Steen Bentzen

Uendelighed og kardinalitet

- mængder og de reelle tal.

Forlaget Bentz

Indholdsfortegnelse

Forord

Uendelighed er et på én gang interessant og komplekst begreb at arbejde med. Dette bygger ikke mindst på, at der er mange forskellige former for uendelighed, hvilket gennemgås i teksten.

Der er i teksten lagt væk på at give grundige og fyldestgørende beviser for de matematiske sætninger, der omtales. Der er ligeledes lagt vægt på at nå frem til en række af de væsentligste resultater vedrørende uendelighed og kardinalitet, (hvormed der ikke er afsat plads til diverse kuriositeter som f.eks. Hilberts hotel og "regneregler" for "uendeligt" som f.eks.: $\infty + 5 = \infty$. Læsere, der er interesseret i disse forhold, kan bl.a. søge på Internettet).
Den aksiomatiske opbygning af såvel mængdelæren som af de reelle tal $\mathbb{R}$ er af flere forskellige årsager udeladt i denne bog. Der bygges i stedet for på en sund, intuitiv fornemmelse for såvel mængdebegrebet som de reelle tals egenskaber, som begge udbygges i teksten.

Det biografiske kapitel om Georg Cantor (Kapitel 3) bygger ikke på et akademisk funderet studium af udvalgte primære kilder, men derimod på og ved sammenholdelse af en række udenlandske biografier fundet på Internettet. Der er derfor ingen garanti for indholdets detaljerede korrekthed.

For at kunne læse og forstå hoved-indholdet i denne bog (Kapitel 1 og 2), skal læseren have indgående kendskab til (viden om): 1) grundlæggende mængdelære og logik, 2) grundlæggende funktionsteori og 3) grundlæggende egenskaber ved de reelle tal.

Dette vil for mange potentielle læsere være opnået gennem andre studier (anden undervisning/ læsning), men for at komplettere bogen er der medtaget tre appendices (se indholdsfortegnelsen), hvor læseren kan stifte bekendtskab med disse områder af matematikken.

Et appendix indeholder normalt emner, der kun er med for at understøtte (eller eventuelt supplere) hovedindholdet i bogen. Et appendix vil derfor normalt være relativt kortfattet, men som det fremgår, er Appendix 1 relativt langt. Dette skyldes, at mange potentielle læsere ikke vil have fået en mere systematisk indføring til emnet mængder. Appendix 1 er således ikke kun en understøttende tekst til hovedindholdet i bogen, men et selvstændigt kapitel om grundlæggende mængdelære og logik, som <u>kan</u> læses uafhængigt at resten af bogen.

Da en person uden forhåndskendskab til begrebet en funktion nok slet ikke vil forsøge sig med at læse denne bog, er Appendix 2 blot en relativ kort beskrivelse – og ikke så meget en lærebogsindføring – af særlige dele af funktionsbegrebet i et omfang, som er nødvendigt (og forhåbentlig også tilstrækkeligt) for at kunne arbejde med funktioner i bogens to hovedkapitler.
Appendix 2 kan bruges som en genopfriskning (og for den meget avancerede læser: som en førstegangslæsning) af den nødvendige information om funktioner.

Der er ikke nogen separat opgavesamling i bogen. Opgaverne er indlagt som "øvelser" på passende steder i teksten – efterhånden som den skrider fremad.

Til at vise afslutning af beviser, eksempler og øvelser anføres tegnet: ♥

Steen Bentzen
November 2013

Kapitel 1. Ækvipotens og kardinalitet – generelt.

Begrebet kardinalitet kan løst forklaret beskrives på følgende måde: Kardinaltallet for en mængde er et mål for, hvor mange elementer der er i mængden. Og to mængder siges at have samme kardinalitet, hvis der er lige mange elementer i de to mængder.

Hvis X og Y er to endelige mængder (dvs. to mængder med endeligt mange elementer), så kan kardinaliteten bestemmes ved at tælle antallet af elementer i hver af dem, og hvis man kommer til det samme antal, har de to mængder samme kardinalitet, hvilket vi vil skrive: Card(X) = Card(Y).

Hvis der derimod ikke er endeligt mange elementer i mængderne, så er situationen straks vanskeligere. For at nærme os problemstillingen kan vi se på dette med at have ”lige mange” elementer på følgende måde (overvej !): Der kan siges at være lige mange elementer i to mængder X og Y, hvis der på en eller anden måde til hvert element i X svarer ét og kun ét element i Y, samt hvis der samtidig på en eller anden måde til hvert element i Y svarer ét og kun ét element i X.

<u>Eksempel 1.1.</u>

a) Hvis vi har en vis mængde af bolde B og en vis mængde af skuffer S, så kan vi afgøre om B og S har samme kardinalitet på følgende måde: Vi lægger boldene ned i skufferne, én i hver skuffe. Hvis der i samtlige skuffer er én (og kun én) bold, så har de to mængder samme kardinalitet.
b) På figur 1.1 ses to mængder P og J, hvor P består af en række personer og J består af en række jobs. Vi ser, at der til hver person er tilknyttet netop ét job, og at der til hver job er knyttet netop én person (Der er altså <u>ikke</u> to personer i mængden P, som har samme job – og samtlige de i J omtalte jobs varetages af en af personerne i P). De to mængder har altså samme kardinalitet.

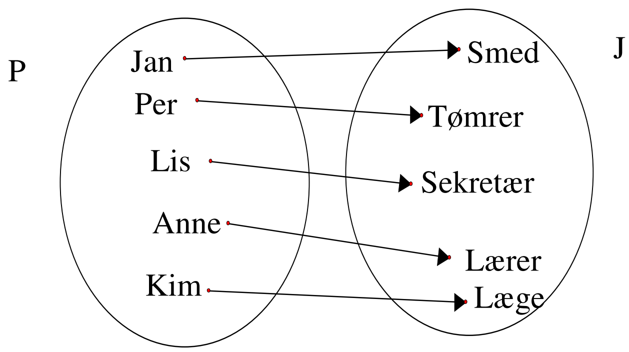


Fig. 1.1. ♥

Da en funktion (jfr. Appendix A.2) er et begreb, der til ethvert element i én mængde tilordner netop ét element i en anden mængde, ser vi, at begrebet ”en funktion” kan bidrage til at give en mere præcis definition af begrebet ”kardinalitet” – og af dette ”at have samme kardinalitet”.
Hvis vi har en funktion f fra en mængde X til en mængde Y, så ved vi, at der til ethvert element i X ved f svarer netop ét element i Y. Men vi ved ikke, om det samme element i Y er funktionsværdi af flere forskellige elementer i X, så for at klare dette problem må vi kræve, at funktionen f er injektiv. Vi ved heller ikke, om der til alle elementer i Y svarer en værdi i X (altså om alle elementer i Y er funktionsværdi af et eller andet element i X), så for at klare dette problem må vi kræve, at funktionen f er surjektiv. For at opnå den ønskede matchning af elementer i X med elementerne i Y må vi altså kræve, at funktionen f er bijektiv, hvilket til gengæld også sikrer det ønskede (Jfr. Appendix 2, kommentar til definition A.2.21, hvor den samme problemstilling omtales).

På baggrund af denne introduktion giver vi nu følgende definition:

Definition 1.2.

To mængder X og Y siges at have samme kardinalitet (eller have samme mægtighed, eller være ækvipotente), hvis der findes en bijektiv funktion (en bijektion) f fra X på Y.

I givet fald skriver vi: $X \sim Y$ eller: $\mathrm{Card}(X) = \mathrm{Card}(Y)$

Eksempel 1.3.
To vilkårlige lukkede linjestykker L_1 og L_2 er ækvipotente:

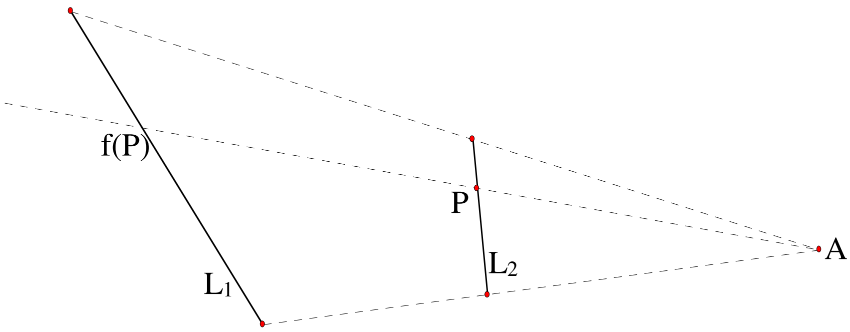


Fig. 1.2.

Punktet A konstrueres som vist på figuren (hvis forbindelseslinjerne mellem endepunkterne er parallelle, så drejes det ene linjestykke). Funktionen $f : L_2 \to L_1$ defineres som antydet på figuren. f er da åbenbart både injektiv og surjektiv (overvej !), hvormed f er en bijektion, dvs. $L_1 \sim L_2$. ♥

Eksempel 1.4.
Hvis $L = \{2, 4, 6, 8, 10, ...\}$, altså de lige naturlige tal, så er L ækvipotent med mængden $\mathbb{N}$ af naturlige tal, dvs. $L \sim \mathbb{N}$, idet funktionen $h : L \to \mathbb{N}$ defineret ved: $h(x) = \dfrac{x}{2}$ er en bijektion (overvej !). ♥

Øvelse 1.5.
På figur 1.3 ses et koordinatsystem, hvor de reelle tal $\mathbb{R}$ er placeret ud af 1.aksen og hvor intervallet $]-1;1[$ er anbragt op af 2.aksen. Punkterne A_1 og A_2 er placeret i afstanden 1 fra 1.aksen, og funktionen $f :]-1;1[\to \mathbb{R}$ defineres som antydet på figuren.

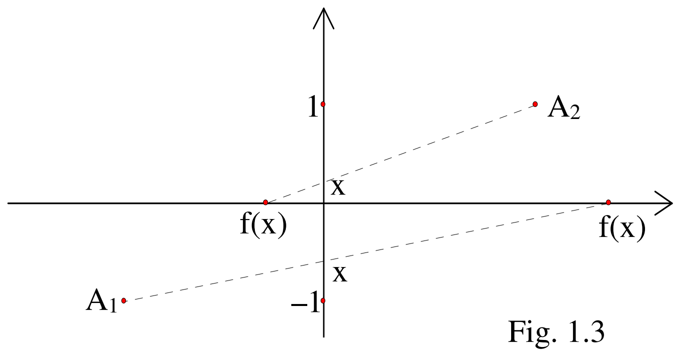


Fig. 1.3

Argumenter for, at f er bijektiv, og at vi derfor har, at $]-1;1[\ \sim \mathbb{R}$. ♥

Eksempel 1.6.

