Appendices til trigonometri:

Appendix 1: Areal af en trekant

Der gælder som bekendt følgende sætning. Men beviset er nok mindre kendt (se nedenfor).

Sætning A.1.1.
Arealet A af en trekant er givet ved:

$A = \frac{1}{2} \cdot \text{grundlinie} \cdot \text{højde}$ eller kort: $A = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h$

hvor ”grundlinie” (g) står for en vilkårlig side i trekanten, og hvor ”højde” (h) står for højden fra det modsatte punkt og ned på grundlinien eller dennes forlængelse.

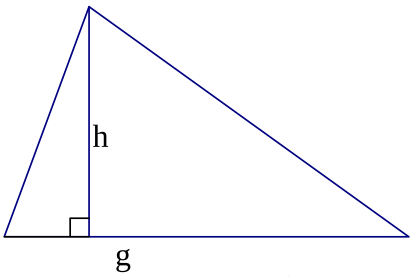


Fig A.1.1 a)

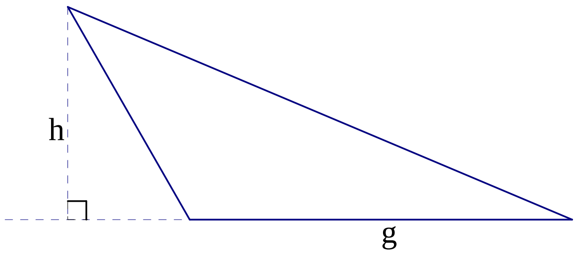


Fig. A.1.1 b)

Bevis:
Hvis vi har en retvinklet trekant, hvor den ene katete er grundlinie g og den anden katete dermed er højde h (se figur A.1.2 a)), så udgør denne trekant halvdelen af et rektangel med længde g og højde h, hvor trekantens hypotenuse er diagonal i rektanglet (se figur A.1.2 b)). Da rektanglets areal er g·h, og da diagonalen deler rektanglet i to lige store områder, er arealet af trekanten givet ved: $\frac{1}{2} \cdot g \cdot h$

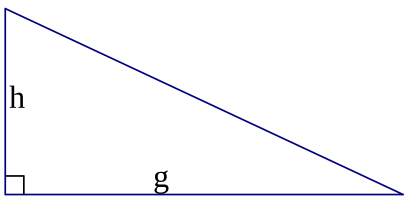


Fig. A.1.2 a)

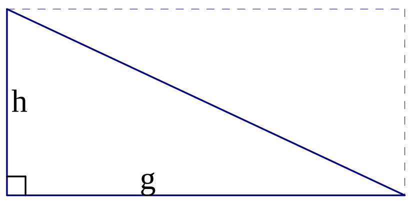


Fig. A.1.2 b)

Hvis højden falder indenfor trekanten (som vist på figur A.1.1 a)), så kan vi argumentere således:
Ud fra trekanten konstruerer vi et rektangel som vist figur A.1.3:

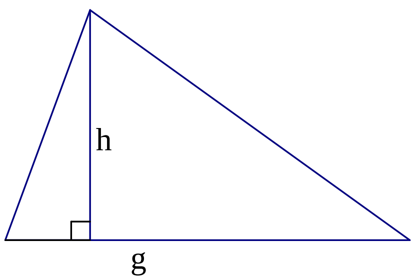


Fig. A.1.3 a)

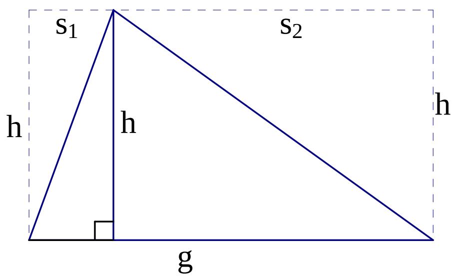


Fig. A.1.3 b)

Vi ser, at rektanglets areal er h·g, men for at få den oprindelige trekant, skal vi fjerne to retvinklede trekanter med højden h og med grundlinie s_1 hhv. s_2. Ifølge det allerede beviste, er arealerne af disse to retvinklede trekanter lig med $\frac{1}{2}\cdot s_1\cdot h$ hhv. $\frac{1}{2}\cdot s_2\cdot h$, hvormed arealet A af den oprindelige trekant bliver:

$$A = h\cdot g - \tfrac{1}{2}\cdot s_1\cdot h - \tfrac{1}{2}\cdot s_2\cdot h = h\cdot g - \tfrac{1}{2}\cdot(s_1+s_2)\cdot h$$

Da $s_1 + s_2 = g$ (se figur A.1.3 b)) får vi:

$$A = h\cdot g - \tfrac{1}{2}\cdot(s_1+s_2)\cdot h = h\cdot g - \tfrac{1}{2}\cdot g\cdot h = \tfrac{1}{2}\cdot g\cdot h$$

hvormed det ønskede er bevist.

Hvis vi endelig ser på den situation, hvor højden falder udenfor trekanten, så kan vi ud fra den oprindelige trekant konstruere et rektangel som vist på figur A.1.4:

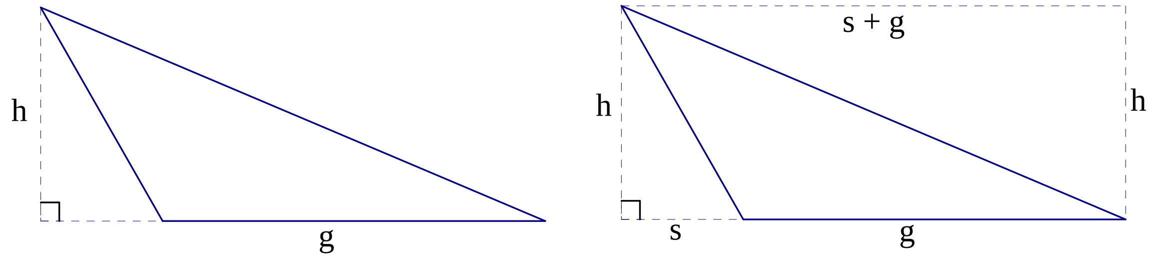


Fig. A.1.4 a) Fig. A.1.4 b)

Vi ser, at rektanglets areal er h·(s+g), hvor s er det på figur A.1.4 b) markerede stykke. Men for at få den oprindelige trekant, skal vi fjerne to retvinklede trekanter med højden h og med grundlinie s hhv. s + g . Ifølge det allerede beviste, er arealerne af disse to retvinklede trekanter lig med $\frac{1}{2}\cdot s\cdot h$ hhv. $\frac{1}{2}\cdot(s+g)\cdot h$, hvormed arealet A af den oprindelige trekant bliver:

$$A = h\cdot(s+g) - \tfrac{1}{2}\cdot s\cdot h - \tfrac{1}{2}\cdot(s+g)\cdot h = h\cdot s + h\cdot g - \tfrac{1}{2}\cdot s\cdot h - \tfrac{1}{2}\cdot s\cdot h - \tfrac{1}{2}\cdot g\cdot h = \tfrac{1}{2}\cdot g\cdot h$$

Hermed er sætningen bevist i alle tilfælde. ♥

Appendix 2. Parallelforskydning og ret affinitet af grafer for funktioner.

Parallelforskydning.
Som bekendt er en parallelforskydning en operation (en afbildning), der flytter alle planens punkter lige langt i en given retning. I et koordinatsystem kan en parallelforskydning angives ved et talpar, der bestemmer hvor langt et vilkårligt punkt skal forskydes i hhv. 1.aksens og 2.aksens retning.

Parallelforskydningen givet ved talparret (2, –3) forskyder således et vilkårligt punkt 2 enheder i 1.aksens retning og –3 enheder i 2.aksens retning. Ved denne parallelforskydning vil f.eks. punkterne (–5,1) og (1,3) forskydes over i hhv. (–3, –2) og (3,0) (Se figur A.2.1)

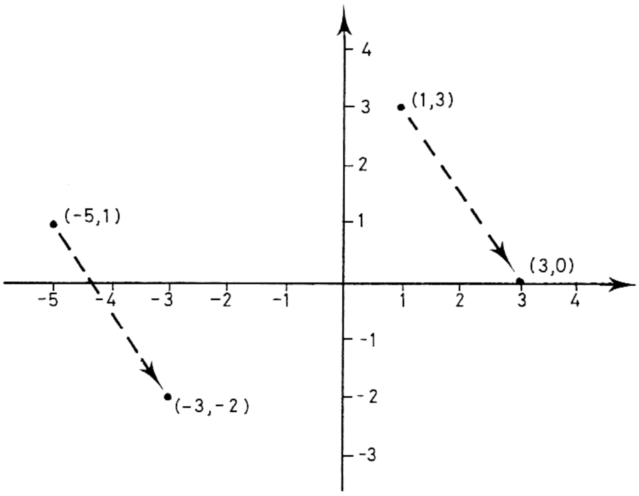


Fig. A.2.1

I almindelighed kan vi angive følgende regel:

Parallelforskydningen givet ved talparret (p,q) fører et vilkårligt punkt (x,y) over i punktet (x + p, y + q).

Det skal i øvrigt bemærkes, at man undertiden blot kort taler om: ”Parallelforskydningen (p,q)” i stedet for: ”parallelforskydningen givet ved talparret (p,q)”.

Lad nu f være en given funktion. Hvis vi parallelforskyder Gr(f), dvs. grafen for f, v.hj.a. parallelforskydningen (p,q), så får vi grafen for en ny funktion, som vi f.eks. kan kalde g (se figur A.2.2).

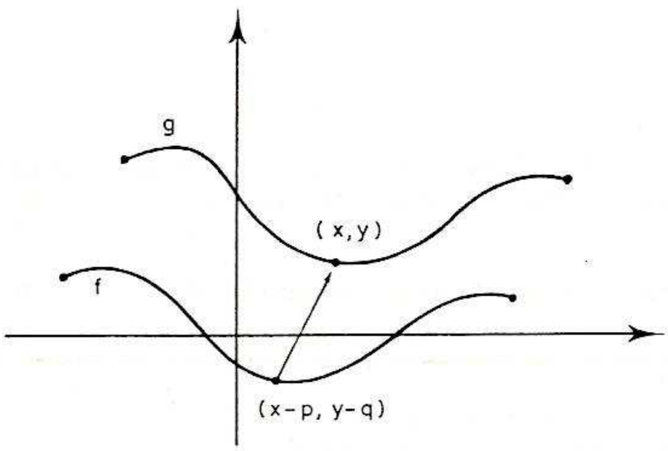


Fig. A.2.2

Lad $(x,y) \in Gr(g)$ være et vilkårligt punkt på grafen for g.
Der gælder da, at $g(x) = y$, idet grafen for en funktion netop er givet ved de punkter, hvis andenkoordinat er lig med funktionsværdien af førstekoordinaten.
Det punkt på Gr(f), som forskydes over i (x,y), har koordinaterne $(x - p, y - q)$ (overvej !). Da dette punkt tilhører Gr(f) har vi som ovenfor, at andenkoordinaten er funktionsværdien af førstekoordinaten, dvs. der gælder: $y - q = f(x - p)$.
Hvis vi nu kombinerer disse informationer, så får vi: $g(x) = y = f(x - p) + q$.

Der gælder altså følgende sætning:

<u>Sætning A.2.1.</u>
Lad f være en given funktion. Når grafen for f forskydes med parallelforskydningen (p,q), så fremkommer grafen for en funktion g, hvis funktionsforskrift er givet ved:

$$g(x) = f(x - p) + q$$

Bemærk, at forskydningen p i 1.aksens retning <u>trækkes fra inde i</u> funktionsparentesen, medens forskydningen q i 2.aksens retning <u>lægges til udenfor</u> funktionsparentesen.

<u>Eksempel A.2.2.</u>
Vi vil bestemme forskriften for den funktion g, hvis graf fremkommer ved parallelforskydningen (2, –3) af grafen for funktionen $f(x) = x^2$ (se figur A.2.3)

Ifølge sætning A.2.1 har vi:

$$g(x) = f(x-2) + (-3) = (x-2)^2 - 3 = x^2 - 4x + 1$$

altså:

$$g(x) = x^2 - 4x + 1 \quad \heartsuit$$

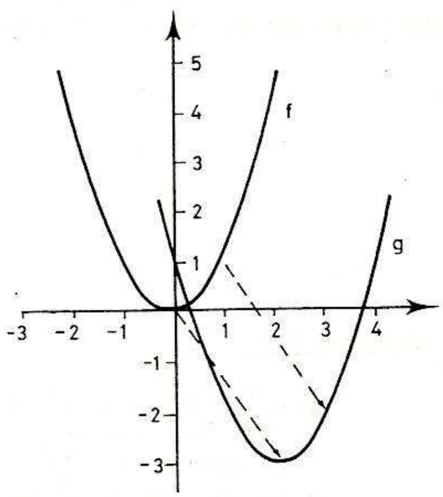


Fig. A.2.3

<u>Ret affinitet.</u>

En funktions graf kan udover parallelforskydning også underkastes operationer (afbildninger), som betegnes <u>rette affiniteter</u>.
Vi giver i denne sammenhæng følgende definition:

Definition A.2.3.

a) Ved en ret affinitet med 1.aksen som affinitetsakse og med forvandlingstal k forstås en afbildning, der fører et punkt med koordinaterne (x,y) over i et punkt med koordinaterne (x, ky) (Se figur A.2.4)

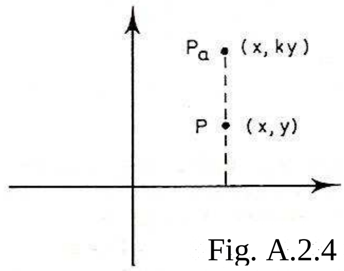


Fig. A.2.4

b) Ved en ret affinitet med 2.aksen som affinitetsakse og med forvandlingstal h forstås den afbildning, der fører et punkt med koordinaterne (x,y) over i punktet med koordinaterne (hx,y) (Se figur A.2.5)

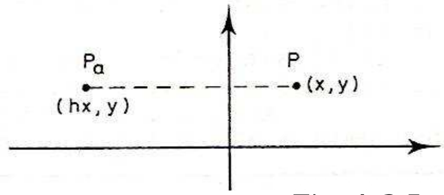


Fig. A.2.5

På figur A.2.6 er vist, hvordan en ret affinitet ændrer faconen af en given plan figur. (Den oprindelige figur er stiplet, og resultatet er fuldt optrukket. Der er anvendt forvandlingstallet 2).

