

Steen Bentzen

Matematik for Gymnasiet

**Trigonometriske funktioner
og matematiske modeller.**

Indholdsfortegnelse

| | |
|---|---------------|
| Forord | s. 2 |
| Kap. 1: Trigonometriske funktioner og grader. | s. 3 |
| Grader som vinkelmål | s. 3 |
| Sinus og Cosinus | s. 4 |
| Tangens | s. 6 |
| Retvinklede trekanter | s. 8 |
| Vilkårlige trekanter | s. 10 |
| Kap. 2: Trigonometriske funktioner og radianer | s. 18 |
| Radianer som vinkelmål | s. 18 |
| Sinus og Cosinus | s. 20 |
| Harmoniske funktioner | s. 22 |
| Tangens | s. 27 |
| Trigonometriske grundligninger og uligheder | s. 28 |
| Omskrivningsformler for sinus, cosinus og tangens | s. 34 |
| Kap. 3: Trigonometriske funktioner og infinitesimal regning | s. 40 |
| Kontinuitet og differentiability | s. 40 |
| Integration af trigonometriske funktioner | s. 47 |
| Kap. 4: Trigonometriske funktioner og modeller | s. 51 |
| Harmoniske svingninger. Bølgebevægelse. – Uden differentialregning | s. 51 |
| Paraboloide som reflektor | s. 59 |
| Svingninger og differentialregning | s. 62 |
| Optimering | s. 64 |
| Regnbuer | s. 66 |
| Appendices | s. 78 |
| Appendix 1: Areal af en trekant | s. 78 |
| Appendix 2: Parallelforskydning og ret affinitet af grafer for funktioner | s. 80 |
| Appendix 3: Omvendte funktioner | s. 85 |
| Appendix 4: Spejling i linien med ligningen: $y = x$ | s. 89 |
| Appendix 5: Afstanden mellem to punkter i et koordinatsystem | s. 90 |
| Appendix 6: Additionsformel bevist v.hj.a. vektorer | s. 91 |
| Opgavesamling | s. 92 |
| Modelopgaver | s. 101 |
| Stikordsregister | s. 111 |

Forord.

Formålet med denne bog er at

- give mulighed for at studere de trigonometriske funktioner på forskellige niveauer
- præsentere en sammenhængende velfunderet beskrivelse af de trigonometriske funktioner
- give en række eksempler på anvendelser og matematiske modeller hvori de trigonometriske funktioner indgår.

Bogens indhold og opbygning afspejler direkte dette formål – jfr. bl.a. indholdsfortegnelsen.

I kapitel 1 og 2 omtales de er trigonometriske funktioner i relation til vinkler målt i grader hhv. som funktioner af tal (der i denne sammenhæng benævnes radianer). Ingen af disse kapitler bygger på differentialregning mm. – og de kan derfor (samlet eller tidsmæssigt adskilt) placeres relativt tidligt i et længerevarende undervisningsforløb (f.eks. et 2-3 årigt gymnasieforløb).

I kapitel 3 omtales de trigonometriske funktioner i relation til infinitesimalregning, og det forudsættes derfor, at læseren har et solidt kendskab til begreberne kontinuitet og differentiabilitet. Der er også for fuldstændighedens skyld medtaget et kort afsnit om integralregning i relation til de trigonometriske funktioner. Dette kan man blot udelade, hvis det ønskes.

De trigonometriske funktioner anvendes i en lang række sammenhænge indenfor specielt fysik og teknik, bl.a. i relation til vej-, bro- og bygningsteknik, cirkelbevægelse, skråt kast, resonans og tvungne svingninger, faseforskydning af vekselstrøm, optiske gitre, ladede partiklers bevægelse i elektriske og magnetiske felter osv. osv.. Men for at begrænse bogens omfang og kompleksiteten i de beskrevne eksempler (herunder beskrivelsen af forudsætningerne inden vi ”kommer til selve matematikken”) udelades disse emner. Der henvises til litteraturen på området (herunder for nogle få af emnerne vedkommende til bogen: Differentialligninger og matematiske modeller. 2. udgave). Af samme årsag er et emne som kortprojektioner udeladt.

Det er mit håb, at læseren er tilfreds med det udvalg af modeller/anvendelser, der er medtaget.

I kapitel 4 omtales ”større” modeller, der (bortset fra første afsnit om harmoniske svingninger og bølgebevægelser) alle forudsætter kendskab til differentialregning, og i opgavesamlingen er en række ”mindre” modeller samlet i en særlig modelopgavesamling.

Der er 6 appendices til bogen, som på forskellig vis udgør dele af fundamentet for bogen. Disse læses naturligvis kun i det omfang, det skønnes relevant.

Bogen er beregnet til undervisning i matematik på gymnasialt niveau, men bogen kan også anvendes på første studieår på en række matematisk orienterede studier.

Bogens indhold og struktur gør den desuden oplagt at bruge i tværfagligt samarbejde og i projekter med specielt fysik og teknik.

Der anvendes markeringen ♥ til at angive afslutningen af en øvelse, et eksempel eller et bevis.

Herning, September 2009

Steen Bentzen