At $]-1;1[\ \sim \mathbb{R}$ kan også indses ved at betragte funktionen $f:]-1;1[\to \mathbb{R}$ givet ved det nedenstående udtryk, og så bevise, at den er en bijektion af $]-1;1[$ på $\mathbb{R}$.

$$f(x) = \begin{cases} f_+(x) & \text{for } x \in]0;1[\\ 0 & \text{for } x = 0 \\ f_-(x) & \text{for } x \in]-1;0[\end{cases} \qquad \text{hvor } f_+(x) = \frac{x}{1-x} \quad \text{og} \quad f_-(x) = \frac{x}{1+x}$$

For at bevise, at f er en bijektion af $]-1;1[$ på $\mathbb{R}$, viser vi, at $f_-(x)$ er en bijektion af $]-1;0[$ på $\mathbb{R}_-$, og at $f_+(x)$ er en bijektion af $]0;1[$ på $\mathbb{R}_+$. Beviset for $f_-(x)$ gennemføres i det følgende, medens beviset for $f_+(x)$ overlades til læseren som en øvelse.

Lad da y være et vilkårligt givet negativt, reelt tal, dvs. vælg vilkårligt et $y \in \mathbb{R}_-$. Vi skal da vise, at der findes ét og kun ét $x \in]-1;0[$, så $f_-(x) = y$.

Vi analyserer situationen og sætter $y = \frac{x}{1+x}$. Da vi skal finde et x, der svarer til det valgte y, løser vi denne ligning mht. x, dvs. vi isolerer x. Dette giver (kontrollér !): $x = \frac{y}{1-y}$. Vi får altså det ønskede, nemlig at der til en given y-værdi svarer én og kun én x-værdi. Men for at dette overhovedet kan bruges, skal vi sikre os, at den fundne x-værdi ligger i den rigtige mængde, dvs. i intervallet fra –1 til 0. Vi mangler altså at argumentere for, at $-1 < \frac{y}{1-y} < 0$. Dette indses således:

$$y < 0 \Rightarrow -y > 0 \Rightarrow 1-y > 1 \Rightarrow 1-y > 0$$

Da y er negativ og $1-y$ er positiv, er brøken $\frac{y}{1-y}$ negativ.

Vi har desuden:

$$-1 < 0 \Rightarrow -1+y < y \Rightarrow -(1-y) < y \Rightarrow -1 < \frac{y}{1-y}$$

hvor vi i den sidste omskrivning har brugt, at $1-y$ er positiv, hvormed ulighedstegnet bevares ved divisionen.

Hermed er det ønskede bevist.

Det overlades som en øvelse til læseren at tegne graferne for hhv. $f_+(x) = \frac{x}{1-x}$ og $f_-(x) = \frac{x}{1+x}$ (gerne ved anvendelse af et graftegningsprogram) og kommentere resultatet. ♥

Bemærk, at hvis der findes en bijektion f fra en mængde X på en mængde Y, så findes der også en bijektion fra Y på X, nemlig den omvendte funktion til f. X og Y optræder altså fuldt symmetrisk i definitionen 1.2, dvs. at hvis X ~ Y, så gælder der også, at Y ~ X.

Vi har desuden, at X ~ X, idet den identiske funktion f(x) = x er en bijektion af X på X.

Hertil kommer, at der gælder følgende regel:

Sætning 1.7.

Lad X, Y og Z være tre givne mængder.

Hvis $X \sim Y$ og $Y \sim Z$, så gælder der, at: $X \sim Z$.

Bevis:
Forudsætningerne: $X \sim Y$ og $Y \sim Z$ giver os to bijektive funktioner $f : X \rightarrow Y$ og $g : Y \rightarrow Z$. Men da vil den sammensatte funktion $g \circ f : X \rightarrow Z$ være en bijektion af X på Z (overvej), hvormed vi får: $X \sim Z$. Hermed er sætningen bevist. ♥

Vedrørende ækvipotens af mængder gælder der også følgende sætning, hvor vi minder om (jfr. Appendix 1), at hvis S og T er givne mængder, så er $S \times T$ mængden af alle talpar af typen (p,q), hvor $p \in S$ og $q \in T$.

Sætning 1.8.

Lad X og Y være givne mængder. Der gælder da:

$$X \sim Y \quad \Rightarrow \quad X \times X \sim Y \times Y$$

Bevis:
Forudsætningen: $X \sim Y$ betyder, at der findes en bijektion $f : X \rightarrow Y$. Vi definerer en ny funktionen F: $X \times X \rightarrow Y \times Y$ ved:

$$F((A_1, A_2)) = (f(A_1), f(A_2)) \quad \text{for alle} \quad (A_1, A_2) \in X \times X$$

Da f er en funktion fra X ind i Y, er F en funktion fra $X \times X$ ind i $Y \times Y$, hvormed F er veldefineret.
At F er surjektiv ses på følgende måde: Lad $(B_1, B_2) \in Y \times Y$ være vilkårligt valgt. Da f er surjektiv, findes et $A_1 \in X$, så $f(A_1) = B_1$ og et $A_2 \in X$, så $f(A_2) = B_2$. Men da er $(A_1, A_2) \in X \times X$, og der gælder: $F((A_1, A_2)) = (f(A_1), f(A_2)) = (B_1, B_2)$. Et vilkårligt valgt punkt i $Y \times Y$ er altså billede af et eller andet punkt i $X \times X$, dvs. F er surjektiv.
At F er injektiv vises på følgende måde: Hvis $(A_1, A_2) \neq (A_3, A_4)$, så har vi enten, at $A_1 \neq A_3$ eller at $A_2 \neq A_4$. Da f er injektiv ser vi heraf, at enten er $f(A_1) \neq f(A_3)$ eller $f(A_2) \neq f(A_4)$. I begge tilfælde har vi, at $(f(A_1), f(A_2)) \neq (f(A_3), f(A_4))$, dvs. at $F((A_1, A_2)) \neq F((A_3, A_4))$.
Vi har hermed indset, at F: $X \times X \rightarrow Y \times Y$ er surjektiv og injektiv, dvs. F er bijektiv, hvorfor vi har: $X \times X \sim Y \times Y$.
Hermed er sætningen bevist. ♥

Øvelse 1.9.
Lad X, Y, S og T være fire givne mængder. Vis, at der gælder følgende:
Hvis $X \sim Y$ og $S \sim T$, så er $X \times S \sim Y \times T$ ♥

Vi vil nu se på begreberne endelige og uendelige mængder:

Definition 1.10.

a) Den tomme mængde Ø siges at have kardinaliteten 0, og vi skriver Card(Ø) = 0.

b) En mængde X siges at være endelig (at have endelig kardinalitet), hvis X er den tomme mængde eller hvis der findes et naturligt tal n, så mængderne X og $\{1,2,3,4,...,n\}$ er ækvipotente.
I sidstnævnte tilfælde siger vi, at mængden X har kardinaliteten n (eller kardinaltallet n), og vi skriver: Card(X) = n.

Vi ser, at med denne definition er kardinaliteten (eller kardinaltallet) for en endelig mængde lig med det antal, vi ville opnå ved på simpel måde at tælle, hvor mange elementer der er i mængden.

Definition 1.11.

En mængde, der ikke er endelig, siges at være uendelig (eller at have uendelig kardinalitet).

Uendelige mængder er interessante på mange måder, bl.a. ved (som vi skal se senere) at der findes forskellige former for uendelighed, og at en uendelig mængde kan være ækvipotent med (have samme kardinalitet som) en ægte delmængde af sig selv – noget der bestemt ikke kan lade sig gøre for endelige mængder, idet der klart gælder følgende sætning:

Sætning 1.12.

Hvis en endelig mængde X har n elementer, og hvis det om en mængde Y gælder, at Y ~ X, så er Y også endelig og har n elementer.

Specielt ser vi, at hvis $\{1,2,3,4,...,n\}$ ~ $\{1,2,3,4,...,m\}$, så er n = m.
En endelig mængde X kan altså ikke være ækvipotent med en ægte delmængde Y af sig selv, da en sådan delmængde Y ifølge sætning 1.12 ville have det samme antal elementer som den oprindelige mængde X, hvilket strider imod, at Y er en ægte delmængde af X.

Da vi ifølge eksempel 1.5 har, at $L \sim \mathbb{N}$, hvor L er de lige, naturlige tal så ser vi, at $\mathbb{N}$ er ækvipotent med en ægte delmængde af sig selv. Dette betyder, at der gælder følgende sætning (som vi intuitivt godt vidste var opfyldt):

Sætning 1.13.

Mængden $\mathbb{N}$ af alle naturlige tal er en uendelig mængde.

I forlængelse heraf giver vi følgende definition:

Definition 1.14.

En mængde X siges at være nummerabel, hvis $X \sim \mathbb{N}$.

Ordet ”nummerabel” stammer fra ”at kunne nummereres”. Og hvis en mængde X er nummerabel, så findes der en bijektion f af $\mathbb{N}$ på X. X kan altså skrives som $X = \{A_1, A_2, A_3, ..., A_n, ...\}$, hvor $f(1) = A_1$, $f(2) = A_2$, ……, $f(n) = A_n$, ….. Vi har altså kunnet nummerere elementerne i X. Tallene 1,2,3 …,n,…. på elementerne i X kaldes index på elementerne.

<u>Øvelse 1.15.</u>

a) Vis, at $\mathbb{N} \sim \mathbb{N} \cup \{0\}$

b) Vis dernæst, at $\mathbb{N} \sim \mathbb{Z}$, hvor $\mathbb{Z}$ er mængden af hele tal (jfr. Appendix 1).
<u>Vejledning:</u> For at vise dette kan man vise, at $\mathbb{N} \cup \{0\} \sim \mathbb{Z}$ v.hj.a. funktionen $f : \mathbb{N} \cup \{0\} \to \mathbb{Z}$ givet ved: $f(0) = 0$, $f(2n-1) = n$ og $f(2n) = -n$. ♥

<u>Øvelse 1.16.</u>

Argumentér for, at hvis X og Y er to nummerable mængder, så er $X \cup Y$ også nummerabel. ♥

Til at afgøre om – og til at beskrive at – en given mængde X er uendelig har vi følgende sætning:

<u>Sætning 1.17.</u>

a) En mængde X er uendelig, hvis og kun hvis den indeholder en nummerabel delmængde Y

b) En mængde er uendelig hvis og kun hvis den er ækvipotent med en ægte delmængde af sig selv.

Bevis:

Vi viser først a), og derefter b). Vi minder om, at sprogbrugen ”hvis og kun hvis” betyder, at de to udsagn er ensbetydende (jfr. Appendix 1). Vi skal altså bevise, at hvis X er uendelig, så indeholder den en nummerabel delmængde Y, samt at hvis X indeholder en nummerabel delmængde Y, så er X uendelig.

Vi antager altså, at X er uendelig. Da har vi specielt, at $X \neq \emptyset$, hvormed vi kan finde et $A_1 \in X$.
Hvis $X = \{A_1\}$, så er X endelig, og da X ikke er det, må der altså findes et $A_2 \in X \setminus \{A_1\}$.
Hvis $X = \{A_1, A_2\}$, så er X endelig, og da X ikke er det, må der findes et $A_3 \in X \setminus \{A_1, A_2\}$
Således fortsættes, og vi sætter nu $Y = \{A_1, A_2, A_3, A_4, ...\}$ og får derved, at Y er en nummerabel delmængde af X. Hermed er det ønskede bevist.