Det bemærkes (overvej !), at hvis forvandlingstallet er lig med –1, så er den rette affinitet en spejling i affinitetsaksen, samt at hvis forvandlingstallet er 0, så er den rette affinitet det samme som projektionen på affinitetsaksen.

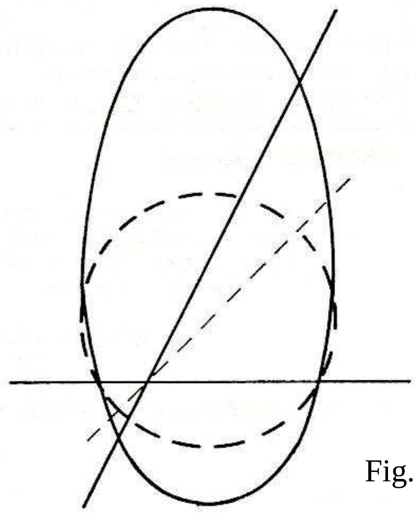


Fig. A.2.6

Eksempel A.2.4.
Betragt funktionen $f(x) = x^2$. Når vi som vist på figur A.2.7 foretager en ret affinitet med forvandlingstal $\frac{1}{2}$ og med 1.aksen som affinitetsakse, så får vi (ud fra grafen for f) grafen for en funktion g, hvis funktionsforskrift vi nu vil bestemme.
Lad (x,y) være et vilkårligt valg punkt på Gr(g). Det punkt på grafen for f, som ved den rette affinitet føres over i (x,y), har koordinaterne (x,2y) (overvej !).
Da $(x,2y) \in$ Gr(f) har vi, at $2y = f(x)$. Og da $(x,y) \in$ Gr(g) har vi desuden, at: $y = g(x)$.
Kombineres disse informationer, får vi:

$$g(x) = y = \frac{1}{2}\cdot x^2$$

dvs.

$$g(x) = \frac{1}{2}x^2$$

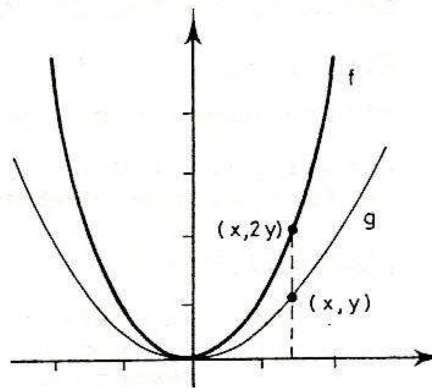


Fig. A.2.7

Bemærk, at dette resultat ikke er overraskende, idet en ret affinitet med 1.aksen som affinitetsakse bevarer førstekoordinaten (den uafhængige variable), men multiplicerer andenkoordinaten med forvandlingstallet (som i dette tilfælde er $\frac{1}{2}$). ♥

I forlængelse af eksempel A.2.4 anføres følgende sætning:

Sætning A.2.5.
Lad f være en given funktion.

a) Ved en ret affinitet med 1.aksen som affinitetsakse og med forvandlingstallet k føres grafen for f over i grafen for en funktion g, hvis funktionsforskrift er givet ved:

$$g(x) = k \cdot f(x)$$

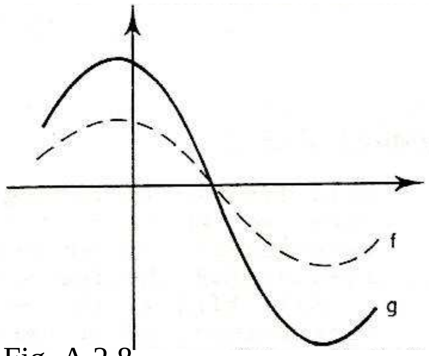


Fig. A.2.8

b) Ved en ret affinitet med 2.aksen som affinitetsakse og med forvandlingstallet h (h ≠ 0) føres grafen for f over i grafen for en funktion g, hvis funktionsforskrift er givet ved:

$$g(x) = f\left(\frac{x}{h}\right)$$

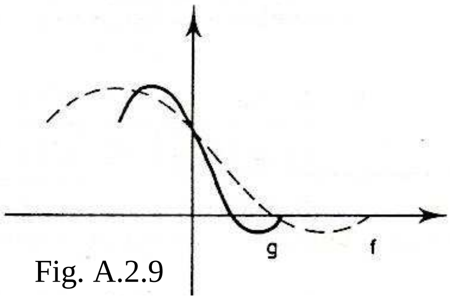


Fig. A.2.9

Bevis:
Beviset for a) overlades til læseren som en øvelse (jfr. eksempel A.2.4)
Beviset for b) forløber således:
Lad (x,y) være et vilkårligt valgt punkt på Gr(g).
Ifølge definition A.2.3 b) må koordinaterne (x_1, y_1) til det punkt på Gr(f), som ved den rette affinitet føres over i punktet (x,y), være fastlagt ved:

$(h \cdot x_1, y_1) = (x, y)$, dvs. $(x_1, y_1) = (\frac{x}{h}, y)$.

Da $(\frac{x}{h}, y)$ ligger på Gr(f), har vi, at $f\left(\frac{x}{h}\right) = y$,

og da (x,y) ligger på Gr(g) har vi desuden, at g(x) = y.

I alt får vi således, at $g(x) = f\left(\frac{x}{h}\right)$.

Hermed er sætningen bevist. ♥

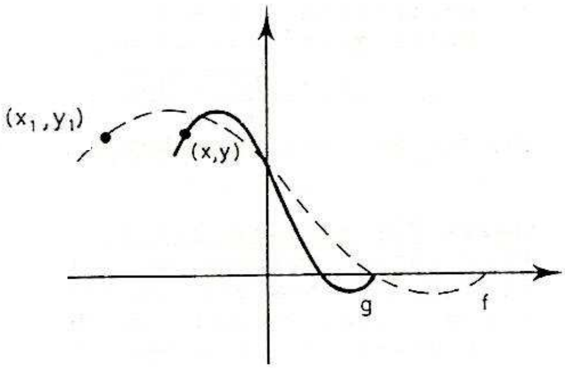


Fig. A.2.10

Øvelse A.2.6.

a) Betragt funktionen $f(x) = x^2$. Angiv funktionsforskrifterne og skitser graferne for de funktioner, der fremkommer ved at udsætte grafen for f for en ret affinitet i hhv. 1.aksen og i 2.aksen med forvandlingstallet 2.

b) Betragt funktionen $f(x) = \sqrt{x}$. Angiv funktionsforskrifterne og skitser graferne for de funktioner, der fremkommer ved at udsætte grafen for f for en ret affinitet i hhv. 1.aksen og i 2.aksen med forvandlingstallet $\frac{1}{3}$. ♥

Appendix 3: Omvendte funktioner.

Lad os, inden vi overhovedet får fortalt, hvad man forstår ved en omvendt funktion, starte med at slå fast, at der intet mystisk er ved omvendte funktioner ! Anvendelse af ordet "omvendt" er en relativ ting, idet en funktion under visse omstændigheder kan kaldes en omvendt funktion til en anden allerede givet funktion !
Hvis vi ser på så fredelige funktioner som g(x) = $\frac{1}{2}x+3$ og h(x) = $\sqrt{x}$, så tænker man vel ikke straks på, at de er "omvendte". Men som vi skal se, er dette ikke desto mindre tilfældet: g er omvendt funktion til f(x) = 2x – 6, og h er omvendt funktion til f(x) = x^2 , $x \geq 0$.

Vi skal først have begrebet en injektiv funktion defineret:

Definition A.3.1.

En funktion f siges at være injektiv, hvis der for ethvert $y \in$ Vm(f) findes netop ét $x \in$ Dm(f), så f(x) = y.

Det overlades til læseren at lave en figur af grafen for en funktion f, som ikke er injektiv og grafen af en funktion g, som er injektiv.
Det overlades også til læseren at overveje, at en injektiv funktion f er det samme som en funktion med følgende egenskab: For alle x_1 , $x_2 \in$ Dm(f): $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.
Endelig overlades det til læseren at argumentere for, at en monoton funktion er injektiv.

Hvis vi et øjeblik vender opmærksomheden mod den grundlæggende definition af en funktion, så siger den som bekendt, at man har en funktion g fra en mængde A ind i en mængde B, hvis der til ethvert element i A ved g tilordnes netop ét element i B. Og hvis vi derefter vender blikket mod den ovenstående definition af en injektiv funktion, så har vi netop denne situation, idet der til ethvert element $y \in$ Vm(f) (= A) svarer netop ét $x \in$ Dm(f) (= B). (x er bestemt ved, at f(x) = y).

Vi kan derfor anføre følgende definition:

Definition A.3.2.

Hvis f er en injektiv funktion, så har vi samtidig en funktion fra Vm(f) ind i Dm(f). Denne funktion kaldes den omvendte funktion til f og betegnes f^{-1}. Og der gælder, at: $f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow y = f(x)$

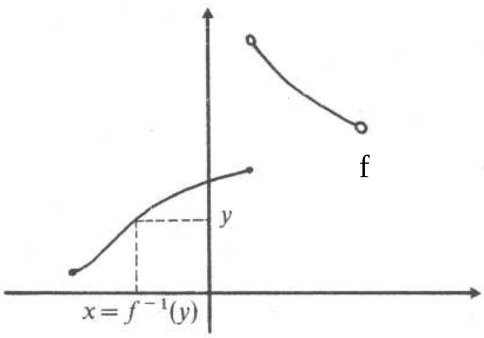


Fig. A.3.1

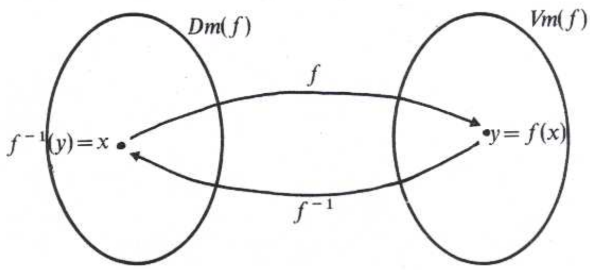


Fig. A.3.2

Indholdet i definition A.3.2 kan illustreres som vist på figur A.3.1 og A.3.2 (se foregående side), hvor figur A.3.2 er af mere skematisk karaktér.
Vi bemærker, at $\boxed{Dm(f^{-1}) \;=\; Vm(f) \;\text{ og }\; Vm(f^{-1}) \;=\; Dm(f).}$

Selve betegnelsen f^{-1} er vel ikke den mest heldige, idet den måske kan forlede nogen til at tro, at -1 i f^{-1} har samme betydning som i f.eks. 5^{-1}, hvilket på ingen måde er tilfældet.
Betegnelsen f^{-1} stammer fra en matematisk disciplin (teoretisk algebra), som vi ikke skal komme ind på hér. Det vigtige er imidlertid, at betegnelsen er knyttet til f, idet der er tale om den omvendte funktion til f, altså – som omtalt ovenfor – et relativt begreb til en allerede given størrelse/funktion. (Man kunne i princippet have betegnet funktionen med $[f]$, $\langle f \rangle$, $\overleftrightarrow{f}$ eller andet, der indeholder f, men valget er altså af forskellige årsager faldet på betegnelsen: f^{-1}).

Eksempel A.3.3.

a) Vi vil finde den omvendte funktion til f(x) = 2x – 6. Dette er muligt, idet f er voksende og dermed injektiv. Ifølge definition A.3.2 har vi:

$$f^{-1}(y) = x \;\Leftrightarrow\; y = f(x) \;\Leftrightarrow\; y = 2x - 6 \;\Leftrightarrow\; y + 6 \;=\; 2x \;\Leftrightarrow\; x = \tfrac{1}{2}y + 3$$

dvs. $f^{-1}(y) = \tfrac{1}{2}y + 3$.

