}{5}})^{\frac{5}{8}}}{s^{-3}\cdot\sqrt[30]{r^9}}$

141. Skriv hver af følgende værdier ved hjælp af dekadiske præfixer:

a) 124000 Ω (ohm) b) 0,00000000098 m c) 0,0095 A d) 60696 m
e) 14500000 m f) 560000000 Ω g) 794100000000 W h) 0,0000642 A

142. Løs følgende ligninger:

a) $m^2 = 9$ b) $q^2 = 75$ c) $x^6 = 64$
d) $x^7 = 72$ e) $(5t)^4 = 5131$ f) $x^8 = -32$
g) $18 - s^{18} = 0$ h) $K^8 = 38{,}6\cdot10^{34}$ i) $x^7 = -400$
j) $5{,}3p^{-21} = 42$ k) $(4\alpha)^{-8} = 2600$ l) $75s^{10} + s^5 = 0$
m) $x^{12} - 12x^7 = 0$ n) $\frac{(4x+12)(9-13x^6)}{x^4-81} = 0$

143. Omskriv følgende udtryk ved at sætte en faktor udenfor parentes.

a) $3x + ax - bx$ b) $2t - 6t^2 + 14t^3$ c) $(a^2b + 4a) + (2ab^2 + 8b)$

144. Reducér følgende udtryk:

a) $a(\frac{1}{b}+\frac{1}{a})-b(\frac{1}{b}-\frac{1}{a})-\frac{1}{a}(a+b)+\frac{1}{b}(b-a)$ b) $\frac{8}{n^2-16}+\frac{3}{2n+8}-\frac{2}{2n-8}$

145. Udregn uden brug af lommeregner (Tænk før du handler !!):

$81\cdot79$, $97\cdot103$, $45\cdot55$ og $3{,}2\cdot2{,}8$

146. Løs hver af følgende ligninger:

a) $3x+1=7x+15$ b) $x+3=2-(1-x)$

c) $2x+13=2x+9$ d) $-\frac{1}{3}(x+2)=5x-4$

147. Reducer følgende udtryk:

a) $\sqrt{108}+2\sqrt{80}+\sqrt{243}+\sqrt{245}$ b) $\left(3\sqrt{3}+\sqrt{6}\right)\cdot\left(3\sqrt{3}-\sqrt{6}\right)$ c) $\sqrt{\sqrt{7}+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$

148. Beregn på lommeregneren

a) $7{,}1 \cdot 10^{-21} + 1{,}23 \cdot 10^{-20}$
b) $5{,}67 \cdot 10^{-78} \cdot 4{,}5 \cdot 10^{-45}$
c) $5 \cdot 10^{6} + 5 \cdot 10^{-6}$
d) $0{,}045 \cdot 10^{-12} - 45 \cdot 10^{-15}$

149. Løs ligningen: $358 = 331{,}6\sqrt{1+0{,}00367\cdot t}$

150. En neutronstjerne består af tæt sammenpakkede neutroner. Neutronen er en atomar partikel med masse $1{,}675 \cdot 10^{-27}$ kg og en radius på ca. 10^{-15} meter.
Giv en vurdering af, hvor meget 1mm^3 af en neutronstjerne vejer?

151. Et gammelt indisk problem lyder således:
En rejsende købmand må betale told af sine varer 3 forskellige steder på sin rejse.
Første sted betaler han en tredjedel af varerne.
Andet sted betaler han en fjerdedel af det, der er tilbage.
Tredje sted betaler han en femtedel af resten.
Han betalte i alt med varer til en værdi af 24 guldstykker.
Hvad var værdien af købmandens varer ved rejsens begyndelse?

152. Et bryggeri sender en dag 34 ølbiler af sted med i alt 22350 kasser øl.
Der findes to typer ølbiler, som hver for sig rummer henholdsvis 600 og 750 kasser øl.
Hvor mange ølbiler er der af hver type ?

153. Elektromagnetisk stråling omfatter bl.a. radiobølger, synligt lys og røntgenstråling.
Elektromagnetisk stråling har (som andre bølger) en frekvens, der måles i enheden Hz (Hertz), hvor 1 Hz = 1 svingning pr. sekund, og en bølgelængde, der måles i meter.
Sammenhængen mellem frekvens f og bølgelængde λ for elektromagnetisk stråling er givet ved formlen: $\lambda \cdot f = c$, hvor $c = 3{,}00 \cdot 10^{8}$ m/s er lysets hastighed.

a) En FM-station sender på frekvensen $88{,}2 \cdot 10^{6}$ Hz. Beregn den tilsvarende bølgelængde.
b) Bølgelængden for synligt lys ligger i intervallet $390\cdot10^{-9}$ m til $780\cdot10^{-9}$ m (afhængig af farven). Beregn den frekvens, der svarer til blågrønt. Bølgelængden er ca. $500\cdot10^{-9}$ m.