Vi antager nu omvendt, at X indeholder en nummerabel delmængde Y.
Da Y ~ N kan vi skrive: $Y = \{B_1, B_2, B_3, ..., B_n, ...\}$, idet vi som tidligere nævnt sætter $B_n = f(n)$, hvor $f : \mathbb{N} \to Y$ er bijektiv.
Vi definerer nu funktionen $g : X \to X \setminus \{B_1\}$ på følgende måde (se også figur 1.4 på næste side):

$$g(A) = \begin{cases} A & \text{for } A \in X \setminus Y \\ B_{n+1} & \text{for } A = B_n \text{ , alle } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

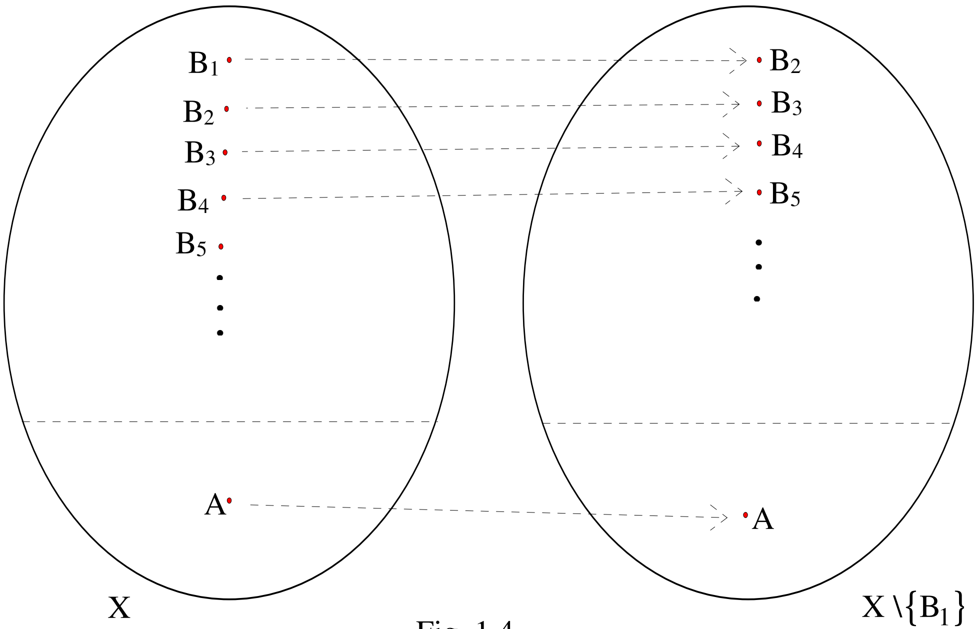


Fig. 1.4

g er da klart en bijektion, hvormed vi får, at $X \sim X \setminus \{B_1\}$, dvs. X er ækvipotent med en ægte delmængde af sig selv. Som omtalt i forbindelse med sætning 1.12 kan X da ikke være endelig, hvorfor X er uendelig. Hermed er det ønskede bevist.

Vi vender os nu mod punkt b) i sætningen:
Lad os først antage, at X er en uendelig mængde. Som netop vist i første del af punkt a), indeholder X derfor en nummerabel delmængde Y. Og når X indeholder en nummerabel delmængde, er X (som vi også lige har vist) ækvipotent med en ægte delmængde af sig selv.
Hvis omvendt X er en mængde, som er ækvipotent med en ægte delmængde af sig selv, så kan X ikke være endelig (jfr. sætning 1.12 og kommentarerne hertil), hvorfor X må være uendelig.

Hermed er sætningen bevist. ♥

Indholdet af sætning 1.13 og 1.17 kan populært udtrykkes på følgende måde:
Nummerabilitet er den ”mindste” form for uendelighed.

Vi vil nu formalisere en sådan ”sammenligning” af mængders ”størrelse” (kardinalitet).
Vi giver først et simpelt eksempel og henviser i øvrigt til Appendix 2, kommentar til definition A.2.21, hvor den samme problemstilling omtales.

Eksempel 1.18.
Lad os vende tilbage til boldene og skufferne i eksempel 1.1.
Hvis der, efter at der er lagt én og kun én bold i hver skuffe, er nogle tomme skuffer, så kan vi slutte, at der er flere skuffer end bolde. Lidt mere matematisk udtryk svarer dette til, at der findes en injektiv funktion $g : B \to S$, som ikke er surjektiv.
Tilsvarende ville der, hvis der var nogle bolde til overs, være en injektiv funktion $g : S \to B$, som ikke er surjektiv. ♥

Med motivation i bl.a. disse betragtninger giver vi følgende definition:

Definition 1.19.

Lad X og Y være givne mængder. Hvis der findes en injektiv funktion $f : X \to Y$, så skriver vi:

$$\text{Card}(X) \leq \text{Card}(Y)$$

og vi siger, at Y dominerer X.
Hvis vi yderligere ved, at X ~ Y ikke kan gælde, så skriver vi: Card(X) < Card(Y)
og vi siger, at Y dominerer X skarpt.

I tilfældet Card(X) ≤ Card(Y) har vi altså ikke udelukket muligheden af, at X ~ Y kan gælde.
Card(X) ≤ Card(Y) svarer til den intuitive forestilling, at Y mindst har lige så mange elementer som X.
Hvis vi derimod har: Card(X) < Card(Y), så gælder der, at uanset hvilken injektiv funktion fra X til Y vi betragter, så kan den ikke være surjektiv. Card(X) < Card(Y) svarer til den intuitive forestilling, at Y har flere elementer end X.

Eksempel 1.20.
Hvis X er mængden af cirkler i planen med centrum i (0,0), så er $\text{Card}(\mathbb{N}) \leq \text{Card}(X)$, idet funktionen $g : \mathbb{N} \to X$ defineret ved, at g(n) er cirklen med centrum i (0,0) og radius n, er injektiv. ♥

Øvelse 1.21.
Vis, at hvis X, Y og Z er tre givne mængder, så er følgende udsagn korrekt:

$$\text{Card}(X) \leq \text{Card}(Y) \ \wedge \ \text{Card}(Y) \leq \text{Card}(Z) \ \Rightarrow \ \text{Card}(X) \leq \text{Card}(Z)$$ ♥

Øvelse 1.22.
Antag, at det om en funktion $f : X \to Y$ gælder, at f er surjektiv. Bevis, at Card(Y) ≤ Card(X).
(Vejledning: For hvert $B \in Y$ udvælges ét $A_B \in f^{-1}(\{B\})$. Definér funktionen $g : Y \to X$ ved, at for ethvert $B \in Y$ sættes $g(B) = A_B$, og vis, at g er injektiv).
(Vedrørende $f^{-1}(\{B\})$: Se Appendix 2) ♥

Bemærk, at hvis X er en delmængde af Y, så er Card(X) højst den samme som Card(Y), dvs.

$$\boxed{X \subseteq Y \ \Rightarrow \ \text{Card}(X) \leq \text{Card}(Y)}$$

idet funktionen $f : X \to Y$ defineret ved: f(A) = A (for alle $A \in X$) er injektiv.

I forlængelse af definition 1.19 anfører vi, at der gælder følgende sætning.

Sætning 1.23.

Hvis X og Y er to givne mængder, så er følgende to udsagn ensbetydende:

a) Card(X) ≤ Card(Y)
b) Der findes en delmængde Y_1 af Y, således at $X \sim Y_1$

Bevis:
a) $\Rightarrow$ b): Hvis $f : X \to Y$ er injektiv, så kan vi sætte $Y_1 = f(X)$.
b) $\Rightarrow$ a): Vi har en bijektion $g : X \to Y_1$. Da $Y_1 \subseteq Y$ har vi specielt, at g er en injektiv funktion af X ind i Y, dvs. $\text{Card}(X) \leq \text{Card}(Y)$.
Hermed er det ønskede bevist. ♥

<u>Eksempel 1.24.</u>
Selvom det er umuligt at tælle alle fisk F i verdens have eller alle atomer A på Jorden, så kan vi nemt bevise, at der er færre fisk end atomer.
For hver fisk udpeger vi blot ét atom i fisken. Denne "udpegning" svarer til en injektiv funktion fra F til A, hvormed vi har, at $\text{Card}(F) \leq \text{Card}(A)$. Men da vi nu til hver fisk har et tilsvarende atom, behøver vi blot at tage et atom, der intet har med fiskene at gøre (f.eks. et atom fra toppen af Mount Everest) for at se, at der er flere atomer end fisk.
Bemærk, at ifølge sætning 1.12 kan vi ikke have $F \sim A$, hvorfor der gælder: $\text{Card}(F) < \text{Card}(A)$ ♥

Om en situation som den omtalt i eksempel 1.24 gælder der følgende sætning:

<u>Sætning 1.25.</u>
Lad Y være en given, <u>endelig</u> mængde, og X en given mængde.
Da er følgende udsagn ensbetydende:
a) $\text{Card}(X) < \text{Card}(Y)$
b) X er endelig og har færre elementer end Y.

Bevis:
<u>a) $\Rightarrow$ b):</u> $\text{Card}(X) < \text{Card}(Y)$ giver specielt, at $\text{Card}(X) \leq \text{Card}(Y)$, hvilket ifølge sætning 1.23 giver, at der findes en delmængde Y_1 af Y , så $X \sim Y_1$. Da Y_1 er endelig, får vi af sætning 1.12, at X er endelig og har lige så mange elementer som Y_1, dvs. X har enten færre eller lige så mange elementer som Y. Men Y og X kan ikke have lige mange elementer, da der i så fald ville gælde: $X \sim Y$
Hermed er b) vist ud fra a).

<u>b) $\Rightarrow$ a):</u> Da både Y og X er endelige, kan vi opskrive dem på følgende måde:
$Y = \{B_1, B_2, ..., B_n\}$ og $X = \{A_1, A_2, ..., A_m\}$. Ifølge forudsætningerne har vi, at $m < n$, så vi kan definere $f : X \to Y$ ved: $f(A_i) = B_i$, $i = 1,2,3,\ldots, m$. f er da injektiv, så $\text{Card}(X) \leq \text{Card}(Y)$.
Men da $m < n$, kan vi ifølge sætning 1.12 ikke have, at $X \sim Y$. Vi får dermed: $\text{Card}(X) < \text{Card}(Y)$.
Hermed er sætningen bevist. ♥

<u>Øvelse 1.26.</u>
Argumentér for, at hvis X er en endelig og Y er en uendelig mængde, så er $\text{Card}(X) < \text{Card}(Y)$ ♥

I forbindelse med uendelige kardinaltal har vi ifølge sætning 1.17 og definition 1.19 (som allerede antydet), at der gælder følgende:

<u>Sætning 1.27.</u>

$\text{Card}(\mathbb{N})$ er det mindste uendelige kardinaltal.

Vi skal senere i dette kapitel se, at der findes større uendelige kardinaltal end Card($\mathbb{N}$).