Som bekendt kan vi navngive de variable, som vi vil. Ofte vil ”man” gerne have x til at betegne den uafhængige variable. Hvis vi gør det, er forskriften for den omvendte funktion givet ved:

$$f^{-1}(x) = \tfrac{1}{2}x + 3.$$

b) Funktionen $f(x) = x^2$, $x \ge 0$, er voksende og dermed injektiv. (Bemærk, at forudsætningen $x \ge 0$ ikke kan undværes. (Hvorfor ikke ?)). Vi vil finde dens omvendte funktion: For $x \ge 0$ har vi:

$$f^{-1}(y) = x \;\Leftrightarrow\; y = f(x) \;\Leftrightarrow\; y = x^2 \;\Leftrightarrow\; x = \sqrt{y} \quad ,$$

altså: $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$ eller: $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ ♥

Eksempel A.3.4.

Den omvendte funktion til $g(x) = \dfrac{1}{x+3}$, $x > -3$ findes på følgende måde: For $x > -3$ har vi:

$$g^{-1}(y) = x \;\Leftrightarrow\; y = g(x) \;\Leftrightarrow\; y = \frac{1}{x+3} \;\Leftrightarrow\; y\cdot(x+3) \;=\; 1 \;\Leftrightarrow\; x\cdot y \;=\; 1 - 3y \;\Leftrightarrow\; x = \frac{1-3y}{y}$$

dvs. $g^{-1}(y) = \dfrac{1-3y}{y}$

For at finde $Dm(g^{-1})$ bemærker vi først, at: $x > -3 \;\Leftrightarrow\; x + 3 > 0 \;\Leftrightarrow\; \dfrac{1}{x+3} > 0 \;\Leftrightarrow\; y > 0$

Dernæst bemærkes, at for <u>enhver</u> værdi af $y > 0$ har ligningen: $y = g(x)$, dvs. $y = \dfrac{1}{x+3}$, en løsning, nemlig (som vi lige har set): $x = \dfrac{1-3y}{y}$. Vi ser således, at $Vm(g) = R_+$ og dermed, at $Dm(g^{-1}) = R_+$ Der gælder altså: $g^{-1}(y) = \dfrac{1-3y}{y}$, $y \in R_+$ ♥

Øvelse A.3.5.
Find en funktionsforskrift for den omvendte funktion i hvert af følgende tilfælde:

a) $g(q) = -2q - 1$ b) $h(t) = \sqrt{t^2 + 2}\ ,\ t \geq 0$

c) $f(x) = \dfrac{x}{2x-3}\ ,\ x < \frac{3}{2}$ d) $\psi(\lambda) = \dfrac{1}{\lambda^2 + 3}\ ,\ \lambda \geq 0$ ♥

Øvelse A.3.6.
Elværket Strømsvigt A/S opkræver af deres privatkunder en kvartalsafgift på 200 kr. plus 1,2 kr. pr. kWh (en energienhed), som kunderne forbruger.

a) Opstil en forskrift for den funktion, der for en privatkunde angiver elomkostninger pr. kvartal som funktion af kundens energiforbrug.
b) Bestem det forbrug, som resulterer i en regning på 1500 kr. – og forklar, hvad dette har med omvendte funktioner at gøre.
c) Bestem en forskrift, inkl. definitionsmængde, for den omvendte funktion.
d) Løs pkt. b) igen – v.hj.a. forskriften for den omvendte funktion. ♥

I forlængelse af eksempel A.3.3 a), Øvelse A.3.5 a) og øvelse A.3.6 anføres følgende sætning:

Sætning A.3.7.
Lad $f(x) = ax + b$ være en lineær funktion, hvor $a \neq 0$. Da er f injektiv, og

$$f^{-1}(y) = \frac{1}{a} \cdot y - \frac{b}{a} \quad , \quad y \in \mathrm{Vm}(f)$$

dvs. f^{-1} er en lineær funktion med hældningskoefficient $\frac{1}{a}$.

Bevis:
At f er injektiv er allerede klargjort, idet f er monoton, når $a \neq 0$. Desuden har vi, at

$$f^{-1}(y) = x \iff y = f(x) \iff y = ax + b \iff y - b = ax \iff x = \frac{1}{a} \cdot y - \frac{b}{a}$$

hvoraf vi ser, at: $f^{-1}(y) = \dfrac{1}{a} \cdot y - \dfrac{b}{a}$. Hermed er sætningen bevist. ♥

Øvelse A.3.8.
I visse dele af verden (f.eks. i USA) angives temperaturer i ^{o}F (grader Fahrenheit), og i andre dele af verden (f.eks. i Danmark) angives temperaturer i ^{o}C (grader Celcius).
Temperaturen målt i ^{o}F er en funktion f af temperaturen x målt i ^{o}C, idet der gælder: $f(x) = \frac{9}{5}x + 32$.

a) Find en forskrift for den omvendte funktion, og udtryk i ord, hvad den beskriver.
b) Hvilken temperatur i ^{o}C svarer til temperaturen 451 ^{o}F ? ♥

Øvelse A.3.9.
Tegn i hvert af følgende tilfælde grafen for funktionen f og dens omvendte funktion f^{-1} i samme koordinatsystem, idet den variable for både f og f^{-1} betegnes x og afsættes ud af 1.aksen: f fra

a) øvelse A.3.8 b) øvelse A.3.6 c) eksempel A.3.3 a) d) eksempel A.3.3 b). ♥

Som det fremgår af øvelse A.3.9, er der en speciel sammenhæng mellem grafen for f og grafen for f^{-1}, når de tegnes i samme koordinatsystem, nemlig følgende sætning (hvis bevis udelades hér):

Sætning A.3.10.

Lad f være en injektiv funktion.
Hvis vi anvender et koordinatsystem med samme enhed på 1. og 2. aksen, så gælder, at:

grafen for f^{-1} fås ved at spejle grafen for f i linien y = x.

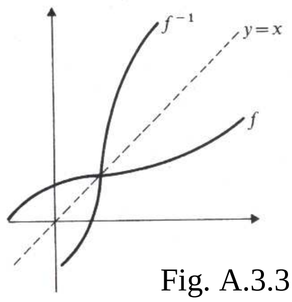


Fig. A.3.3

Som det fremgår af definition A.3.2 og figur A.3.2 gælder der følgende sætning (overvej !):

Sætning A.3.11.
Lad f være en injektiv funktion. Da gælder, at

$$f^{-1}(f(x)) = x \quad \text{for alle } x \in \text{Dm}(f) \qquad \text{og} \qquad f(f^{-1}(y)) = y \quad \text{for alle } y \in \text{Vm}(f)$$

hvilket også kan formuleres således:

$$(f^{-1} \circ f)(x) = x \quad \text{for alle } x \in \text{Dm}(f) \qquad \text{og} \qquad (f \circ f^{-1})(y) = y \quad \text{for alle } y \in \text{Vm}(f)$$

Funktionerne f og f^{-1} er altså hinandens omvendte funktioner (overvej !).

I forbindelse med monotoni gælder følgende sætning:

Sætning A.3.12.
Lad f være en given funktion.
1) Hvis f er voksende, så er f^{-1} også voksende
2) Hvis f er aftagende, så er f^{-1} også aftagende.

Bevis:
Vi beviser pkt. 1). Pkt. 2) vises på samme måde og overlades til læseren som en øvelse.
Lad da y_1 , $y_2 \in$ Vm(f) være vilkårligt valgt, så $y_1 < y_2$. Vi skal da vise, at $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$.
Dette gør vi ved et såkaldt indirekte bevis. Vi antager altså, at $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$ ikke gælder, og vil så argumentere for, at dette fører til en modstrid.
Vi antager derfor, at $f^{-1}(y_1) \geq f^{-1}(y_2)$. Da f er voksende får vi hermed at $f(f^{-1}(y_1)) \geq f(f^{-1}(y_2))$, dvs. $y_1 \geq y_2$. Men dette er i strid med, at vi ved, at $y_1 < y_2$.
Antagelsen $f^{-1}(y_1) \geq f^{-1}(y_2)$ er altså ikke holdbar, hvormed vi får det ønskede: $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$.
Hermed er sætningen bevist. ♥

Læseren opfordres til at efterprøve/kontrollere denne sætnings indhold ud fra de eksempler på omvendte funktioner, som har været omtalt i eksempler og øvelser i det ovenstående.

Appendix 4: Spejling i linien med ligningen y = x

Punktet P med koordinaterne (x,y) føres ved en spejling i linien med ligningen y = x over i et punkt Q, hvis koordinater vi vil finde.

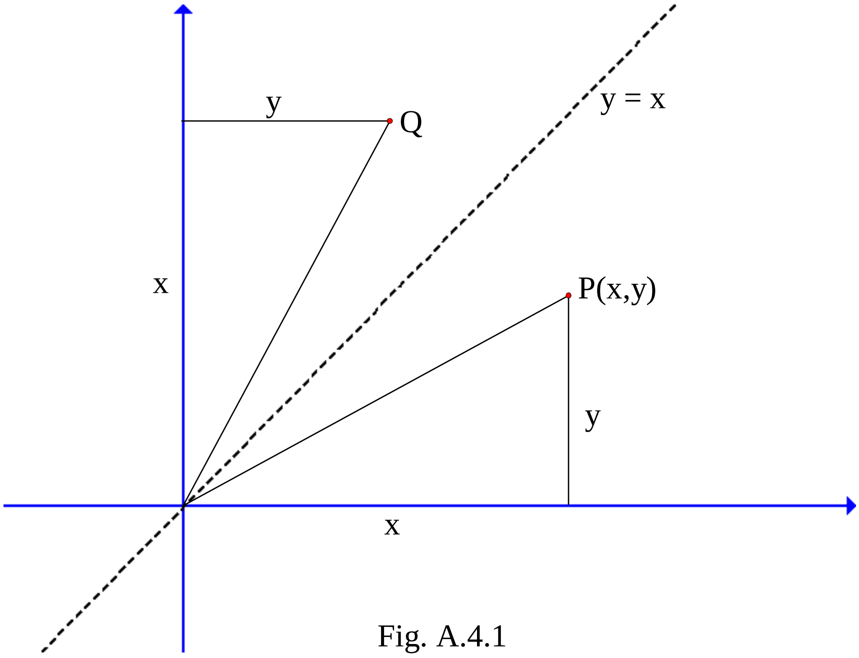


Fig. A.4.1

Ved at projicere P ned på 1.aksen samt forbinde P med (0,0) fremkommer en retvinklet trekant. Ved spejling i linien y = x føres denne trekant over i en anden retvinklet trekant som vist på figuren. Da de to trekanter er kongruente, er kateterne i dem begge lig med hhv. x og y. Vi ser heraf, at punktet Q har koordinaterne (y,x).

Dette argument kan gentages uanset placeringen af punktet P = (x,y).
Hvis x eller y er negative, fås retvinklede trekanter, hvor længderne af kateterne er $|x|$ eller $|y|$, hvormed koordinaterne til spejlbilledet Q igen bliver (y,x). Detaljerne i argumentet – herunder at tegne figurer, der viser situationen – overlades til læseren som en øvelse.

Vi ser dermed at der gælder følgende:

Ved en spejling i linien y = x føres punktet (x,y) over i punktet (y,x), dvs. punkterne bytter koordinater.

Appendix 5: Afstanden mellem to punkter i et koordinatsystem.

Sætning A.5.1.
Afstanden $|AB|$ mellem to punkter A og B med koordinaterne $A = (x_1, y_1)$ og $B = (x_2, y_2)$ er givet ved: $|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

Bevis:
Antag først, at koordinaterne for A og B opfylder, at $x_1 \neq x_2$ og $y_1 \neq y_2$, dvs. at A og B ligger på en linie, som hverken er vandret eller lodret (som vist på figur A.5.1):

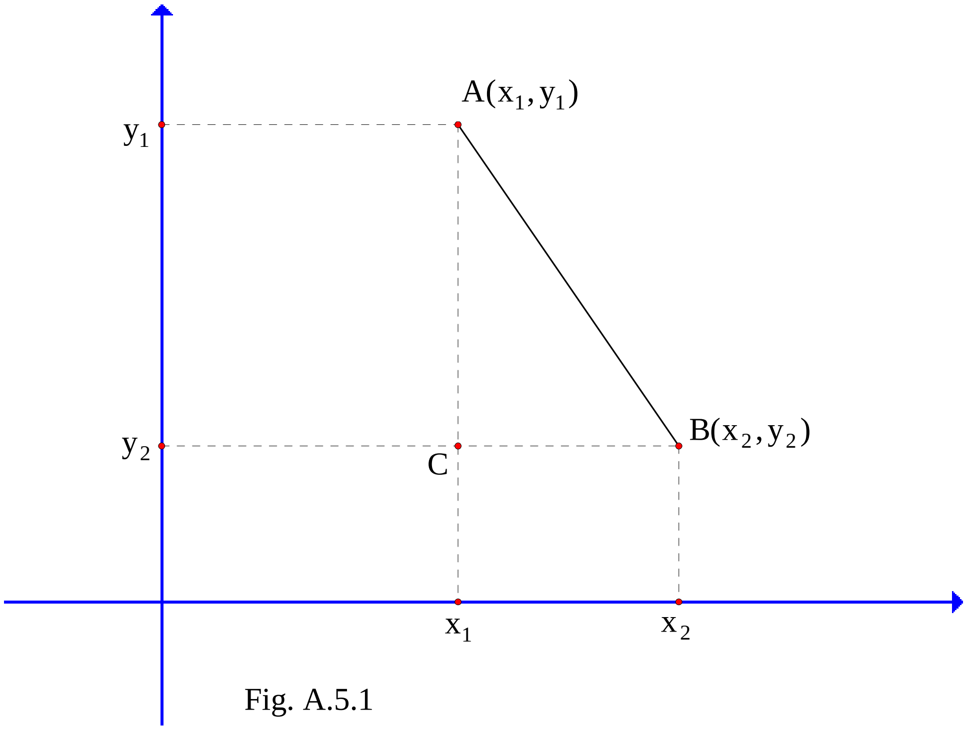


Fig. A.5.1

Punktet C dannes som vist på figuren, hvorved der fremkommer en retvinklet trekant ABC. Kateterne $|AC|$ og $|BC|$ givet ved: $|AC| = |y_2 - y_1|$ og $|BC| = |x_2 - x_1|$ (idet afstanden mellem to tal a og b på en tallinie er givet ved: $|a - b|$).
Ifølge Pythagoras får vi nu:

$$|AB|^2 = |AC|^2 + |BC|^2 = |y_2 - y_1|^2 + |x_2 - x_1|^2 = (y_2 - y_1)^2 + (x_2 - x_1)^2$$

hvor vi i den sidste omskrivning har brugt, at der for et vilkårligt tal q gælder, at: $|q|^2 = q^2$
Ved at tage kvadratroden på begge sider af lighedstegnet får vi herefter den ønskede formel.