Facitliste til opgaver med *

3) $(x, y) = (2, -3)$
7a) L = $\{-9\}$
10a) $\dfrac{a+d}{ad}$
10b) m – 2
10c) $\dfrac{x^2-y^2}{2a}$
10d) $\dfrac{2}{a}$
14a) $\frac{1}{91}$
14b) $\frac{22}{15}$
14c) $\frac{14}{3}$
14d) $\frac{12}{25}$
15d) 10^{-7}
15e) 10^{2}
15f) 10^{-9}
16a) 1 – 2s + t – st
16b) $p^2 + 4q$
16c) $2a^2 + 6b^2 + 12ab$
16d) $8x^2 - xy$
16e) $4a^2 - 2b^2 - 6ab$
16f) $18m^2$
21a) L = $\{2\}$
21b) L = $\{12{,}5\}$
21c) L = $\{9\}$
21d) L = $\{1{,}3\}$
23a) $x^{-1} \cdot y^6 \cdot z^8$
23b) $k^{-13} \cdot m^7 \cdot n^{-7}$
23c) $u^{11} \cdot v^{-9} \cdot w^{-7}$
23d) $a^{-11} \cdot b^{-11} \cdot d^{-1}$
30a) L = $\{-0{,}2\ ,\ 0{,}2\}$
30b)
L = $\{-0{,}06325,\ \ 0{,}06325\}$
30c) L = $\{\frac{65}{14}\}$
30d) L = $\{-0{,}4\}$
31a) $-\dfrac{2b^2}{a^2-b^2}$

31b) $\dfrac{4a^2}{(a^2-b^2)(a+b)}$
33) $\dfrac{4x^2+12x+9}{18-8x^2}$
(Kan reduceres til $\dfrac{2x+3}{6-4x}$ ved anvendelse af samme princip som i øvelse 2.10).

35a) 6x – 9
35b) a – 4b
35c) 2y – x
35d) 17x – 2y – 6
37a) $-\dfrac{2(x+y)}{xy^2}$
37b) $\dfrac{a^2+b^2-4ab}{6a^2-6b^2}$
38) b = $\dfrac{1}{2q^2} - p$
40a) $\frac{1}{2}$
40b) $\frac{19}{24}$
40c) $\frac{129}{77}$
40d) $\frac{593}{210}$
40e) $\frac{1}{90}$
43a) L = $\{-3,\ 5,\ 17\}$
43d) L = $\{-5\}$
44) For x = 7 siger formlen:
$75^2 = (10\cdot7 + 5)^2 =$
$100\cdot7\cdot8 + 25$
$= 5600 + 25 = 5625$
Metoden kan udtrykkes ved: Kvadratet på et ulige, positivt, helt tal, som er deleligt med 5, kan findes ved at beregne: (antal tiere i tallet)·(1 + antal tiere i tallet)·100 + 25.
45a) $\sqrt[84]{5^{265}}$
45b) $2\cdot\sqrt[12]{7}$

46) L = $\{5{,}077\}$
47a) x·(3x + 1)
47b) x·(3x – 1)
47c) $(1 + y)^2\cdot(1 + 2y)$
48a) L = $\{\frac{4}{5}\}$
48b) L = $\{-1\}$
48c) L = $\{\frac{200}{49}\}$
48d) L = $\{\frac{15}{2}\}$
54a) 5^7
54b) 2^{-4}
54c) 5^2
54d) $-\left(\frac{2}{3}\right)^2$
54e) $2\cdot 3^{-6}$
54f) 2^{-10}
56a) 6xy
56b) $120\sqrt{2}a^2b^2$
56c) $2a + 2\sqrt{ab}$
56d) $4\sqrt{xy} - z$
56e) $\dfrac{36\sqrt{ab}}{4b-9a}$
59a) $\dfrac{x+2}{(x-2)^2}$
59b) $\dfrac{5x^3-x^2+x}{(x^2-1)^2}$
68a) $a^2 - 4b^2$
68b) $x^2 - 1$
68c) $25x^2 - 49$
68d) $4y^2 - 9$
70a) (x,y) = $\left(-\frac{41}{17}, \frac{13}{17}\right)$
70b) L = Ø
70c)
L = $\left\{(x, y) \middle|\ y = -\frac{1}{3}x - \frac{1}{6}\right\}$
76a) 1
76b) $\dfrac{8a}{3b}$
76c) $\dfrac{3a^2-4b^2}{12ab}$