Da $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$ har vi, at $\text{Card}(\mathbb{N}) \leq \text{Card}(\mathbb{R})$. Og vi skal senere (i kapitel 2) se, at $\text{Card}(\mathbb{N}) < \text{Card}(\mathbb{R})$.

Vi vil nu vende os mod kardinaliteten af mængden $\mathbb{P}(X)$ – jfr. Appendix 1 –, hvor X er en given mængde. Først en øvelse:

Øvelse 1.28.
Lad X være en endelig mængde med n elementer.
Vis, at mængden $\mathbb{P}(X)$ har 2^n elementer, og dermed, at: Card(X) < Card($\mathbb{P}$(X)). ♥

I øvelse 1.28 så vi, at hvis X er endelig, så gælder der: Card(X) < Card($\mathbb{P}$(X)). Dette gælder ikke kun for endelige mængder, hvilket den næste sætning, der ofte kaldes *Cantor's Sætning*, godtgør:

Sætning 1.29. *(Cantor's sætning)*

Lad X være en vilkårlig given mængde. Der gælder da: Card(X) < Card($\mathbb{P}$(X)).

Bevis:
Lad funktionen $f : X \to \mathbb{P}(X)$ være defineret ved, at f(A) = $\{A\}$, dvs. et element A i X afbildes i mængden bestående af det ene element. f er da klart injektiv, så vi har, at: Card(X) ≤ Card($\mathbb{P}$(X)).

Vi skal nu vise, at Card(X) = Card($\mathbb{P}$(X)) ikke kan gælde, dvs. at X ~ $\mathbb{P}$(X) ikke kan gælde.

Dette gør vi ved at antage, at X ~ $\mathbb{P}$(X) er opfyldt, og så derudfra komme frem til en logisk modstrid, hvormed antagelsen må være forkert.

Antag altså, at der eksisterer en afbildning $g : X \to \mathbb{P}(X)$, som er bijektiv, altså både injektiv og surjektiv. Lad Y = $\{A \in X \mid A \notin g(A)\}$, dvs. Y er mængden af elementer A i X, der ikke er indeholdt i den delmængde af X, som g(A) udgør (se figur 1. 5, der viser et sådant element A):

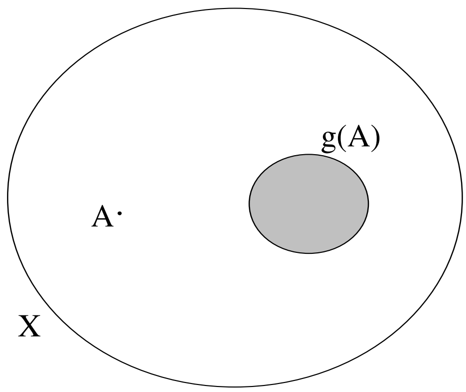


Fig. 1.5

Y er da en delmængde af X, dvs. $Y \in \mathbb{P}(X)$. Da g er antaget surjektiv, må der findes et element $B \in X$, således at $g(B) = Y$.
Der er nu to muligheder, hvoraf den ene skal være opfyldt: 1) $B \in Y$ eller 2) $B \notin Y$.

Ad 1): $B \in Y$ giver pr. definition af Y, at $B \notin g(B) = Y$. Vi får altså, at: $B \in Y$ medfører $B \notin Y$, og det kan ikke være opfyldt. Mulighed 1) kan altså ikke bruges.

Ad 2): $B \notin Y$ giver pr. definition af Y, at $B \in g(B) = Y$. Vi får altså, at $B \notin Y$ medfører $B \in Y$, og det kan ikke være opfyldt. Mulighed 2) kan altså heller ikke bruges.

Vi har hermed et element B, som hverken kan være indeholdt i Y eller ikke indeholdt i Y. Dette er umuligt, hvormed vi har den søgte modstrid. Antagelsen om eksistensen af en bijektion fra X til $\mathbb{P}(X)$ er altså ikke holdbar. Hermed er sætningen bevist. ♥

Af Cantor's sætning (sætning 1.29) har vi bl.a. følgende vigtige resultat (som undersøges yderligere i kapitel 2):

$$\boxed{\mathrm{Card}(\mathbb{N}) < \mathrm{Card}(\mathbb{P}(\mathbb{N}))}$$

Vi ser dermed, at $\mathbb{P}(\mathbb{N})$ er "mere uendelig" end $\mathbb{N}$ er. Men anvendes Cantor's sætning nu på mængden $\mathbb{P}(\mathbb{N})$, så ser vi, at $\mathrm{Card}(\mathbb{P}(\mathbb{N})) < \mathrm{Card}(\mathbb{P}(\mathbb{P}(\mathbb{N})))$, hvormed vi har, at mængden $\mathbb{P}(\mathbb{P}(\mathbb{N}))$ er "endnu mere uendelig". Således kan vi fortsætte, hvormed vi ser, at

- der er uendeligt mange "uendeligheder"
- der ikke findes nogen "største uendelighed".

Eksempel 1.30.
Lad X være en vilkårlig mængde, og lad F_X være mængden af funktioner fra X ind i mængden $\{0, 1\}$ bestående af de to elementer 0 og 1.

Vi vil nu bevise, at $F_X \sim \mathbb{P}(X)$

Vi definerer funktionen $\psi : F_X \to \mathbb{P}(X)$ på følgende måde: $\psi(f) = f^{-1}(\{1\})$, dvs. $\psi(f)$ er den delmængde af X, som ved funktionen f giver funktionsværdien 1. Vi vil vise, at ψ er bijektiv.
Vi viser først, at ψ er injektiv: Antag, at det om to funktioner $f_1, f_2 \in F_X$ gælder, at $\psi(f_1) = \psi(f_2)$. Vi skal da vise (jfr. Appendix 2), at $f_1 = f_2$. Ud fra definitionen af ψ får vi: $f_1^{-1}(\{1\}) = f_2^{-1}(\{1\})$.
Da det om enhver funktion $g \in F_X$ gælder (jfr. figur 1.6): $X = g^{-1}(\{0\}) \cup g^{-1}(\{1\})$, hvor $g^{-1}(\{0\})$ og $g^{-1}(\{1\})$ er disjunkte, gælder dette også om funktionerne f_1 og f_2. Og da $f_1^{-1}(\{1\}) = f_2^{-1}(\{1\})$, så må vi også have, at $f_1^{-1}(\{0\}) = f_2^{-1}(\{0\})$. Men dette betyder alt i alt (overvej !), at $f_1 = f_2$, altså at ψ er injektiv.

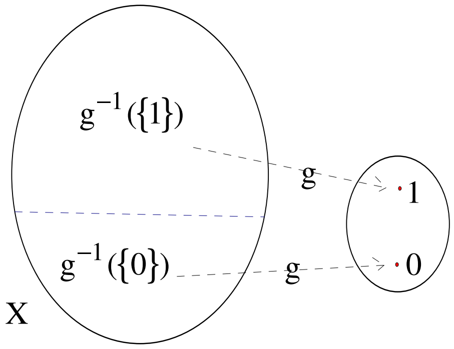


Fig. 1.6

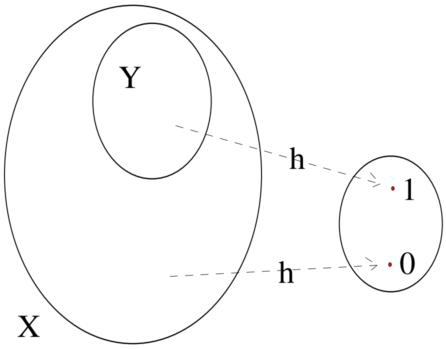


Fig. 1.7

Vi skal herefter vise, at ψ er surjektiv. Lad derfor $Y \in \mathbb{P}(X)$ være vilkårligt valgt. Vi skal da vise, at der findes en funktion $h \in F_X$, så $\psi(h) = Y$. At $Y \in \mathbb{P}(X)$ betyder, at $Y \subseteq X$. Vi kan derfor definere en funktion h ved (se figur 1.7):

$$h(q) = \begin{cases} 0 \ , & \text{når } q \notin Y \\ 1 \ , & \text{når } q \in Y \end{cases}$$

Da har vi: $Y = h^{-1}(\{1\})$, dvs. $\psi(h) = Y$. Hermed er det ønskede bevist.

Det skal for fuldstændighedens skyld omtales, at F_X sommetider skrives som: 2^X. ♥

Det er almindelig kendt, at hvis der for to reelle tal s og t gælder, at hvis $s \leq t$ og $t \leq s$, så er $s = t$. Som vi skal se i den følgende sætning, gælder der noget tilsvarende for kardinaltal, også selv om de er uendelige. Som det vil fremgå, er det imidlertid forbavsende vanskeligt at bevise dette resultat, som er kendt under navnet *Cantor-Bernstein's sætning* (idet Cantor var den første, der opstillede sætningen og Bernstein var den første, der beviste den)

Sætning 1.31. *Cantor-Bernstein's sætning.*

Hvis X og Y er to vilkårlige mængder, så gælder der:

$$\text{Card}(X) \leq \text{Card}(Y) \ \wedge \ \text{Card}(Y) \leq \text{Card}(X) \quad \Rightarrow \quad \text{Card}(X) = \text{Card}(Y)$$

dvs.

$$\text{Card}(X) \leq \text{Card}(Y) \ \wedge \ \text{Card}(Y) \leq \text{Card}(X) \quad \Rightarrow \quad X \sim Y$$

Bevis:
Da $\text{Card}(X) \leq \text{Card}(Y)$ findes der en injektiv funktion $f: X \to Y$, og da $\text{Card}(Y) \leq \text{Card}(X)$ findes der en injektiv funktion $g: Y \to X$. Vi sætter nu $X_1 = g(Y)$ og $X_2 = g(f(X))$, hvormed vi får en situation som skitseret på figur 1.8 (se øverst næste side).

Der gælder da (overvej!):

$$(*) \qquad X_2 \subseteq X_1 \subseteq X$$

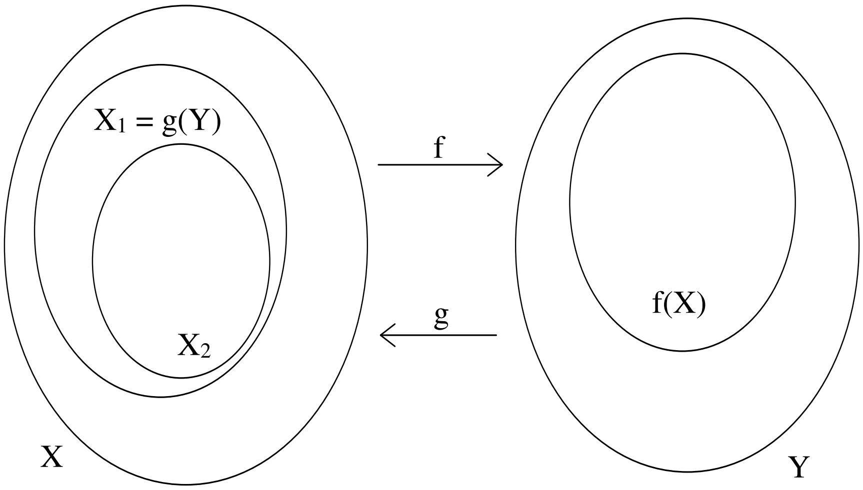


Fig. 1.8

Da den sammensatte funktion $g \circ f$ er injektiv, er $X \sim (g \circ f)(X)$, og da $(g \circ f)(X) = g(f(X)) = X_2$ får vi:

$$(**) \qquad X \sim X_2$$

Antag nu, at vi ud fra (*) og (**) kan vise, at $X \sim X_1$. Så ville vi være færdige med beviset, idet vi da ville have: $Y \sim g(Y) = X_1$ og $X \sim X_1$, hvormed vi af sætning 1.7 vil få: $X \sim Y$.