Hvis $x_1 = x_2$ og $y_1 \neq y_2$ får vi (overvej – tegn en figur, der viser situationen), at:

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(y_2 - y_1)^2} = |y_2 - y_1| = |AB|$$

hvor vi har anvendt, at der for et vilkårligt tal q gælder, at $\sqrt{q^2} = |q|$, hvormed formlen også gælder i denne situation. Og tilsvarende hvis $x_1 \neq x_2$ og $y_1 = y_2$. Hermed er sætningen bevist. ♥

Appendix 6: Additionsformel bevist v.hj.a. vektorer.

Dette appendix kræver kendskab til vektorer. Der gives her et noget "hurtigere" bevis for additionsformlen for cos(u-v) end beviset i øvelse 2.31.

Vi ser på vektorer i et koordinatsystem med basisvektorerne $\vec{i}$ og $\vec{j}$.

Definition A.6.1.
Ved retningsvinklen for en egentlig vektor $\vec{a}$ forstås vinklen fra første basisvektor $\vec{i}$ til $\vec{a}$.

Hvis $\vec{a}$'s retningsvinkel betegnes v, ses det (tegn en figur og overvej !), at enhedsvektoren i $\vec{a}$'s retning er givet ved: $\vec{e}_a = \begin{pmatrix} \cos v \\ \sin v \end{pmatrix}$, hvormed vi får, at der gælder følgende sætning:

Sætning A.6.2.
Hvis $\vec{a}$ er en egentlig vektor, og v er en vilkårlig vinkel, så gælder der følgende:

$$\text{v er retningsvinkel for } \vec{a}$$

$$\Leftrightarrow \quad \vec{a} = |\vec{a}| \cdot \begin{pmatrix} \cos v \\ \sin v \end{pmatrix}$$

Sætning A.6.3.
Hvis $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er egentlige vektorer med retningsvinklerne v_a og v_b , så betegnes vinklen fra $\vec{a}$ til $\vec{b}$ ved: $\angle(\vec{a}, \vec{b})$. Der gælder da, at: $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = v_b - v_a$

Beviset overlades til læseren.

Sætning A.6.4.
Hvis u og v er givne tal, så er cos(u – v) = cosu·cosv + sinu·sinv

Bevis: Lad $\vec{e}_u$ og $\vec{e}_v$ være enhedsvektorer med retningsvinklerne u og v. Da er $\vec{e}_u = \begin{pmatrix} \cos u \\ \sin u \end{pmatrix}$ og $\vec{e}_v = \begin{pmatrix} \cos v \\ \sin v \end{pmatrix}$. Ifølge sætning A.6.3 er $\angle(\vec{e}_v, \vec{e}_u) = u - v$, hvormed vinklen mellem $\vec{e}_u$ og $\vec{e}_v$ er lig med u – v eller v – u. Da der gælder, at cos(–x) = cos(x), ser vi altså, at cos(u – v) = cos(v – u). Desuden ved vi, at hvis w er vinklen mellem to egentlige vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$, så er $\cos(w) = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$.

Hvis vi kombinerer disse informationer, får vi:

$$\cos(u - v) = \frac{\vec{e}_v \cdot \vec{e}_u}{|\vec{e}_v||\vec{e}_u|} = \vec{e}_v \cdot \vec{e}_u = \cos v \cdot \cos u + \sin v \cdot \sin u = \cos u \cdot \cos v + \sin u \cdot \sin v$$

hvormed det ønskede er bevist. ♥

Opgavesamling

(Bemærk, at der er en modelopgavesamling på side 101, hvor opgaverne også nogenlunde er anbragt i fagkronologisk rækkefølge).

Kapitel 1.

1.1. I en retvinklet trekant ΔABC, hvor $\angle C = 90^o$, er $|AB| = 7{,}5$ og $|AC| = 3{,}2$
Bestem de ukendte vinkler og sider i trekanten.

1.2. I en retvinklet trekant ΔSTU, hvor $\angle U = 90^o$, er t = 14 og s = 5.
Bestem de ukendte vinkler og sider i trekanten.

1.3. I en retvinklet trekant ΔABC, hvor $\angle C = 90^o$, er $\angle A = 37{,}9^o$ og $|AC| = 411$
Bestem de ukendte vinkler og sider i trekanten.

1.4. I en retvinklet trekant ΔPQR, hvor $\angle Q = 90^o$, er q = 14,6 og $\angle P = 32{,}4^o$.
Bestem de ukendte vinkler og sider i trekanten.

1.5. En trekant afgrænses af de to koordinatakser samt linien med ligningen $5x + 3y = 12$.
Tegn en skitse, der viser trekanten og bestem alle vinkler og sidelængder i trekanten.

1.6. En trekant afgrænses af linierne med ligningerne:

$$x + 3y = 6 \;, \quad -3x + y = -2 \quad \text{og} \quad -x + 3y = -4$$

a) Tegn trekanten i et koordinatsystem.
b) Beregn længderne af siderne (se Appendix 5) og argumentér for, at det er en retvinklet trekant.
c) Beregn størrelserne af vinklerne i trekanten.

1.7. Vis, at hvis en ret linie i et koordinatsystem danner vinklen v med førsteaksen, så er liniens hældningskoefficient lig med tan(v).

1.8. I en firkant PQRS, er $\angle SPQ = \angle PQR = 90^o$ og $\angle RSP$ er stump (dvs. over 90^o).
Desuden vides, at $|PQ| = 12$, $|QR| = 17$ og $|RS| = 15$.
a) Tegn en model af firkanten
(dvs. en figur (skitse), der viser den givne firkant med rimelige indbyrdes størrelsesforhold).
b) Bestem vinklerne mellem de to diagonaler PR og QS.

1.9. I en trekant ΔABC er $|AB| = 7{,}5$, $|AC| = 3{,}2$ og $|BC| = 6{,}9$
Bestem størrelserne af vinklerne i trekanten.

1.10. I et koordinatsystem har vi en trekant, hvis hjørner A, B og C har koordinaterne:

$A = (8,1)$, $B = (1, -3)$ og $C = (3,20)$

Beregn alle trekantens sidelængder og vinkelstørrelser. (Se evt. Appendix 5).

1.11. Om trekant ABC vides, at siden b er 1,7 gange så lang som a, og at siden c er 2,6 gange så lang som a. Bestem trekantens vinkler.

1.12. En trekant kaldes <u>ligebenet</u>, hvis to af siderne er lige lange, medens den tredje side har en anden længde. Den tredje sides kaldes da ofte for grundlinien i den ligebenede trekant.

a) Tegn en skitse af en ligebenet trekant og vis, at vinklerne ved grundlinien er lige store.

b) Vis v.hj.a. sinusrelationerne, at hvis to af vinklerne i en trekant er lige store, så er trekanten ligebenet.

1.13. Find alle sider og alle vinkler, samt trekanternes areal i hvert af nedenstående tilfælde, hvor det om ΔABC er givet:

a) $\angle C = 90^o$, $\angle A = 22^o$ og $|AB| = 5$

b) $\angle A = \angle B = 38^o$ og $|AB| = 8$

c) ΔABC er ligesidet (dvs. alle tre sider er lige lange), og en af højderne har længden 23.

d) $\angle C = 90^o$, $|AC| = 2$ og $|CB| = 5$

e) $\angle B = 38^o$ og $|AB| = |BC| = 4$

1.14. Find alle sider og alle vinkler, samt trekantens areal, i hvert af nedenstående tilfælde, hvor det om ΔPQR er givet:

a) $\angle P = 93^o$, $\angle Q = 44^o$ og $q = 12$

b) $\angle P = 17^o$, $p = 13$ og $q = 10$

c) $\angle P = 33{,}6^o$, $q = 7{,}4$ og $r = 8{,}6$

1.15. Argumentér for, at der ikke findes en trekant ΔPQR, hvor $\angle Q = 48{,}3^o$, $q = 14{,}6$ og $p = 32{,}4$.

1.16. Undersøg i hvert af følgende tilfælde, om trekant ΔABC eksisterer, og hvis den gør, så bestem de ukendte vinkler og sider, samt trekantens areal.

(Hvis der er mere end én løsning, så bestemmes sider, vinkler og areal i alle løsningerne):

a) $\angle B = 23{,}4^o$, $|BA| = 8{,}5$ og $|AC| = 7{,}3$

b) $\angle A = 50^o$, $a = 7{,}4$ og $b = 10$

c) $\angle C = 82^o$, $|BA| = 12$ og $|BC| = 1$

1.17. I trekant PQR er $\angle P = 121^o$, $|PQ| = 20$ og $|PR| = 35$

a) Bestem højden h_q (dvs. højden fra Q og ned på siden q eller dennes forlængelse).

b) Bestem arealet af trekanten.

1.18. I trekant ABC er $|BC| = 53$, $\angle C = 42^o$ og $\angle B = 31^o$.
Bestem højden h_a (dvs. højden fra A på siden BC).

1.19. I trekant PQR er $\angle P = 90^o$, $q = 23$ og $v_R = 34$
($v_R = 34$ betyder, at vinkelhalveringslinien for vinkel R har længden 34).
Bestem de ukendte sider og vinkler i trekanten.

1.20. I trekant PQR er $q = 16$, $r = 7$ og $m_q = 6$.
($m_q = 6$ betyder, at medianen – dvs. linien fra Q til midtpunktet af q – har længden 6)
Bestem trekantens vinkler og længden af siden QR.

1.21. I en trekant PQR er $\angle P = 50^o$, $r = 23$ og vinkelhalveringslinien v_P for vinkel P har længden 19.
Tegn en model af trekanten og bestem størrelsen af $\angle Q$ og $\angle R$.

1.22. I trekant PQR er $p = 7{,}2$, $q = 10{,}6$ og $r = 14{,}9$.
Bestem længden af medianen m_q (dvs. linien fra Q til midtpunktet af siden q)

1.23. Om trekant ABC vides, at siden b er 1,3 gange så lang som a, og at siden c er 2,1 gange så lang som a.
Desuden vides, at h_a (dvs. højden fra A på siden a eller dennes forlængelse) har længden 7,2.
Bestem længderne af trekantens sider.

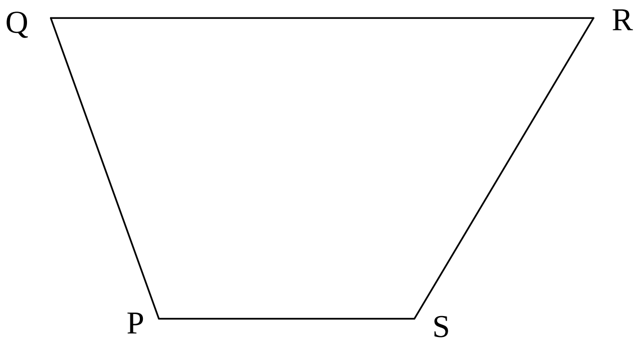
1.24. Om trekant PQR oplyses, at:

- $h_q = 105$ (dvs. højden fra Q til siden PR har længden 105), og at højdens fodpunkt (dvs. der hvor højden rammer siden PR) kaldes S
- $m_q = 117$ (dvs. medianen fra Q til midtpunktet af siden PR har længden 117), og at midtpunktet kaldes T
- $\angle P = 40{,}6^o$

a) Argumentér for, at der er to mulige trekanter, der opfylder det givne. (Tegn en skitse !)
b) Bestem alle sider og vinkler i den trekant, hvor $\angle QTP$ er stump (dvs. over 90^o).

1.25. I en trekant ABC er $a = 16{,}7$, $b = 19{,}8$ og $c = 14{,}6$.
Beregn længden af medianen m_b og længden af vinkelhalveringslinjen v_B .