77a) L = $\left\{ \frac{192}{455} \right\}$
77b) L = $\left\{ -\frac{274}{195} \right\}$
78a) 4x·(2a + b – 3c)
78b) 3a·$(a-1)^2$
78c) (a + 4)(a – 4)
79a) $x^4 + 4x^3 + 4x^2 - 4$
79b) $x^4 - 1$
79c) 4
79d) $x^4 + x^3 - x - 1$
82a) L = $\left\{ -\frac{57}{11} \right\}$
82b) L = $\left\{ -\frac{472}{27} \right\}$
85) $d = \frac{1}{2}\left(\frac{2q+\alpha}{1-8q-4\alpha}\right)^2$
87a) $-\ 243y^5$
87b) a^{20}
87c) a^{3n+7}
87d) $384 \cdot a^{15}$
90a) $15a^4 + 26a^2b^2 - 9b^4$
90b) –8ab
90c) $18y^2 - 12xy$
90d) 3m – 2n + 5
90e) $10(xyz)^2$
91a) 1
91b) 3
91c) $66 - 12\sqrt{35}$
91d)
$\frac{-152+5\sqrt{2}-43\sqrt{10}}{8}$
96c) $\frac{28a^2}{9}$
98a) $\frac{7}{12}$
98b) $\frac{1}{4}$
98c) 1
98d) $\frac{3}{2}$
106a) 20^6
106b) 24^2
106c) 3^4
106d) 5^{-4}
106e) $2^6 \cdot 3^{-11}$
108a) $\frac{13x}{12}$
108b) $\frac{2a+3}{5}$
108c) $\frac{x}{x+2}$
115a) $\sqrt[6]{a^{19}}$
116a) $\frac{a^2-b^2-ab}{ab}$
116b) $\frac{3a^2b^2-3ab+2}{a^2b^2}$
116c) $\frac{2-7xy}{6xy^2}$
116d) $\frac{a+ab+ab^2}{b^2}$
118a)
$-18ax^2 +\ 15ay^2 + 39axy$
118b) $70x^2 + 9y^2 - 54xy$
119a) $5{,}8115 \cdot 10^{28}$
119b) $5{,}0368 \cdot 10^{60}$
121a) L = $\left\{ \frac{3}{5} \right\}$
121b) L = $\left\{ -\frac{13}{4} \right\}$
125a) $\frac{18}{5}$
125b) $\frac{5}{3}$
125c) $\frac{1}{q-p}$
126a)
L = $\left\{ -\sqrt{5},\ 0\ ,\sqrt{5} \right\}$
126b) L = $\left\{ -100, 0 \right\}$
126c) L = $\left\{ -10, 10 \right\}$
128a) a^2b^3
128b) z^{-13}
131a) $\frac{129}{5} = 25\frac{4}{5}$
131b) $\frac{143}{3} = 47\frac{2}{3}$
131c) 4
131d) $\frac{3}{5}$
132a)
L = $\left\{ -1{,}7975\ ,\ 1{,}7975 \right\}$
132b) L = $\left\{ 6140{,}1 \right\}$
132c) L = $\left\{ 347{,}48 \right\}$

134 Da $(-2+\sqrt{5})^2$ = $4+5-2\cdot 2\cdot\sqrt{5} = 9-4\sqrt{5}$ og da $-2+\sqrt{5} \geq 0$ ses, at $-2+\sqrt{5}$ opfylder kravene i rodprøven i forhold til værdien af $\sqrt{9-4\sqrt{5}}$, hvormed den ønskede lighed er bevist.
Den anden del af opgaven løses på samme måde.

136a) (x + 2y)·(x – 2)
136b)
(2a + b)·(x – 5)·(x + 5)
136c) (x – 2)·(x + 4)

Stikordsregister

addition 3
brøk 3, 10
dekadiske præfikser 33
differens 3
dividere 3
division 3
eksponent 29
faktorer 6
flerleddet størrelse 6
forkorte 11, 16
forlænge 11, 16
fællesnævner 11, 17
gange 3
hierarki 3, 4, 40
isolere 45
kvadratrod 23
kvadrere 4
ligning 41
ligningssystemer 50
løse ligning 41
løsning 41
løsningsmængde 41
matematisk udtryk 3
minus 3
minusparenteser 6
multiplikation 3
n'te rod 35
nulreglen 42, 44
nævneren 3, 10
omskrivning 7
omvendte brøk 12, 17
plus 3
plusparenteser 6
potens af tal 29
potens af ti 32
potensopløftning 40
potensregneregler 29, 30, 32
produkt 3
reciprok værdi 15, 17
reduktion 7
regningsarter 3, 40
rodprøven 23, 35
roduddragning 40
rødder 35
scientific notation 34
skjulte parenteser 3, 10, 16, 24, 40
substitution 51
substitutionsmetoden 51
subtraktion 3
sum 3
symbolske værdier 5, 16
to ligninger med to ubekendte 50
tælleren 3, 10
ubekendt 41
udvidet potensbegreb 37, 38
uforkortelig brøk 17
variabel 41

Symbolliste

$\sqrt{\ }$ 23

$\Leftrightarrow$ 23

$\wedge$ 23

$\vee$ 24

$\neq$ 24

a^n 29

a^{-n} 29

$\sqrt[n]{\ }$ 35

$\{\ \}$ 42