Vi skal altså bevise følgende (der i øvrigt gælder uafhængigt af det foregående):
Lad X, X_1 og X_2 være tre givne mængder. Da gælder der:

$$(***) \qquad (X_2 \subseteq X_1 \subseteq X) \wedge X \sim X_2 \quad \Rightarrow \quad X \sim X_1$$

<u>Bevis for (***):</u>
Hvis $X_1 = X$, så er $X \sim X_1$ trivielt opfyldt.
Vi ser derfor på den situation, hvor X_1 er en ægte delmængde af X. Vi sætter $Y_o = X \setminus X_1$, og der gælder altså, at $Y_o \neq \emptyset$.
Da $X \sim X_2$ findes der en funktion $h : X \to X_2$, som er injektiv og surjektiv. Ved hjælp af mængden Y_o og funktionen h vil vi nu definere en familie af mængder (se figur 1.9):

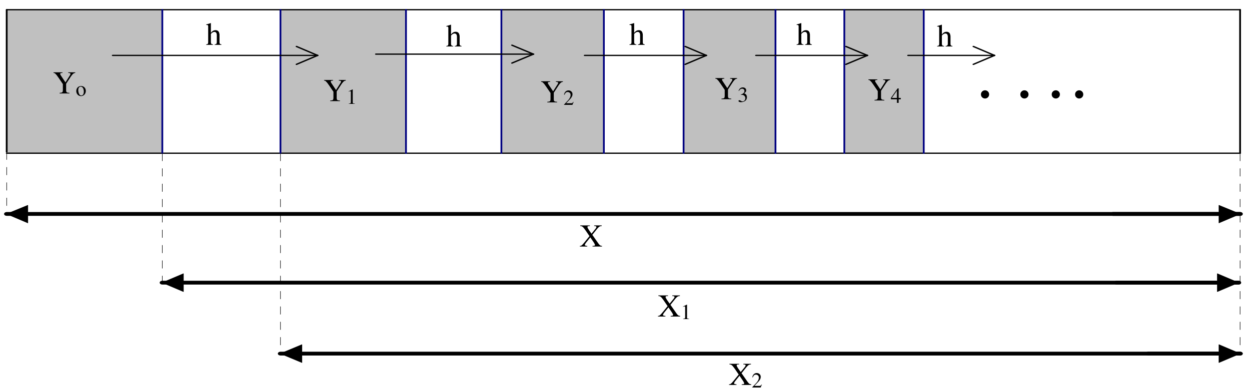


Fig. 1.9

Vi sætter

$$\begin{aligned} Y_1 &= h(Y_o) \\ Y_2 &= h(Y_1) \\ Y_3 &= h(Y_2) \\ &\ldots. \\ Y_n &= h(Y_{n-1}) \\ &\ldots.. \end{aligned}$$

På denne måde får vi en familie Y_n, $n \in \mathbb{N}$, af delmængder af X_2.

Vi sætter nu: $S = \bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n$, $T = Y_o \cup S$ og $U = X_1 \setminus S$

T er forsøgt illustreret som det skraverede (mørke) område på figur 1.9 (figuren kan dog af tegnemæssige årsager kun vise til og med Y_4, medens resten af Y_n 'erne antydes med prikker).
U er tilsvarende forsøgt illustreret som det ikke-skraverede område på figuren.
Der gælder, at $U = X \setminus T$, $X = U \cup T$ og $U \cap T = \emptyset$, så hvis $A \in X$, så er $A \in U$ eller $A \in T$, men A ligger ikke i begge mængder. Vi kan derfor definere en funktion φ ved:

$$\varphi(A) = \begin{cases} h(A) & , \text{ hvis } A \in T \\ A & , \text{ hvis } A \in U \end{cases}$$

hvormed vi får: $\varphi : X \to X_1$ (idet $U \subseteq X_1$ og $h : X \to X_2 \subseteq X_1$).

Vi vil nu bevise, at φ er både injektiv og surjektiv.
Lad $B \in X_1$ være vilkårlig valgt. Idet $X_1 = S \cup U$, vil B ligge enten i S eller i U.

Hvis $B \in S = \bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n$, så findes et $n \in \mathbb{N}$, så $B \in Y_n = h(Y_{n-1})$, dvs. der findes et $A \in Y_{n-1}$, så $B = h(A)$. Da $Y_{n-1} \subseteq T$, er $A \in T$, hvoraf vi ser, at $\varphi(A) = h(A) = B$. Hvis $B \in U$, så er $B = \varphi(B)$.
I alt ser vi altså, at der findes et element A i X, så $\varphi(A) = B$. Vi har hermed vist, at φ er surjetiv.

Lad $A_1, A_2 \in X$ være vilkårlig valgt, så $A_1 \neq A_2$. Vi skal da vise, at $\varphi(A_1) \neq \varphi(A_2)$.
Da $X = U \cup T$, er der flere muligheder: Hvis $A_1, A_2 \in U$, så har vi: $\varphi(A_1) = A_1 \neq A_2 = \varphi(A_2)$.
Vi kan også have $A_1 \in U$ og $A_2 \in T$ (eller omvendt). I denne situation får vi: $\varphi(A_1) = A_1 \in U$, men da $A_2 \in T$ får vi af definitionen af T (se ovenfor), at der findes et $n \geq 0$, så $A_2 \in Y_n$, og dermed at $\varphi(A_2) = h(A_2) \in Y_{n+1} \subseteq T$. Da vi ved, at $U \cap T = \emptyset$ må vi derfor have, at $\varphi(A_1) \neq \varphi(A_2)$.
Endelig kan vi have: $A_1, A_2 \in T$, hvormed vi får: $\varphi(A_1) = h(A_1) \neq h(A_2) = \varphi(A_2)$, hvor vi har brugt, at h er injektiv.
I alle tilfælde gælder altså, at $\varphi(A_1) \neq \varphi(A_2)$, dvs. φ er injektiv.
Vi har nu indset, at $\varphi : X \to X_1$ både er injektiv og surjektiv, dvs. φ er en bijektion, hvormed vi får, at $X \sim X_1$
Hermed er sætningen bevist. ♥

Som et første eksempel på anvendelse af Cantor-Bernsteins sætning (sætning 1.31) vil vi vise, at følgende sætning gælder:

Sætning 1.32.

Lad X og Y være to givne mængder. Hvis $X \sim Y$, så er $\mathbb{P}(X) \sim \mathbb{P}(Y)$.

Bevis:

Da $X \sim Y$ findes der en bijektion $f : X \to Y$. Ud fra denne kan vi naturligt definere en funktion $F: \mathbb{P}(X) \to \mathbb{P}(Y)$ på følgende måde: Hvis S er en delmængde af X, dvs. hvis $S \in \mathbb{P}(X)$, så er:

$$F(S) = \{ f(A) \in Y \mid A \in S \}$$

F(S) er altså mængden af samtlige funktionsværdier af elementer fra S.
Vi vil nu vise, at F er injektiv. Lad derfor S og T være to forskellige delmængder af X, dvs. $S \neq T$ og $S, T \in \mathbb{P}(X)$. Vi skal bevise, at: $F(S) \neq F(T)$.

Da $S \neq T$, findes der enten mindst ét element $A \in S$, som ikke er element i T, dvs. $A \notin T$, eller også findes mindst ét element $B \in T$, som ikke er element i S, dvs. $B \notin S$. Vi ser her på den første situation. Den anden situation behandles tilsvarende og overlades til den flittige læser.
Da $A \in S$, er $f(A) \in F(S)$. Der gælder desuden, at $f(A) \notin F(T)$. For at indse dette antager vi det modsatte, nemlig at $f(A) \in F(T)$, og viser, at denne antagelse fører til en modstrid.
Hvis vi altså antager, at $f(A) \in F(T)$, så skulle der pr. definition af F(T) findes et element $C \in T$, hvorom der gælder, at $f(C) = f(A)$. Og da $A \notin T$, kan dette element ikke være A, hvorfor vi må have, at $C \neq A$. Vi får altså, at $f(C) = f(A)$, selvom $C \neq A$. Dette strider imod, at f er injektiv. Antagelsen $f(A) \in F(T)$ kan altså ikke gælde, hvormed vi får: $f(A) \notin F(T)$.
Da $f(A) \in F(S)$ og $f(A) \notin F(T)$ ser vi, at: $F(S) \neq F(T)$, hvormed vi har bevist, at F er injektiv.

Da vi nu har indset, at F er injektiv, ved vi, at: $\mathrm{Card}(\mathbb{P}(X)) \leq \mathrm{Card}(\mathbb{P}(Y))$.

Da X og Y optræder symmetrisk (idet $X \sim Y \Leftrightarrow Y \sim X$), kan vi på samme måde vise, at $\mathrm{Card}(\mathbb{P}(Y)) \leq \mathrm{Card}(\mathbb{P}(X))$.

Ifølge Cantor-Bernstein's sætning (sætning 1.31) får vi herefter, at $\mathrm{Card}(\mathbb{P}(X)) = \mathrm{Card}(\mathbb{P}(Y))$, dvs. $\mathbb{P}(X) \sim \mathbb{P}(Y)$. Hermed er sætningen bevist. ♥

Kapitel 2: Ækvipotens og kardinalitet – i forbindelse med de reelle tal.

Vi har allerede et par gange i kapitel 1 set på de reelle tal $\mathbb{R}$ og på visse delmængder heraf, og vi fandt bl.a. følgende resultater:

- $]-1;1[\ \sim \mathbb{R}$ (Øvelse 1.5 og Eksempel 1.6)
- $\mathbb{N} \sim \mathbb{Z}$ (Øvelse 1.15)
- Card($\mathbb{N}$) er det mindste uendelige kardinaltal (Sætning 1.27)
- $\text{Card}(\mathbb{N}) < \text{Card}(\mathbb{P}(\mathbb{N}))$ (Konsekvens af Sætning 1.29).