1.26. Et trapez er en firkant, hvor to af siderne er parallelle. I trapezet PQRS (se figuren øverst på næste side) er $\angle P = 110^o$, $|PQ| = 10$, $|PS| = 8$ og $|QR| = 17$.



Diagonalerne QS og PR skærer hinanden i et punkt T.
Bestem $|QT|$.

Kapitel 2

2.1. Tegn graferne for følgende funktioner (v.hj.a. et graftegningsprogram):
a) $2{,}1\cos(2x)$ b) $-\frac{5}{2}\sin(0{,}2x)$ c) $0{,}4\cos(5x)$ d) $-2\sin(5\pi x)$
Kommentér resultaterne – og angiv perioden for hver af funktionerne.

Tegn herefter (v.hj.a. graftegningsprogrammet) graferne for følgende funktioner i samme koordinatsystem som den tilsvarende funktion ovenfor (altså a) og a1) i samme koordinatsystem, osv.):
a1) $2{,}1\cos(2x-2)$ b1) $-\frac{5}{2}\sin(0{,}2x+1)$ c1) $0{,}4\cos(5x-20)$ d1) $-2\sin(5\pi x+4\pi)$
Kommentér resultaterne.

2.2. Gør rede for, at grafen for funktionen g(x) = $-3\sin(3x-6)+3$ kan fremkomme ud fra grafen for f(x) = sin(x) på følgende måde:
1) Først udsættes grafen for f for en ret affinitet i 2.aksen med forvandlingstallet $\frac{1}{3}$.
   Angiv forskriften for den funktion, der fremkommer herved.
2) Grafen for den nye funktion fra pkt. 1 udsættes for en parallelforskydning (2,0) – dvs. 2 i 1.aksens retning. Angiv forskriften for den funktion, der fremkommer herved.
3) Grafen for den nye funktion i pkt. 2 udsættes for en ret affinitet i 1.aksen med forvandlingstallet – 3. Angiv forskriften for den funktion, der fremkommer herved.
4) Grafen for den nye funktion fra pkt. 3 udsættes for en parallelforskydning (0,3) – dvs. 3 i 2.aksens retning. Angiv forskriften for den funktion, der fremkommer herved. Det skulle gerne være g(x).

Lav v.hj.a. et graftegningsprogram en lille tegneserie (gerne i farver), som viser de 4 skridt i processen, og som derfor slutter med grafen for g.

2.3. a) Hvordan fremkommer grafen for funktionen h(x) = $3\sin(4x-8)+1$ ud fra grafen for f(x) = sin(x) ? Tegn grafen for h.
b) Hvordan fremkommer grafen for funktionen $j(x) = -\frac{1}{2}\cos(3x+6)-1$ ud fra grafen for f(x) = cos(x) ? Tegn grafen for j.

2.4. Løs følgende ligninger v.hj.a. tabellen i øvelse 2.8:

a) $\cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ b) $\cos x = \frac{1}{2}$ c) $\sin x = -\frac{1}{2}$ d) $\cos(x) = 0$

e) $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $x \in [0;4\pi]$ f) $\sin(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $x \in [-\pi;\pi]$

2.5. Løs følgende ligninger v.hj.a. tabellen i øvelse 2.16:

a) $\tan x = -1$ b) $\tan(x) = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $x \in [-\pi;2\pi]$ c) $\tan x = \sqrt{3}$, $x \in [0;4\pi]$

2.6. Løs ligningerne:

a) $\sin(x) = -0{,}734$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ b) $\cos(x) = 2{,}36$ c) $\cos(x) = 0{,}44$

2.7. Løs ligningerne:
a) $\tan x = -3{,}23$ b) $\tan(x) = 0{,}134$ c) $\tan(x) = 200$, $x \in [-2\pi;2\pi]$

2.8. Løs ligningerne:
a) $\sin 3x = -0{,}245$, $x \in [0;\pi]$ b) $\sin(0{,}5x) = 0{,}123$, $x \in [0;8\pi]$
c) $\cos 4x = -0{,}777$, $x \in [0;\pi]$ d) $\cos(\frac{1}{3}x) = 0{,}785$, $x \in [0;6\pi]$
e) $\tan 2x = -3{,}145$, $x \in [0;\pi]$ f) $\tan(x-\pi) = 15$, $x \in [0;\pi]$

2.9. Løs ligningerne: a) $\sin(2-0{,}4x)$, $x \in [-8;8]$ b) $\tan(1{,}2x+2{,}4)$, $x \in [-4;7]$

2.10. En funktion f er givet ved: $f(x) = 2\cos(2x)$, $x \in [0;\pi]$
Løs ligningen: $f(x) = \sqrt{3}$

2.11. a) Find de reelle tal $x \in [0;\pi]$ som er løsninger til ligningen: $2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$
b) Find de reelle tal $x \in [-\pi;\pi]$ som er løsninger til ligningen: $2\sin^2 x - 0{,}5\sin x - 1 = 0$

2.12. Løs følgende uligheder:
a) $\sin x \le \frac{1}{2}$
b) $-\frac{1}{2} < \cos x < 0$, $x \in [-\pi;\pi]$
c) $\sin x \ge 0{,}23$, $x \in [0;2\pi]$
d) $\tan(x) < 0{,}163$, $x \in]-\pi;\pi[$

2.13. Løs følgende uligheder:

a) $\tan(3x) \geq \frac{1}{2}$, $x \in [0;\pi]$

b) $\cos(4-5x) < -0{,}12$, $x \in [-1;3]$

c) $\sin(\frac{1}{2}x - \pi) = 0{,}2317$, $x \in [0;2\pi]$

d) $1 < 5\sin(2{,}6x-4) < 3$, $x \in [0;4{,}3]$

2.14. Løs uligheden: $\cos^2 x \geq 0{,}6$, $x \in [0;2\pi]$

2.15. Omskriv/Reducér/Simplificér følgende udtryk:

a) $3\cos^2 x - \cos(2x) + \sin^2 x$

b) $2\cos(2x) - \sin^2(2x) + 2$

c) $6\sin x \cdot \cos y - 3\sin(x-y)$

2.16. Vis at: $\sin x - \cos x = \sqrt{2} \cdot \sin(x - \dfrac{\pi}{4})$

Skitsér grafen for $g(x) = \sin x - \cos x$

2.17. Omskriv/Reducér/Simplificér følgende udtryk:

a) $\frac{1}{2}\tan x \cdot \sin(2x) + \cos^2 x$

b) $(\frac{1}{2}\tan(2x) - \cos^2 x) \cdot (1 - \tan^4 x)$

2.18. Skitsér grafen for funktionen: $f(x) = x^2 - 9\sin x$, $x \in [-5;5]$

2.19. Skitsér grafen for funktionen: $h(x) = \tan x - 3x^2$, $x \in [-1;\frac{3}{2}]$

Kapitel 3.

3.1. Find differentialkvotienterne af følgende funktioner:

a) $f(x) = \cos^3(-4x)$ b) $g(x) = x^4\cos(x^4)$ c) $h(x) = \dfrac{\cos x \cdot \sin x}{3\cos x + 4}$

3.2. En funktion g er givet ved: $g(x) = 2\sin x + 3\cos x$. Løs ligningen: $g'(x) = 0$.

3.3. Find $f'(\frac{\pi}{4})$, $f'(\frac{\pi}{6})$ og $f'(2)$ for funktionen: $f(x) = 5\cos x + \sin^2 x$

3.4. Angiv det approximerende førstegradspolynomium i tallet $\frac{\pi}{3}$ for funktionen

$g(x) = \cos^2(2x) + \frac{1}{2}x$

3.5. Argumentér for, at $\sin x \approx x$ når $x \approx 0$. Giv en geometrisk fortolkning af dette.

3.6. I øvelse 2.17 omtales funktionen cot(x). Vis at $\cot'(x) = -1-\cot^2 x = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$

3.7. Find differentialkvotienten af følgende funktioner:

a) $f(x) = \frac{1}{3}\tan^3 x - \tan x$ b) $g(x) = \sin 2x \cdot \tan x$ c) $h(x) = \dfrac{2\tan x + \sin x}{\cos x}$

3.8. Bestem en ligning for tangenten til grafen for funktionen f i punktet (2, f(2)), idet

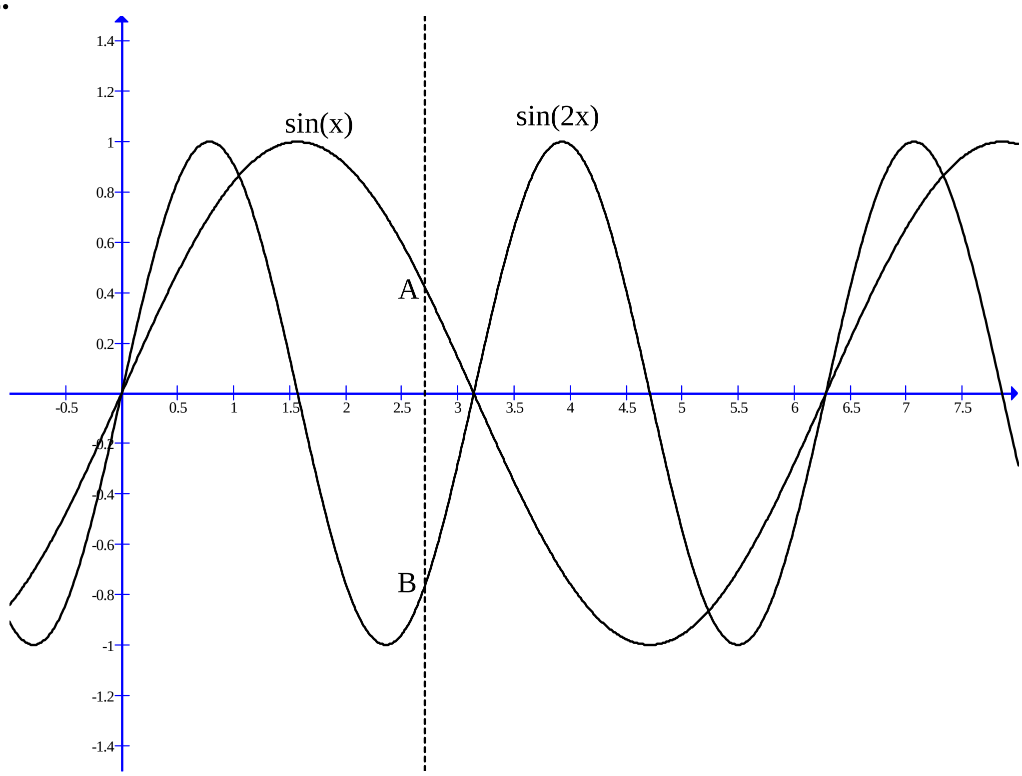
a) $f(x) = x^2 \cdot \tan x$ b) $f(x) = 2^x \cdot \tan x$ c) $f(x) = \dfrac{\tan x}{\sin x + 5}$

3.9. Argumentér for, at $\tan x \approx x$ når $x \approx 0$. Giv en geometrisk forklaring af dette.

3.10. Argumentér for, at funktionen: $f(x) = -3x + 2\cos(x)$ er monoton.
Argumentér for, at ligningen $f(x) = a$ har netop én løsning for alle $a \in R$
Bestem løsningen til ligningen: $f(x) = 8$ (anvend et passende elektronisk hjælpemiddel).

3.11. Løs ligningen $g'(x) = 0$ og bestem værdimængden for g, idet g er givet ved:
a) $g(x) = 3x - 5\cos x \quad , x \in [0;2\pi]$ b) $g(x) = 24x - 3\tan x \quad , x \in [0;2\pi] \setminus \{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\}$

3.12.



På figuren ses graferne for funktionerne $\sin x$ og $\sin 2x$. En vilkårlig linie parallel med 2.aksen skærer grafen for $\sin x$ i et punkt A og grafen for $\sin 2x$ i et punkt B.
Find ud af, hvor denne linie skal tegnes, for at $|AB|$ bliver maksimal.

Angiv den maksimale værdi af $|AB|$.

3.13. Bestem størsteværdi, mindsteværdi, monotoniforhold og værdimængde for hver af funktionerne:
a) $f(x) = \cos(2x) + \sin(2x) \quad , \quad x \in [-\pi;\pi]$
b) $g(x) = 2\cos x + 3\sin x \quad , \quad x \in [0;2\pi]$

3.14. Bestem monotoniforhold og maximum for funktionen:

$$f(x) = 4\cos\left(\frac{3x+\pi}{2}\right) + 1{,}6 \quad , \quad x \in [0;2\pi]$$

Skitsér grafen for funktionen.
Bestem en ligning for tangenten i punktet $(\frac{\pi}{2}, f(\frac{\pi}{2}))$

3.15. Bestem monotoniforhold og lokale ekstrema for funktionen:

$$h(x) = 4\cos^2(x) \quad , \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{5\pi}{2}\right]$$

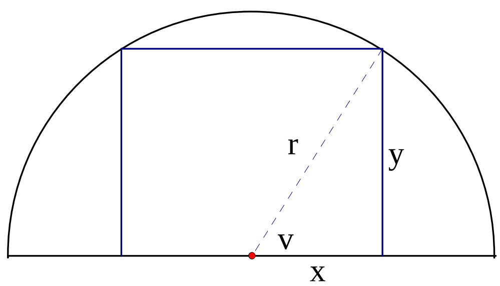
Skitsér grafen for funktionen.
Bestem en ligning for tangenten i punktet $(\frac{\pi}{4}, f(\frac{\pi}{4}))$

3.16. Bestem monotoniforhold og lokale ekstrema for funktionen:

$$h(x) = 3\cos^3(x) \quad , \quad x \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{5\pi}{2}\right[$$

Skitsér grafen for funktionen.
Bestem en ligning for tangenten i punktet $(\frac{\pi}{3}, f(\frac{\pi}{3}))$

3.17. I denne opgave vil vi se på et rektangel, der er indskrevet i en halvcirkel som vist på figuren:



r er cirklens radius, y er rektanglets højde, x er halvdelen af rektanglets bredde, og v er vinklen mellem radius op til det ene hjørne af rektanglet og rektanglets bundlinie (se figuren).

a) Udtryk x og y ved radius r og vinkel v
b) Bestem et udtryk for arealet af rektanglet som funktion af v.
c) Bestem den eksakte værdi af x og y i det indskrevne rektangel, der har størst areal.