Vi skal i dette kapitel udbygge og kommentere disse resultater. Vi starter med at se på nummerable delmængder af de reelle tal $\mathbb{R}$ og af planens punkter $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (som også kan skrives: $\mathbb{R}^2$).
Der gælder i denne sammenhæng følgende sætning:

<u>Sætning 2.1.</u>
Mængden af rationale tal $\mathbb{Q}$ er nummerabel, og mængden af alle talpar $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ af hele tal er nummerabel, dvs. der gælder at:

$$\mathbb{N} \sim \mathbb{Q} \sim \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

Bevis: Hvis vi indtegner $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ i et koordinatsystem som vist på figur 2.1, og hvis vi lader $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ være defineret ved, at f(n) er det n'te talpar, man kommer til ved at følge spiralen inde fra (0,0) og udefter, så er f klart både injektiv og surjektiv, hvormed vi har: $\mathbb{N} \sim \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

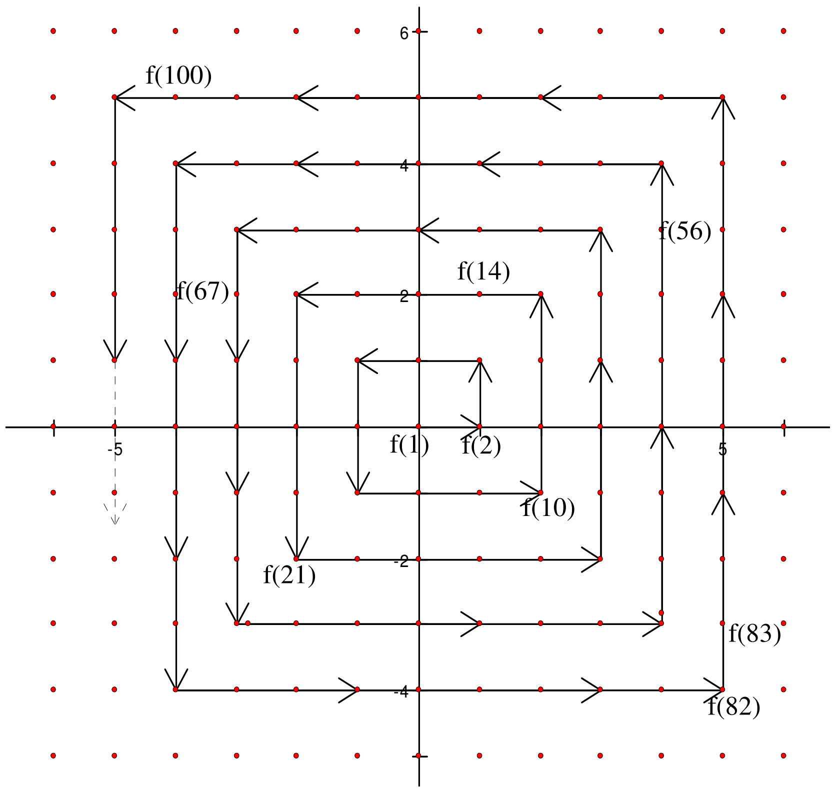


Fig. 2.1

Vi vil nu vise, at $\mathbb{Q} \sim \mathbb{N}$ på to måder:

<u>1. metode:</u> Som nævnt i Appendix 1, kan ethvert $q \in \mathbb{Q}$ skrives på formen: $q = \frac{m}{n}$, hvor $m, n \in \mathbb{Z}$

For ethvert $q \in \mathbb{Q}$ vil vi nu <u>kun</u> betragte <u>den</u> opskrivning, hvor brøken $\frac{m}{n}$ er uforkortelig og $n > 0$.
Hvis vi herefter definerer funktionen $g : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ved: $g(q) = (m, n)$, så er g injektiv (overvej !!).
Vi får hermed, at $\text{Card}(\mathbb{Q}) \leq \text{Card}(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$.

Ifølge første del af beviset har vi $\mathbb{N} \sim \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, og dermed, at $\text{Card}(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) = \text{Card}(\mathbb{N})$. Kombineres dette med resultatet: $\text{Card}(\mathbb{Q}) \leq \text{Card}(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$ får vi i alt, at $\text{Card}(\mathbb{Q}) \leq \text{Card}(\mathbb{N})$.

Omvendt har vi, idet $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Q}$, at $\text{Card}(\mathbb{N}) \leq \text{Card}(\mathbb{Q})$.

Ifølge Cantor-Bernstein's sætning (sætning 1.31) får vi herefter i alt, at $\text{Card}(\mathbb{N}) = \text{Card}(\mathbb{Q})$, dvs. $\mathbb{N} \sim \mathbb{Q}$.

<u>2. Metode:</u> Hvert punkt $(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, hvor $n \neq 0$, bestemmer et rationalt tal $q = \frac{m}{n}$.
Da f.eks. $\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$, $\frac{-22}{5} = \frac{22}{-5} = -\frac{22}{5}$ og $0 = \frac{0}{3} = \frac{0}{7}$, vil <u>forskellige</u> punkter i $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ undertiden bestemme <u>samme</u> rationale tal. Vi vil nu bevæge os ud langs spiralen på figur 2.1 på en sådan måde, at vi <u>kun</u> vil betragte (medtage) de talpar, der på ovennævnte måde bestemmer et rationalt tal, som ikke allerede er forekommet. På denne måde får alle rationale tal med (overvej !).
Vi definerer nu funktionen $g : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ ved, at g(n) er det n'te rationale tal, vi bestemmer på den omtalte måde på vej ud langs spiralen.
Vi har f.eks.: $g(1) = \frac{1}{1} = 1$, $g(2) = \frac{0}{1} = 0$, $g(3) = \frac{-1}{1} = -1$, $g(4) = \frac{2}{-1} = -2$, $g(5) = \frac{2}{1} = 2$,
$g(6) = \frac{1}{2}$, $g(7) = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$, $g(8) = \frac{3}{-2} = -\frac{3}{2}$, …. (Kontrollér disse tal ved at følge spiralen).

Funktionen g er både injektiv og surjektiv (overvej), hvilket giver os: $\mathbb{N} \sim \mathbb{Q}$.

Hermed er sætningen bevist. ♥

<u>Øvelse 2.2.</u>
Argumenter for, at $\mathbb{N} \sim \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ på hver af følgende tre måder:

a) Efter samme princip som anvendt i begyndelsen af beviset for sætning 2.1.
b) Ved anvendelse af sætning 1.8 og 2.1
c) Ved at vise, at funktionen $\psi(m, n) = 2^{m-1} \cdot (2n - 1)$ er en bijektion af $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ på $\mathbb{N}$.

Argumenter desuden for, at $\mathbb{N} \sim \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, dvs. at $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ er nummerabel. ♥

Selvom der er ”mange” rationale tal (bl.a. er alle endelige decimalbrøker som. f.eks. 21,768987 og –3456,4536756 rationale tal), så er der ifølge sætning 2.1. ikke flere af dem, end at de er nummerable.

Ifølge Appendix 3 ved vi, at de rationale tal $\mathbb{Q}$ ligger tæt i de reelle tal $\mathbb{R}$, dvs. uanset hvor tæt på hinanden vi tager to forskellige reelle ral, så findes der et rationalt tal imellem (ja, der findes endda uendeligt mange, jfr. sætning A.3.6). Men alligevel er der som vist ikke flere af dem, end at de er nummerable. Det kunne derfor være nærliggende at spørge, om de reelle tal også er nummerable. Svaret på dette spørgsmål er imidlertid nej, idet der gælder følgende sætning:

<u>Sætning 2.3.</u>

Kardinaliteten af de reelle tal er større end kardinaliteten af de naturlige tal, dvs.

$$\mathrm{Card}(\mathbb{N}) < \mathrm{Card}(\mathbb{R})$$

Bevis: Da $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$ har vi, at $\mathrm{Card}(\mathbb{N}) \le \mathrm{Card}(\mathbb{R})$.

For at bevise sætningen, skal vi altså bevise, at $\mathrm{Card}(\mathbb{N}) = \mathrm{Card}(\mathbb{R})$ <u>ikke</u> er opfyldt.

Vi giver to forskellige beviser, som begge er indirekte, dvs. vi antager, at $\mathrm{Card}(\mathbb{N}) = \mathrm{Card}(\mathbb{R})$ gælder, og viser, at dette fører til en logisk modstrid.

Vi antager altså, at $\mathbb{R}$ er nummerabel og skal så vise, at dette giver en modstrid.

<u>1. Metode (Cantor’s diagonalbevis):</u>

Da enhver delmængde af en nummerabel mængde enten er endelig eller nummerabel, vil – ifølge vores forudsætning – enhver delmængde af de reelle tal også være endelig eller nummerabel. Dette gælder specielt, hvis vi ser på den delmængde S, der består af alle tal a, der kan skrives på formen: $a = 0{,}s_1 s_2 s_3 s_4 s_5 \ldots\ldots\ldots s_n \ldots\ldots\ldots$, hvor alle s_n enten er tallet 1 eller 2. Mængden S består altså af tal mellem 0 og 1, der kan skrives som uendelige decimalbrøker, hvor cifrene efter kommaet enten er 1-taller eller 2-taller. (F.eks. 0,1121122211222122221122222112111……….).

Ifølge forudsætningen er mængden S nummerabel, (idet S ikke er endelig – overvej !). Vi kan altså nummerere elementerne i S og dermed skrive: $S = \{a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots\ldots, a_n, \ldots\ldots\}$, hvor hver element a_n er et tal på den angivne form.

Vi kan altså nu opskrive elementerne i S på følgende skematiske måde:

$$\begin{aligned}
a_1 &= 0{,}s_{11}\, s_{12}\, s_{13}\, s_{14}\, s_{15} \ldots\ldots\ldots s_{1n} \ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_2 &= 0{,}s_{21}\, s_{22}\, s_{23}\, s_{24}\, s_{25} \ldots\ldots s_{2n} \ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_3 &= 0{,}s_{31}\, s_{32}\, s_{33}\, s_{34}\, s_{35} \ldots\ldots\ldots s_{3n} \ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_4 &= 0{,}s_{41}\, s_{42}\, s_{43}\, s_{44}\, s_{45} \ldots\ldots s_{4n} \ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_5 &= 0{,}s_{51}\, s_{52}\, s_{53}\, s_{54}\, s_{55} \ldots\ldots\ldots s_{5n} \ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\ldots\ldots \\
a_n &= 0{,}s_{n1}\, s_{n2}\, s_{n3}\, s_{n4}\, s_{n5} \ldots\ldots s_{nn} \ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\ldots\ldots
\end{aligned}$$

hvor $s_{ij} = 1$ eller $s_{ij} = 2$ for alle $i, j \in \mathbb{N}$.

Ifølge forudsætningen har vi alle elementer i mængden S (dvs. tal af den givne type) stående i denne opskrivning. Hvis vi nu kan demonstrere, at der findes et tal b på den ønskede form, som ikke står i denne opskrivning, så har i en modstrid, nemlig at mængden S skulle være nummerabel.
Vi skal altså for at afslutte beviset finde et sådant tal b. Dette gøres på følgende måde:
Tallet b defineres til at være på formen $b = 0,b_1b_2b_3....b_n.....$, hvor der for hvert $n \in \mathbb{N}$ gælder:

$$b_n = \begin{cases} 1 & \text{hvis } s_{nn} = 2 \\ 2 & \text{hvis } s_{nn} = 1 \end{cases}$$

Tallet b defineres altså på en måde, så det har den rigtige form til at tilhøre mængden S, men så det på mindst én plads i decimalerne (den der svarer til diagonalen i skemaet) har en værdi, der er forskellig fra den tallene $a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...$ har. Dermed opnår vi, at $b \neq a_n$ for alle $n \in \mathbb{N}$.
Tallet b tilhører mængden S, men det er ikke et af de opskrevne elementer. Hermed er den ønskede modstrid opnået og beviset slut.