3.18. Bestem efter samme principper som i opgave 3.17 længden af siderne i et rektangel, som indskrives i en cirkel med radius r.

Opgaver med stamfunktioner og integration:

3.19. Bestem til hver af de følgende funktioner en stamfunktion, hvis graf går igennem punktet: (1,9)
a) $f(x) = 4\cos x$ b) $f(x) = \tan^2 x$ c) $f(x) = 2\sin(5x-3)$

3.20. Bestem til hver af de følgende funktioner en stamfunktion, der har linien y = 2x + 5 som tangent. (Bemærk: Der er i hvert tilfælde mange løsninger. Bestem blot én af dem):
a) $f(x) = 4\cos x$ b) $f(x) = \tan^2 x$ c) $f(x) = 2\sin(5x-3)$

3.21. Udregn følgende ubestemte integraler:
a) $\int x \cdot \cos x dx$ b) $\int \frac{-4\cos t + 4\sin t}{\cos t + \sin t} dt$ c) $\int \cos^7(x) \cdot \sin x\, dx$
d) $\int x^2 \sin x dx$ e) $\int \cos(t) \cdot t^2\, dt$
(*Vejledning til d)og e):* Benyt delvis integration to gange efter hinanden)

3.22. Udregn følgende ubestemte integraler:
a) $\int \frac{1}{\text{cox}^2 x} dx$ b) $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx$ c) $\int \frac{x}{\cos^2 x} dx$

3.23. Beregn følgende bestemte integraler:
a) $\int_0^{\pi/3} (2\cos x - 3\sin x)\, dx$ b) $\int_{\pi/4}^{\pi} \sin(4x)\, dx$
c) $\int_{\pi/4}^{\pi} 2x\sin(4x)\, dx$ d) $\int_{\pi/4}^{\pi/2} x^2 \cos x\, dx$
e) $\int_0^{\pi/3} (\text{tg}x + \text{tg}^3 x)\, dx$ f) $\int_{\pi/4}^{\pi/2} 2\sin x\sqrt{1-\cos x}\, dx$
g) $\int_{\pi/3}^{2\pi/3} \text{tg}^3 x\, dx$ h) $\int_{\pi/4}^{\pi/2} x^2 \cos(x^3)\, dx$

3.24. På figuren i opgave 3.12 ses graferne for sin(x) og sin(2x).
Bestem arealet af den punktmængde, der i intervallet $[0;\pi]$ afgrænses af de to funktioners grafer.

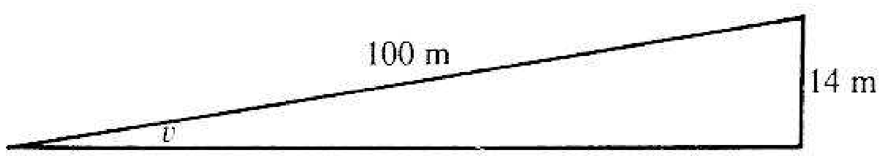
3.25. Tegn grafen for funktionen $f(x) = 3\sin x\sqrt{1-\cos x}$, $x \in [0;\pi]$
Bestem arealet af området mellem grafen og 1.aksen.

3.26. Tegn grafen for funktionen: $g(x) = 2\sin x + 3\cos x$, $x \in [0;2\pi]$
Bestem arealet af det område mellem grafen og 1.aksen, der ligger under 1.aksen.

Modelopgaver:

(Opgaverne er forsøgt anbragt i fagkronologisk rækkefølge).

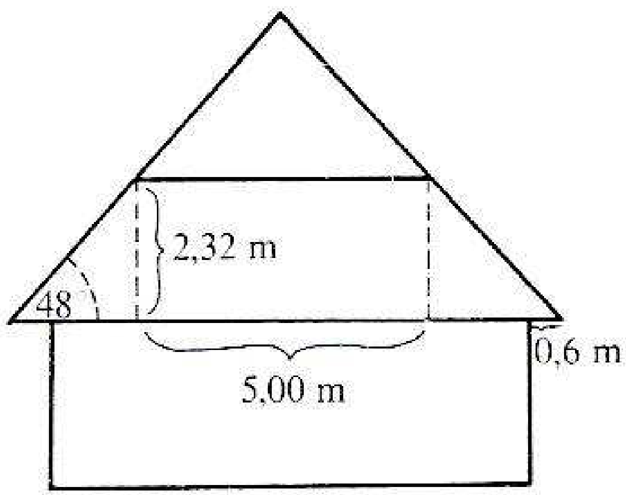
M.1: Som bilist mm. støder man ved visse stejle bakker på et advarselsskilt med angivelse af bakkens hældning. Ved en bestemt bakke står der, at bakkens hældning er 14 %, dvs. at bakken stiger 14 m pr. 100 m vejbane (se figuren):



Bestem bakkens hældningsvinkel v.

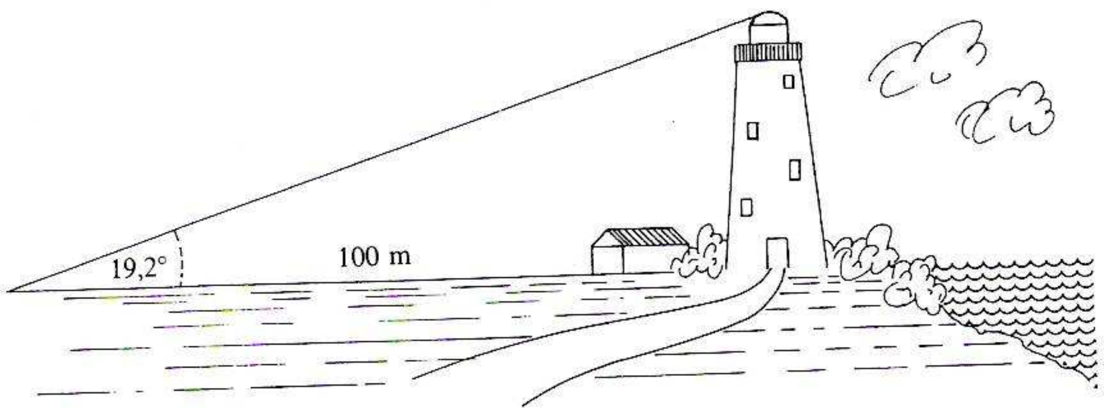
M.2: En arkitekt skal tegne et hus med beboelse under tagkonstruktionen (dvs. 1.sal under taget som antydet på figuren).
Da minimumshøjden i beboelsesrum skal være 2,32 m, ønsker arkitekten netop denne højde. Og p.gr.a. overvejelser om sne- og vindtryk skal tagets hældning være 48^o:

Hvor bredt skal huset være ved soklen, når der skal være 60 cm tagudhæng i begge sider, og når rummene på første sal skal være 5,00 m brede i fuld højde ?

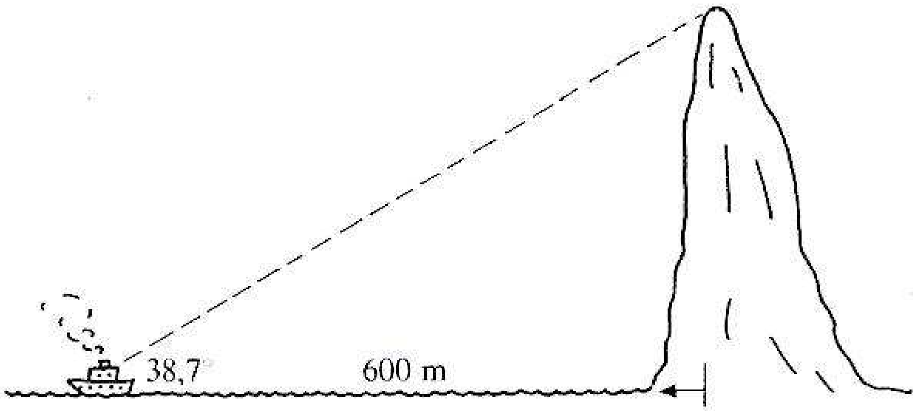


M.3: Beregning af højder:

a) Find højden af fyrtårnet, idet det oplyses, at sigtelinien til fyrtårnets top danner vinklen 19,2^o, når afstanden til fyret er 100 m. (Se figuren på næste side)



b) Højden af en klippeø ønskes målt. Dette foregår fra et skib, hvor synsvinklen i afstanden 600 m måles til 38,7^{o}.



Hvor høj er klippeøen ?

Problemet med højdemålingsmetoden i både opgave a) og b) er, at man skal kende afstanden fra observationspunktet og hen til fodpunktet for højden fra toppen af det man ønsker at måle højden af. Og denne afstand kan i praksis undertiden være vanskelig at finde.
Det, man så kan gøre i stedet for, er at anvende to observationspunkter, som – sammen med fundamentet af det man ønsker at bestemme højden af – ligger på en ret linie ! Man finder da dels afstanden mellem de to observationspunkter, dels de to forskellige synsvinkler (vinklen mellem vandret og sigtelinjen til objektets top) i de to observationspunkter. Og herefter beregnes højden af objektet f.eks. v.hj.a sinusrelationerne.

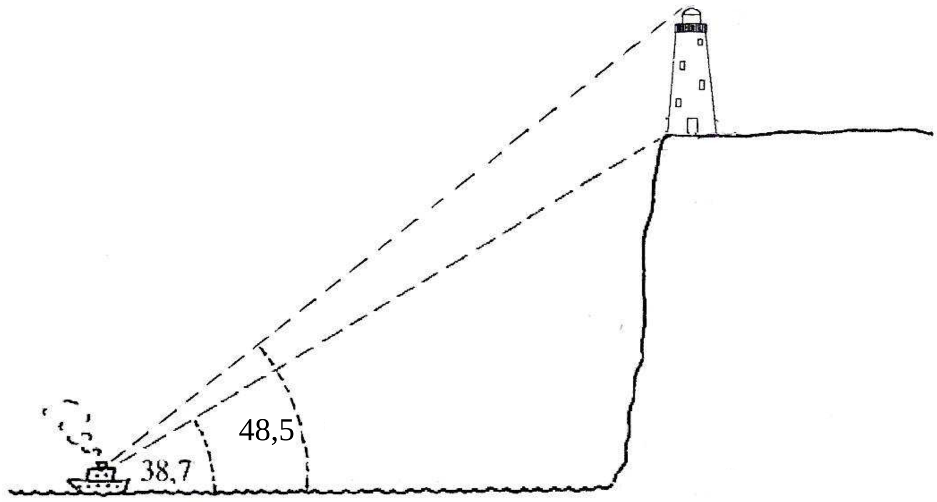
c) Lad os betragte problemstillingen med højden af fyrtårnet i opgave a), men nu <u>med nye data</u>.
Som vist på figuren måles vinklen mellem sigtelinien til fyrtårnets top og vandret til 19,2^{o} (men nu i en ny, ukendt afstand). Og ved at gå 70 m længere væk fra fyrtårnet findes, at sigtelinien nu danner en vinkel på 13,2^{o} med vandret.
Tegne en skitse af situationen – og beregn herefter højden af fyrtårnet.

d) Lad os herefter betragte måling af højden af klippeøen i opgave b), men nu <u>med nye data.</u>
Som vist på figuren måles synsvinklen til 38,7^{o} (men i en ny, ukendt afstand). Og ved at sejle 200 m længere væk fra klippeøen findes, at synsvinklen nu er 31,9^{o}.
Tegn en skitse af situationen – og beregn herefter højden af klippeøen.

e) En projektør lyser op på nogle relativt lavthængende skyer, hvorved der dannes en lysplet.
I en given position ved jordoverfladen måles vinklen mellem vandret og sigtelinjen til lyspletten på skyen til $33{,}7^o$. Ved at gå 120 m nærmere projektøren måles den tilsvarende vinklen til $36{,}8^o$.
Hvor højt oppe befinder skyen sig ?