2. Metode: (Intervalsammensnævring).
Da de reelle tal $\mathbb{R}$ ifølge antagelsen er nummerable, kan vi opskrive $\mathbb{R}$ på følgende måde:

$$\mathbb{R} = \{x_1, x_2, x_3, x_4, ..., x_n, ...\}$$

Lad nu $[a_1, b_1]$ være et lukket interval, der ikke indeholder x_1 (se figur 2.2)

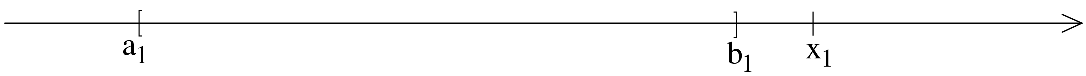


Fig. 2.2

Enten er $x_2 \in [a_1, b_1]$ eller også er $x_2 \notin [a_1, b_1]$. I begge tilfælde kan vi finde et lukket delinterval $[a_2, b_2] \subseteq [a_1, b_1]$, så $x_2 \notin [a_2, b_2]$ – og så længden af $[a_2, b_2]$ højst er det halve af længden af $[a_1, b_1]$ (overvej – og se figur 2.3.):

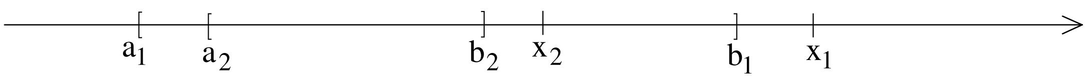


Fig. 2.3

Enten er $x_3 \in [a_2, b_2]$ eller også er $x_3 \notin [a_2, b_2]$. I begge tilfælde kan vi på samme måde som før finde et lukket delinterval $[a_3, b_3] \subseteq [a_2, b_2]$, så $x_3 \notin [a_3, b_3]$ – og så længden af $[a_3, b_3]$ højst er det halve af længden af $[a_2, b_2]$.

På denne måde fortsættes. Vi får da en følge af intervaller $I_n = [a_n, b_n]$, der opfylder tre ting:

- $I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \supseteq .... \supseteq I_n \supseteq I_{n+1} \supseteq ....$
- For alle $n \in \mathbb{N}$ gælder: Længden af I_{n+1} er højst halvt så stor som længden af I_n
- For alle $n \in \mathbb{N}$: $x_n \notin I_n$

Ifølge definition A.3.7 udgør de omtalte intervaller en intervalruse, og ifølge aksiom A.3.8 fastlægger den netop ét tal, som ligger i alle intervallerne, dvs. vi har et tal $y \in \mathbb{R}$, som opfylder, at $y \in I_n$ for alle $n \in \mathbb{N}$. Men da $x_n \notin I_n$, vil der gælde, at $y \neq x_n$ for alle $n \in \mathbb{N}$.
Vi har altså nu fundet et $y \in \mathbb{R}$, som opfylder, at $y \notin \{x_1, x_2, x_3, x_4, ..., x_n, ...\} = \mathbb{R}$
Vores antagelse om, at $\mathbb{R}$ er nummerabel, har altså ført os til en modstrid, hvormed antagelsen ikke kan gælde.
Hermed er sætningen bevist. ♥

De reelle tal $\mathbb{R}$ har altså større kardinalitet end de naturlige tal $\mathbb{N}$, og dermed større kardinalitet end de rationale tal $\mathbb{Q}$. Der er altså "mange flere" reelle tal end rationale tal, selvom de rationale tal ligger tæt i de reelle tal. Det kunne nu være interessant at spørge om: Hvad så med de irrationale tal ?

I første omgang får vi følgende sætning, der er en umiddelbar konsekvens af sætning 2.3:

Sætning 2.4.

De irrationale tal $\mathbb{I}$ er hverken endelige eller nummerable, og $\text{Card}(\mathbb{I}) > \text{Card}(\mathbb{Q})$.

Bevis:
At de irrationale tal ikke er endelige ses f.eks. af sætning A.3.6.
At de irrationale tal ikke er nummerable kan indses på følgende måde:
Vi ved at de rationale tal $\mathbb{Q}$ er nummerable. Hvis de irrationale tal $\mathbb{I}$ også var nummerable, så ville vi ifølge øvelse 1.16 få, at så ville $\mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$ være nummerabel. Men da $\mathbb{R} = \mathbb{I} \cup \mathbb{Q}$, ville $\mathbb{R}$ dermed være nummerabel, og det ved vi ikke gælder. $\mathbb{I}$ kan altså ikke være nummerabel. Sidste del af sætningen er blot en anden måde at angive det fundne resultat på. Hermed er sætningen bevist. ♥

De irrationale tal har altså også større kardinalitet end de rationale tal, og da $\mathbb{I} \subseteq \mathbb{R}$ ved vi, at $\mathbb{I}$ højst har samme kardinalitet som de reelle tal. Der gælder med andre ord:

$$\text{Card}(\mathbb{Q}) < \text{Card}(\mathbb{I}) \leq \text{Card}(\mathbb{R})$$

Et spørgsmål, der naturligt rejser sig her, er så: Er $\text{Card}(\mathbb{I}) < \text{Card}(\mathbb{R})$? Svaret på dette spørgsmål er nej, som vi skal se lidt senere. Men for at vise dette skal vi først vise følgende væsentlige sætning om de reelle tal:

Sætning 2.5.

Der gælder, at: $\mathbb{R} \sim \left]0,1\right[\sim \left[0,1\right] \sim \left[0,1\right[\sim \left]0,1\right]$

Bevis:

Ifølge øvelse 1.5 og eksempel 1.6 er $]-1,1[\sim \mathbb{R}$.

Hvis vi betragter funktionen $f:]-1,1[\to]0,1[$ defineret ved: $f(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x$, så er f en bijektion (overvej !). Derfor er $]-1,1[\sim]0,1[$. Ifølge sætning 1.7 får vi herefter, at $\mathbb{R} \sim]0,1[$.

At $]0,1[\sim [0,1]$ kan vises på to måder:

<u>1. metode:</u> Lad X være mængden defineret ved: $X =]0,1[\setminus \{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\}$. Vi har da:

$[0,1] = \{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\} \cup X$ og $]0,1[= \{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\} \cup X$

Vi definerer nu en funktion $g: [0,1] \to]0,1[$ efter følgende "diagram":

$$
\begin{array}{lcl}
[0,1] & = & \{0,\ 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\} \ \cup \ X \\
g:\ \downarrow & & \ \ \downarrow\ \ \downarrow\ \ \downarrow\ \ \downarrow\ \ \downarrow \qquad \downarrow \qquad\qquad \downarrow \\
]0,1[& = & \{\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{5},\ \frac{1}{6}, \ldots, \frac{1}{n+2}, \ldots\} \cup X
\end{array}
$$

dvs.

$$
g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{hvis } x = 0 \\ \dfrac{1}{n+2} & \text{hvis } x = \dfrac{1}{n}\text{, for alle } n \in \mathbb{N} \\ x & \text{ellers, dvs. hvis } x \in X \end{cases}
$$

Funktionen g er da klart både injektiv og surjektiv, hvormed vi får: $]0,1[\sim [0,1]$

<u>2. metode:</u> Da $]0,1[\subseteq [0,1]$ har vi: $\mathrm{Card}(]0,1[) \le \mathrm{Card}([0,1])$.

Tilsvarende indses, at $\mathrm{Card}([0,1]) \le \mathrm{Card}(\mathbb{R})$. Da vi ovenfor har set, at $\mathbb{R} \sim]0,1[$, får vi hermed (overvej !), at $\mathrm{Card}([0,1]) \le \mathrm{Card}(]0,1[)$.

Anvender vi nu Cantor-Bernstein's sætning (sætning 1.31) får vi det ønskede: $]0,1[\sim [0,1]$

At $[0,1] \sim [0,1[$ kan også vises på to måder. Vi viser her et argument svarende til 2. metode i det foregående, og overlader til læseren at konstruere en bijektion (efter samme princip som i 1. metode).

Da $[0,1[\subseteq [0,1]$ har vi: $\mathrm{Card}([0,1[) \le \mathrm{Card}([0,1])$.

Da $]0,1[\subseteq [0,1[$ har vi: $\mathrm{Card}(]0,1[) \le \mathrm{Card}([0,1[)$, og da vi ifølge det foregående har $[0,1] \sim]0,1[$, kan vi konkludere, at: $\mathrm{Card}([0,1]) \le \mathrm{Card}([0,1[)$.

Ved anvendelse af Cantor-Bernstein's sætning for vi herefter det ønskede: $[0,1] \sim [0,1[$

Endelig får vi: $[0,1[\sim]0,1]$ idet funktionen h: $[0,1[\to]0,1]$ defineret ved: $h(x) = 1 - x$ både er injektiv og surjektiv (overvej !).
Hermed er sætningen bevist. ♥

Øvelse 2.6.
Denne øvelse er kun for læsere, der kender til differentialregning, grænseværdier o.lign. Øvrige læsere kan tegne grafen for den omtalte funktion og via tegningen se rimeligheden i påstanden.

Vis, at funktionen:

$$f(x) = \frac{2x-1}{2x(x-1)}$$

er en bijektion af $]0,1[$ på $\mathbb{R}$. ♥

Vi vender nu tilbage til spørgsmålet om kardinaliteten af de irrationale tal. Der gælder som omtalt følgende sætning:

Sætning 2.7.

De irrationale tal $\mathbb{I}$ har samme kardinalitet som de reelle tal $\mathbb{R}$, dvs. $\mathbb{I} \sim \mathbb{R}$

Bevis: Da $\mathbb{I} \subseteq \mathbb{R}$ har vi, (som tidligere omtalt): $\text{Card}(\mathbb{I}) \leq \text{Card}(\mathbb{R})$

For at vise, at $\text{Card}(\mathbb{R}) \leq \text{Card}(\mathbb{I})$ benytter vi, at vi ifølge sætning 2.5 har: $\mathbb{R} \sim]0,1[$, hvormed vi kan nøjes med at bevise, at $\text{Card}(]0,1[) \leq \text{Card}(\mathbb{I})$.

Vi skal altså vise, at der findes en injektiv funktion fra $]0,1[$ ind i $\mathbb{I}$.

Lad I_o være mængden af irrationale tal i $]0,1[$, og lad tilsvarende Q_o være mængden af rationale tal i $]0,1[$. Vi har da, at: $]0,1[\; = I_o \cup Q_o$, samt at $I_o \cap Q_o = \emptyset$.