En særlig variant af højdebestemmelse har vi eksempelvis ved ”Fyrtårn på klint”:

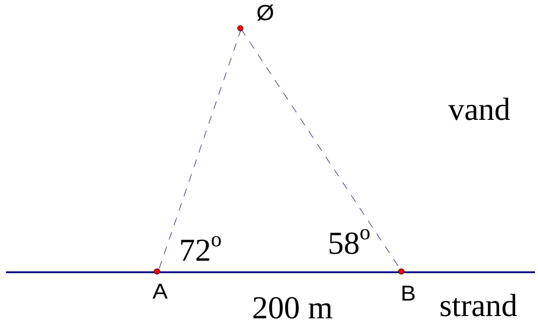
f) Fra et skib, som ligger i en ukendt afstand fra en klint, måles vinklen mellem vandret og sigtelinierne til fyrtårnets bund hhv. fyrtårnets top (se figuren). Resultatet bliver $38{,}7^o$ hhv. $48{,}5^o$.
Hvor høj er klinten, når det vides, at fyrtårnet er 26 m højt ?
(Vejledning: Antag, at fyrtårnets side ud mod havet er lodret – hvilket stort set er korrekt – og indtegn en retvinklet trekant, hvis hypotenuse er sigtelinien til fyrtårnets top)



M.4: Beregning af afstande.

<u>M.4.1)</u>
En sommerdag er to gymnasieelever taget til stranden, og med sig har de bl.a. et langt målebånd og en vinkelmåler til sigtelinier. De vil nemlig bestemme afstanden fra kysten og ud til en lille ø, inden de prøver at svømme derud.
De placerer to stokke i vandkanten i en afstand på 200 m fra hinanden. (De placeres i punkterne A og B på figuren). Ved måling i A af vinklen mellem sigtelinien til øen og sigtelinien til punktet B finder de vinklen 72^o. På samme måde findes i B vinklen 58^o.

a) Hvor langt er der fra A til øen ?
Hvor langt er der fra B til øen ?
b) Hvor langt er der fra kysten til øen ?
<u>Hvor</u> skal de starte med at svømme, for at turen bliver kortest mulig ?
c) Afstanden fra A til B kan måles temmelig nøjagtigt, hvorimod vinklerne kun kan måles med en nøjagtighed på $\pm 2^o$.
Hvor meget kan det dermed tænkes, at den fundne afstand i b) skal forøges med ?

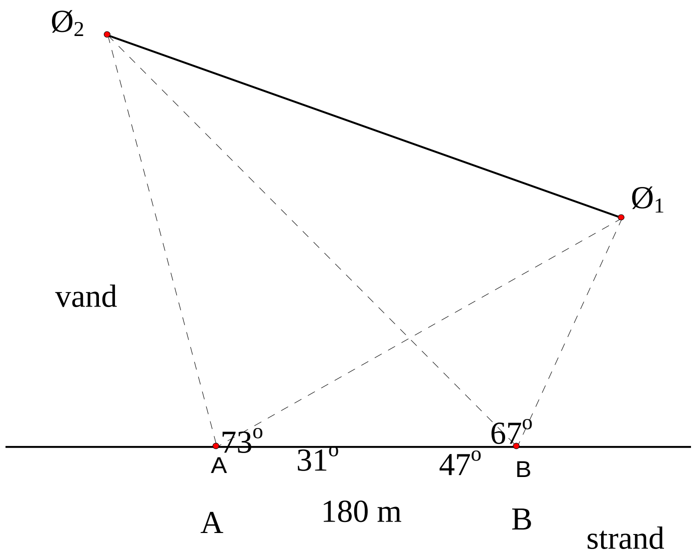


d) Beskriv en metode til at måle afstanden over til øen, sådan at vinklen ved det ene observations-punkt bliver 90^o.

M.4 2):

Efter en succesfuld udmåling og svømmetur tager de to gymnasieelever fra delopgave M4 1) ud til en anden strand, hvor der er to øer $Ø_1$ og $Ø_2$. De har tidligere svømmet over til $Ø_1$, men vil nu bestemme afstanden mellem $Ø_1$ og $Ø_2$ inden de giver sig ud på den helt store udfordring: Først at svømme til $Ø_1$ – og efter en passende pause her da at svømme videre til $Ø_2$.

De anvender samme metode som i M4 1), idet de anbringer to stokke i vandkanten i punkterne A og B, hvorefter de måler afstanden mellem A og B, samt vinklerne for sigtelinierne.



De får følgende data (se figuren): $|AB| = 180\,\text{m}$, $\angle Ø_2AØ_1 = 73^o$, $\angle Ø_1AB = 31^o$, $\angle ABØ_2 = 47^o$ og $\angle Ø_2BØ_1 = 67^o$

Beregn afstanden mellem $Ø_1$ og $Ø_2$

(*Vejledning*: Anvend sinus- og cosinusrelationerne på passende trekanter)

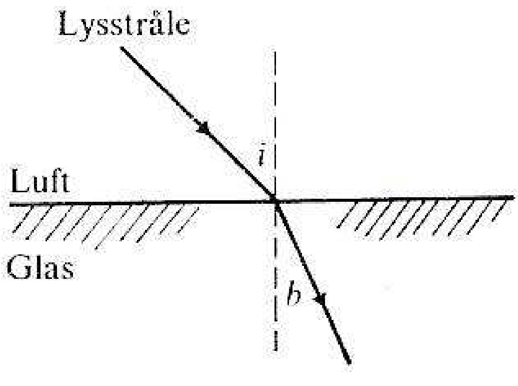
M.5: Lysets Brydning

Når en lysstråle (med en given bølgelængde) passerer fra et medium (f.eks. luft) til et andet (f.eks. glas), ændres både lysets hastighed og dets retning. Denne ændring bestemmes af brydningsloven:

$$\frac{\sin i}{\sin b} = \frac{v_{medie1}}{v_{medie2}}$$

hvilket i det konkrete eksempel er lig med:

$$\frac{\sin i}{\sin b} = \frac{v_{luft}}{v_{glas}}$$



hvor i og b er de på figuren angivne vinkler, og hvor v_{medie1} hhv. v_{medie2} er lysets hastighed i det medie, hvor lyset kommer fra hhv. går ind i. (I det konkrete eksempel er de to medier luft og glas).

Vinklerne i og b, som kaldes hhv. indfaldsvinklen og brydningsvinklen, er i et forsøg som vist på figuren bestemt til: $i = 43^o$ og $b = 27^o$.

a) Bestem lysets hastighed i glas, idet hastigheden i luft er: $v_{luft} = 300.000.000$ m/s.

b) Bestem brydningsvinklen for en lysstråle, der i det konkrete forsøg har en indfaldsvinkel på 30^o

c) Vi antager, at glasset i forsøget er en 4 cm tyk glasplade.
Hvor mange cm vil lysstrålen blive forskudt, når lyset passerer igennem glasset, hvis indfaldsvinklen er 62^o ? *(Lav en figur !)*

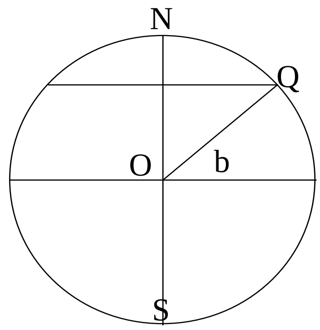
Hvis lysstrålen sendes fra glasset op i luften (svarende til at strålen på figuren ”vendes”), bliver brydningsvinklen b større end indfaldsvinklen i. (Bogstaverne i og b skal blot byttes om på figuren).
d) Argumentér for, at dette stemmer med brydningsloven, hvor $v_{medie1} < v_{medie2}$.

Hvis vi nu i denne situation forøger indfaldsvinklen i, så vil brydningsvinklen b også blive større (og den er altså hele tiden større end i !). Når indfaldsvinklen i har en vis størrelse i_g (”grænsevinklen”), er brydningsvinklen 90^o. Da b ikke kan blive større, vil der ikke forekomme brydning, hvis
$i > i_g$. I denne situation vil alt lyset blive reflekteret ned i glasset igen ved overfladen (i en retning bestemt af reglen om at indfaldsvinkel og udfaldsvinkel ved en refleksion er lige store). Man taler i en sådan situation om total refleksion.
e) Beregn grænsevinklen i_g i det konkrete forsøg, der omtales i denne opgave.

Fænomenet total refleksion spiller en afgørende rolle i f.eks. prismekikkerter, optiske fibre (til datakommunikation) og endoskoper (til optisk undersøgelse af indre organer, f.eks. mavesæk). Den interesserede læser henvises til litteraturen om emnerne.

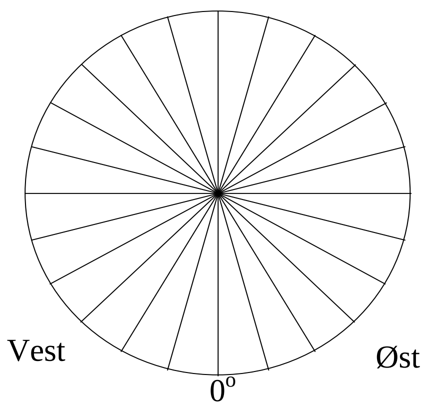
M6. Jordkloden.

M6 1): Længde og breddegrader



Som det formodentlig er læseren bekendt, er Jorden inddelt i breddegrader og længdegrader.
På figuren ses et snit igennem Jorden, hvor N og S er hhv. Nordpolen og Sydpolen, O er Jordens centrum og Q er et givet sted på jordoverfladen. Ved breddegraden b for stedet Q forstås den vinkel, der er vises på figuren. Breddegraden kan altså være alt fra -90^o til $+90^o$ (Vi taler om ”syd” og ”nord” i stedet for – og +). Ækvator har breddegraden 0^o.
Det fremgår, at alle punkter på Jordens overflade, som har samme breddegrad som Q, ligger på cirklen gennem Q parallel med ækvator.

a) Bestem radius i denne cirkel, hvis breddegraden er 41^o nord, idet det antages, at Jorden er kugleformet med en radius på 6367 km.

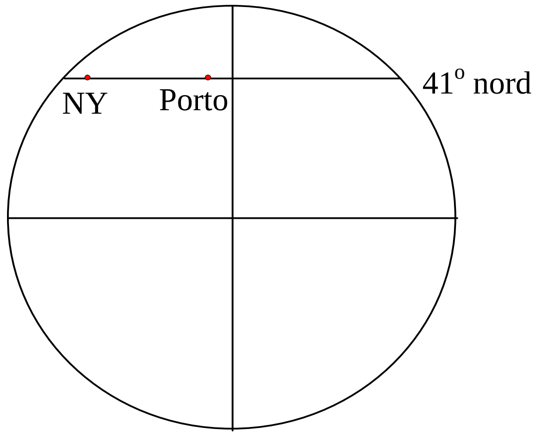


Længdegrader består af halvcirkler fra Nordpolen til Sydpolen (se figuren, som viser Jorden set fra Nordpolen med en del af længdegraderne indtegnet). Inddelingen er foretaget ved, at den længdegrad, der går igennem Greenwich i London sættes til 0^o, hvorefter længdegraderne går fra 180^o øst til 180^o vest.

b) Bestem afstanden langs ækvator mellem længdegraderne: 14^o øst og 17^o vest.

På figuren øverst på næste side ses Jorden ”set fra siden”. Der er indtegnet ækvator og den 41. breddegrad nord. Der er desuden markeret byerne Porto (Oporto) i Portugal og New York i USA, som begge (praktisk talt) ligger på 41 grader nordlig bredde. Porto ligger ved længdegraden 9^o vest, og New York ligger ved 74^o vest.

Vi forestiller os nu, at et skib sejler langs den 41. breddegrad fra Porto til New York.

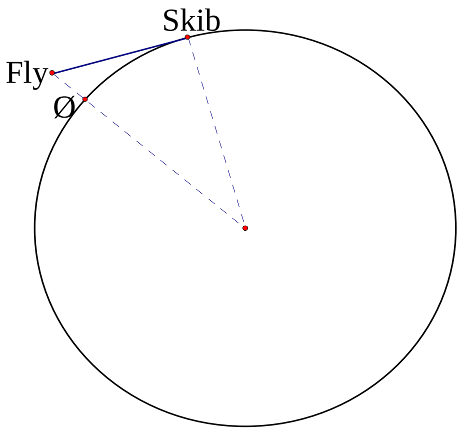


c) Hvor langt har skibet sejlet ?

d) Er den valgte rute den korteste imellem Porto og New York ? Begrund svaret !

Man har i mange århundrede kunnet bestemme breddegraden af et skib (eller en karavane i en ørken osv.) ved at måle vinklen mellem sigtelinien til Nordstjernen og horisonten (eller mellem sigtelinien til Nordstjernen og lodret). På den sydlige halvkugle brugte man Sydkorset i stedet for Nordstjernen.
Men bestemmelse af længdegraden krævede et nøjagtigt, ”søgående” ur – og dette blev først opfundet/konstrueret i begyndelsen af 1700-tallet.
Tanken om at sejle langs en given breddegrad er altså ikke så urealistisk, som man måske skulle tro.

M6 2): Afstande på Jordkloden bestemt fra fly.
Et fly befinder sig i 11 km’s højde over jordoverfladen. Idet flyet passerer hen over havnen på en ø, kan man fra flyet netop se et skib i horisonten. (Situationen er skitseret på figuren, hvor det dog skal bemærkes, at de indbyrdes størrelsesforhold ikke passer).



a) Beregn skibets afstand fra havnen (idet det antages, at Jorden er kugleformet med en radius på 6367 km).

M.7. Vejrtrækning
For en person, der sover, kan rumfanget af lungerne med god tilnærmelse beskrives ved en model af typen:

$$V(t) \ = \ a \cdot \cos(b \cdot t) + c$$

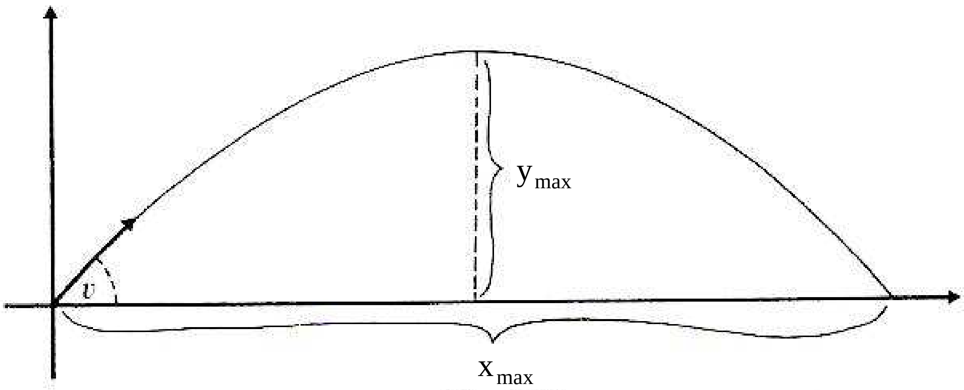
hvor V måles i liter og tiden t i sekunder, og hvor parametrene a, b og c beskriver modellen for en konkret person.
a) Diskutér rimeligheden af denne model, og forklar, hvad størrelserne a, b og c beskriver.

Medicinstuderende Egon Hansen har indvilget i at deltage i et forsøg, hvor man måler på hans vejrtrækning, dels i vågen tilstand, dels i en vis periode under hans søvn. Man har derved fundet frem til, at c ca. er lig med 2,6 liter, samt at a i den registrerede søvnperiode var ca. 0,8 liter.
Desuden blev det under søvnen registreret, at perioden for vejtrækningen var 8 sek.
b) Bestem værdien af tallet b
c) Opskriv funktionsforskriften for Egon Hansens lungerumfang i den målte søvnperiode.
(Man er påbegyndt tidtagningen netop, når Egon har fuldført en vejrtrækning)

d) Måleperioden under søvnen varede 12 minutter.
Hvor mange liter luft har Egon indåndet i løbet af denne periode ?

M.8. Skråt kast

Den fysiske teori for et skråt kast bygger på vektorbegrebet og specielt på bevægelsesligninger for bevægelse med konstant acceleration hhv. med konstant hastighed. Dette vil ikke blive gennemgået her (se en lærebog i fysik). Men ud fra disse begreber gør man i fysik rede for, at hvis en genstand (f.eks. en bold, et spyd eller en kanonkugle) kastes/skydes skråt opad i luften, og hvis vi kan se bort fra luftmodstanden, så kan banekurven (jfr. figuren) beskrives ved udtrykket:



$$y = -\frac{g}{2u^2 \cdot \cos^2 v} \cdot x^2 \; + \; \tan v \cdot x$$

hvor

- g er tyngdeaccelerationen ($g = 9{,}82\ m/s^2$)
- u er genstandens fart (målt i m/s) i det øjeblik, hvor genstanden slippes.
- v er vinklen mellem vandret og den retning, hvori genstanden kastes
- (x, y) er et punkt på banekurven.

(Bemærk, at vi har forudsat, at genstanden starter i (0,0), dvs. koordinatsystemet er indlagt, så det passer til dette).

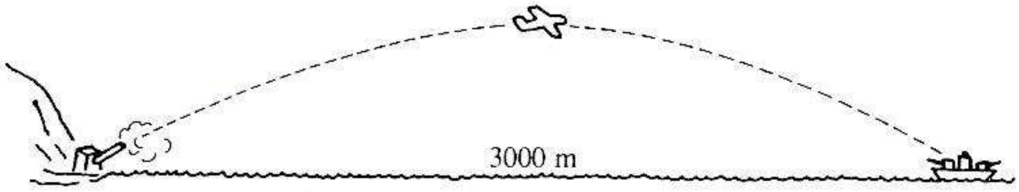
Vi ser således, at banekurven er en parabel (en såkaldt kasteparabel), som vender grenene nedad, idet koefficienten til x^2 er negativ, da $-\frac{g}{2u^2 \cdot \cos^2 v} < 0$

a) Bevis, at den maksimale stighøjde y_{max} i kastet (se figuren) er givet ved formlen:

$$\boxed{y_{max} = \frac{u^2 \cdot \sin^2 v}{2g}}$$

b) Bevis, at kastelængden x_{max} målt i samme højde som udgangspunktet (se figuren) er givet ved:

$$\boxed{x_{max} = \frac{u^2 \cdot \sin(2v)}{g}}$$



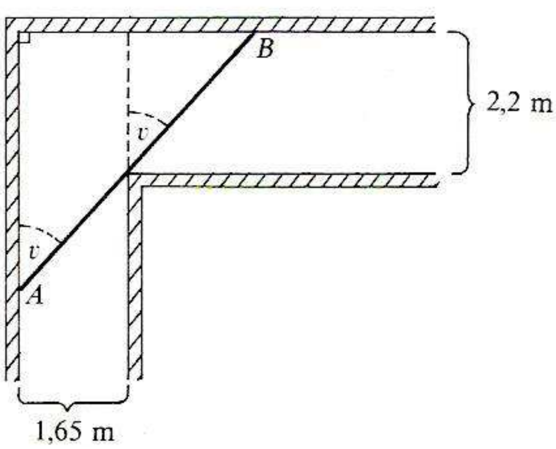
En kanon er anbragt ved kysten, og den affyrer granater med farten u = 185 m/s.

c) I hvilken vinkel skal kanonen affyres for at ramme et skib, der er 3000 m fra land ?
(Kan der tænkes at være mere end et svar på dette spørgsmål ? Og givet fald hvilke ?)

d) Det viste sig imidlertid, at granaten, da den var højst oppe, ramte en flyvemaskine.
Hvor højt oppe fløj denne maskine ?
(Kan der tænkes at være mere end et svar på dette spørgsmål ? Og givet fald hvilke ?)

e) Hvor langt skal skibet sejle ud for at være udenfor kanonens rækkevidde ?

M.9. Rundt om hjørnet.
I forbindelse med afstivningen af et gammelt hus, som man ønsker at bevare, har det vist sig, at man er nødsaget til at bære nogle lange indre afstivere igennem en korridor i huset. Denne korridor danner et givet sted en ret vinkel som vist på figuren:



a) Gør rede for, at afstanden g mellem punkterne A og B er givet ved:

$$g(v) = \frac{1{,}65}{\sin v} + \frac{2{,}2}{\cos v}$$

hvor v er den på figuren angivne vinkel.

b) Find den størst mulige længde, som en afstiver kan have, for at den kan passere hjørnet.
(Vi antager, at afstiverens bredde er så lille, at vi kan se bort fra den).

c) I det ovenstående er der <u>ikke</u> taget højde for korridorens <u>højde</u>.
Hvor lang kan afstiveren være, hvis korridoren er 2,1 m høj ? ♥

M.10. The Cardiff Bay Barrage, der ligger ved byen Cardiff i det sydlige Wales ud mod Bristol-kanalen, er en af de største investeringer og ingeniørprojekter, der er gennemført i Storbritannien (færdiggjort i 1999). Den 1,1 km lange ”barrage” (dvs. en dæmning med sluse) indeslutter floderne Taff's og Ely's udløb, og skaber derved en over 2 km^2 stor lagune med en ca. 13 km lang permanent waterfront (”søside”). Tidevandsforskellen i Bristol-kanalen er ved Cardiff Bay op til 14 m, og inden bygningen af dæmningen var bugten utilgængelig i samlet ca. 14 timer om dagen p.gr.a. lavt vand (ved lavvande var stort set kun store mudderbanker synlige).

På det øverste billede ses ”lagunen” med Cardiff i baggrunden og dæmningen i forgrunden.
På det næste billede ses dæmningen med sluserne fra oven. Bemærk lavvandet (næsten intet vand) udenfor.
Det næste billede viser indsejlingen til sluserne.
Det sidste billede viser en mindre sejlbåd på vej igennem en af sluserne. (Billederne stammer bl.a. fra Google Earth).

I en model kan vandhøjden udenfor sluserne en given dag beskrives ved:

$$h(t) = 6 + 6 \cdot \sin\left(\frac{4\pi}{25} \cdot t - \frac{\pi}{2}\right)$$

hvor tiden t måles i timer og h(t) i meter.

a) Argumentér for, at h er periodisk med perioden 12,5 timer.

b) Find ud af – f.eks. via et Leksikon eller Internettet –, hvorfor tidevandets periode er (ca.) 12,5 timer.

c) Tegn grafen for h(t), $t \in [0; 24]$ v.hj.a. et graftegningsprogram.

d) Som bekendt angiver $h'(t)$ tidevandets stigningshastighed.
Til hvilke tidspunkter den pågældende dag er vandets stigningshastighed størst ?
Og hvor stor er den ?
(*Vejledning:* Find $h'(t)$. Sæt $y = \frac{4\pi}{25} \cdot t - \frac{\pi}{2}$ og find grænserne for y, idet vi ved, at $t \in [0; 24]$).

e) Vi forestiller os nu, at sluserne den givne dag er gået i stykker, og at de kun kan åbnes, når vandstanden udenfor er mindst 5 m og højst 8 m.
I hvilke tidsrum kan sluserne åbnes den pågældende dag ?
(*Vejledning:* Benyt y fra pkt. d) og løs først uligheden: $5 \le 6 + 6\sin y \le 8$)

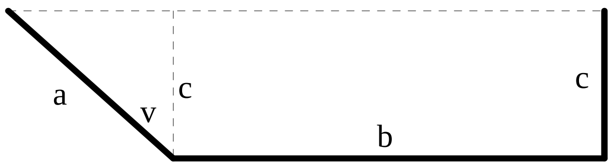
M.11. Render, bakker, kanaler.

Problemet med at optimere rumfanget af f.eks. tagrender, kabelbakker, vandkanaler osv. kan have forskellige variationer, afhængig af forudsætningerne. Vi vil her se på tre forskellige situationer, hvor det forudsættes, at renden har det samme tværsnit hele vejen, således at optimering af rumfang bliver til et problem om optimering af tværsnitsareal (overvej !).

a) Vi ser først på den situation, hvor siderne er lige høje og parallelle – og de er forbundet med en retlinet bund, som står vinkelret på siderne (som vist på figuren).
Den samlede længde af bunden og de to sider er 50 cm.

1) Opstil et udtryk for tværsnitsarealet af figuren som funktion af sidelængden.
2) Beregn, hvor stor sidelængden og bredden skal være for at opnå det størst mulige areal.
3) Hvor stort er dette areal ?
4) Lav de samme beregninger under forudsætning af, at den samlede længde er L og ikke 50 cm

b) Vi ser dernæst på den situation, hvor den ene side er skråt udadstillet medens den anden stadigvæk er vinkelret på bunden (som vist på figuren).
Højden c af den vinkelrette side er fast, og højden af renden skal være lig med c.



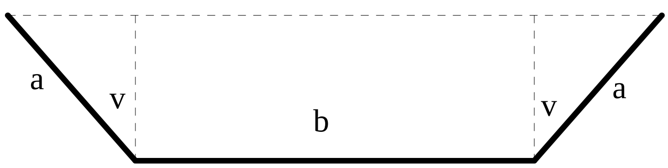
Bunden b plus den skrå side a har den samlede længde L = a + b, hvor L er fast.
Spørgsmålet er nu, hvor stor vinklen v skal være – og dermed også hvor L skal deles (bukkes) mellem a og b for at få det størst mulige tværsnitsareal.

1) Vis at tværsnitsarealet A(v) som funktion af vinklen v er givet ved udtrykket:

$$A(v) = c \cdot L + c^2 \cdot \frac{\sin(v) - 2}{2 \cdot \cos(v)}$$

2) Bestem den vinkel v, der giver det største areal
(Husk at argumentere for, at det ér et maksimum).
3) Bestem dette største areal udtrykt ved c og L
3) Bestem længden af siderne a og (udtrykt ved c og L) i den optimale figur.

c) Endelig ser på den situation, hvor begge sider er skråtstillede i samme vinkel i fht. bunden (som vist på figuren).
Længden af såvel a som b er fast – det er variationen af arealet som funktion af vinklen v, vi vil interessere os for.



1) Vis at tværsnitsarealet A(v) er givet ved: $A(v) = a \cdot b \cdot \cos v + a^2 \cdot \cos v \cdot \sin v$,
hvor v er vinklen, som siderne er bukket ud i fht. vinkelret på bunden (se på figuren).
2) Beregn den vinkel, der giver det største tværsnitsareal, når a = 7 cm og b = 12 cm.
(Husk også hér at argumentere for, at der er tale om et maksimum).
3) Beregn størrelsen af dette maksimale areal.

Stikordsregister