Vi definerer nu f: $]0,1[\to \mathbb{I}$ på følgende måde:

$$f(r) = \begin{cases} r+3 & \text{for } r \in I_o \\ r+\sqrt{2} & \text{for } r \in Q_o \end{cases}$$

og vil vise, at f er en injektiv funktion fra $]0,1[$ ind i $\mathbb{I}$..

f er veldefineret i hele $]0,1[$, idet der som nævnt gælder: $]0,1[\; = I_o \cup Q_o$ og $I_o \cap Q_o = \emptyset$.
At f(r) er et irrationalt tal indses således:
Hvis $r \in \mathbb{I}$, så har vi også $r + 3 \in \mathbb{I}$, idet hvis $r + 3 \in \mathbb{Q}$ skulle gælde, så ville $(r + 3) - 3 \in \mathbb{Q}$ (idet $\mathbb{Q}$ er afsluttet overfor subtraktion, jfr. indledningen til Appendix 3), dvs. vi ville få: $r \in \mathbb{Q}$, og det gælder ikke. Hvis $r \in \mathbb{Q}$, så har vi ifølge sætning A.3.2 (hvor vi sætter n = 1), at $r + \sqrt{2} \in \mathbb{I}$.
For begge de to muligheder for værdien af f(r) får vi altså et irrationalt tal.

Vi mangler nu blot at vise, at f er injektiv.
Lad da r_1 og r_2 være to vilkårligt, valgte reelle tal, hvorom der gælder: $r_1, r_2 \in \left]0,1\right[$ og $r_1 \neq r_2$
Vi skal da vise, at $f(r_1) \neq f(r_2)$.
Hvis r_1 og r_2 begge tilhører I_o, så har vi: $f(r_1) = r_1 + 3$ og $f(r_2) = r_2 + 3$, og dermed $f(r_1) \neq f(r_2)$, da $r_1 \neq r_2$
Hvis r_1 og r_2 begge tilhører Q_o, så har vi: $f(r_1) = r_1 + \sqrt{2}$ og $f(r_2) = r_2 + \sqrt{2}$, og dermed $f(r_1) \neq f(r_2)$, da $r_1 \neq r_2$
Hvis $r_1 \in I_o$ og $r_2 \in Q_o$, så har vi: $f(r_1) = r_1 + 3$ og $f(r_2) = r_2 + \sqrt{2}$. Da $0 < r_1$ ser vi, at $r_1 + 3 > 3$ og da $r_2 < 1$ ser vi, at $r_2 + \sqrt{2} < 1 + \sqrt{2} < 3$ (idet $1 + \sqrt{2} \approx 2{,}4142$). I alt ser vi dermed, at $f(r_1) > 3 > f(r_2)$, og dermed specielt at $f(r_1) \neq f(r_2)$.
Hvis $r_1 \in Q_o$ og $r_2 \in I_o$ gives et tilsvarende argument.
Vi har hermed vist, at f er injektiv, hvormed vi alt i alt har vist, at $\mathrm{Card}(\mathbb{R}) \leq \mathrm{Card}(\mathbb{I})$.

Da vi nu ved, at $\mathrm{Card}(\mathbb{R}) \leq \mathrm{Card}(\mathbb{I})$ og at $\mathrm{Card}(\mathbb{I}) \leq \mathrm{Card}(\mathbb{R})$ får vi ifølge Cantor-Bernstein's sætning, at $\mathbb{I} \sim \mathbb{R}$, hvormed sætningen er bevist. ♥

Der er altså "lige så mange" irrationale tal som reelle tal, og de har begge en kardinalitet, der er større end kardinaliteten af de naturlige og de rationale tal.

Ud fra sætning 2.5 kan vi bevise følgende interessante sætning:

Sætning 2.8.
Lad a og b være to vilkårlige reelle tal, hvorom der gælder, at a < b. Da har vi, at:

$$\mathbb{R} \sim \left]a,b\right[\sim \left[a,b\right] \sim \left[a,b\right[\sim \left]a,b\right]$$

Bevis:
For enhver delmængde Y af de reelle tal $\mathbb{R}$ gælder, at funktionen $f: Y \to \mathbb{R}$ defineret ved $f(x) = a + (b-a)\cdot x$ er injektiv.
Vi har desuden, at hver af funktionerne:

$$f\colon \left]0,1\right[\to \left]a,b\right[\quad , \quad f\colon \left[0,1\right] \to \left[a,b\right] \ , \ f\colon \left[0,1\right[\to \left[a,b\right[\ \text{ og } \ f\colon \left]0,1\right] \to \left]a,b\right]$$

er surjektive (overvej !), hvormed vi får, at

$$\left]0,1\right[\sim \left]a,b\right[\quad , \quad \left[0,1\right] \sim \left[a,b\right] \ , \ \left[0,1\right[\sim \left[a,b\right[\ \text{ og } \ \left]0,1\right] \sim \left]a,b\right]$$

Herefter følger resultatet af sætning 2.5. ♥

Øvelse 2.9.
Argumenter for, at der gælder følgende udvidelse af sætning 2.8:
Hvis a, b, c og d er givne reelle tal, hvor a < b og c < d, så gælder: $\mathbb{R} \sim \left[a,b\right] \sim \left[c,d\right]$
(og tilsvarende for de åbne eller halvåbne intervaller). ♥

Sætning 2.8 siger, at uanset længde og type, så er et interval på den reelle akse ækvipotent med $\mathbb{R}$ selv. De reelle tal er altså så "tæt pakkede", at ikke alene indeholder et nok så lille interval uendeligt mange rationale og uendeligt mange irrationale tal (jfr. sætning A.3.6), det indeholder "lige så mange" tal, som der er på hele tallinjen! Der er altså f.eks. lige så mange elementer i intervallet $[1;1,002]$ som der er i hele mængden $\mathbb{R}$, hvilket man nok ikke på forhånd havde ventet!
Man taler om, at de reelle tal har kontinuums kardinalitet (eller kontinuums mægtighed).

Definition 2.10.

Kardinaliteten af de reelle tal $\mathbb{R}$ kaldes kontinuums-kardinalitet, og den betegnes med et $\mathbf{c}$

Vi har altså: $\quad\quad \text{Card}(\mathbb{R}) = \mathbf{c}$

Ordet kontinuum kommer (ligesom ordet kontinuert) af det latinske ord continuus, der betyder sammenhængende, uafbrudt, uden "huller". De reelle tal (dvs. tallinjen) tilskrives denne egenskab, og den er af væsentlig betydning for en stor del af den moderne matematiks mange teoretiske og anvendelsesmæssige resultater. Begrebet bruges bl.a. afgørende i funktionsteori i forbindelse med kontinuitet og differentiabilitet af funktioner. Disse emner falder imidlertid helt udenfor rammerne af denne bog, og vi vil ikke komme yderligere ind herpå.

De reelle tal $\mathbb{R}$ er altså tæt pakkede, sammenhængende uden huller, hvilket man med lidt øvelse nok kan forestille sig (dvs. hvordan det ser ud og fungerer). Men når vi så ved, at $\text{Card}(\mathbb{R}) < \text{Card}(\mathbb{P}(\mathbb{R}))$, kan vi stille spørgsmålet: Hvordan ser $\mathbb{P}(\mathbb{R})$ så ud (dvs. hvilke egenskaber har denne mængde) ?
Vi lader dette spørgsmål blive hængende til interesserede læseres overvejelse.

Endnu mere overraskende end det ovenstående resultat (sætning 2.8 og konsekvenser heraf) er det måske, at planen $\mathbb{R}\times\mathbb{R} = \mathbb{R}^2$, der består af kontinuum-uendeligt mange tallinjer, der hver for sig indeholder kontinuum-uendeligt mange tal, heller ikke "indeholder flere punkter" end de reelle tal, altså at der gælder følgende sætning:

Sætning 2.11.

Om de reelle tal $\mathbb{R}$ gælder: $\mathbb{R} \sim \mathbb{R}^2$

Bevis:
Vi starter med at bevise, at $]0,1] \times]0,1] \sim]0,1]$.

Ethvert tal $x \in]0,1]$ kan skrives som en uendelig decimalbrøk $x = 0,x_1\,x_2\,x_3\,x_4\,x_5 \dots x_n \dots$
Hvis f.eks. $x = 0,5738016\dots$, så er $x_1 = 5$, $x_2 = 7$, $x_3 = 3$, $x_4 = 8$, $x_5 = 0$, osv. osv.

Et tal $x \in]0,1]$ kan eventuelt have to uendelige decimalbrølsfremstillinger. F.eks. har vi, at

$\frac{1}{4} = 0{,}250000000000\ldots\ldots.$ og $\frac{1}{4} = 0{,}249999999999999\ldots\ldots\ldots.$

For at kunne konstruere en veldefineret funktion, må vi vælge en af fremstillingerne. Vi vælger den sidste. Opskrevet på denne måde har vi da f.eks.:

$1 = 0{,}9999999999999999999\ldots\ldots\ldots.$ og $0{,}468 = 0{,}4679999999999999999999\ldots\ldots\ldots$

Omvendt vil ethvert tal $0, t_1\, t_2\, t_3\, t_4\, t_5 \ldots. t_n \ldots..$, hvor vi ikke har nuller fra et vist trin af, være indeholdt i $]0,1]$.

Lad nu $(x,y) \in]0,1] \times]0,1]$ være vilkårligt valgt. Vi har da:

$$x = 0, x_1\, x_2\, x_3\, x_4\, x_5 \ldots. x_n \ldots.. \quad \text{og} \quad y = 0, y_1\, y_2\, y_3\, y_4\, y_5 \ldots. y_n \ldots..$$

hvor x og y er opskrevet som beskrevet ovenfor.
Vi definerer nu $f\colon]0,1] \times]0,1] \to]0,1]$ ved:

$$f((x,y)) = 0, x_1\, y_1\, x_2\, y_2 x_3\, y_3\, x_4\, y_4\, x_5\, y_5 \ldots. x_n\, y_n \ldots..$$

Funktionsværdien $f((x,y))$ opnås altså ved at opskrive decimalerne skiftevis fra x og y.
Hvis f.eks. $x = 0{,}4380514\ldots..$ og $y = 0{,}2899819\ldots..$, så er $f((x,y)) = 0{,}42388909581149\ldots\ldots.$

Vi vil nu vise, at f er injektiv: Lad (x,y) og (s,t) være vilkårligt valgte punkter i $]0,1] \times]0,1]$, som opfylder, at $(x,y) \neq (s,t)$. Da gælder enten, at $x \neq s$ eller $y \neq t$. Vi antager det første. I opskrivningen af x og s vil der derfor være en decimalplads, hvor der står forskellige tal. Lad os kalde denne plads nr. n. Vi har da, at $x_n \neq s_n$. Hermed får vi, at $f((x,y)) = 0, x_1\, y_1\, x_2\, y_2 x_3\, y_3 \ldots. x_n\, y_n \ldots..$ og $f((s,t)) = 0, s_1\, t_1\, s_2\, t_2 s_3\, t_3 \ldots. s_n\, t_n \ldots..$ har forskellige tal stående på den 2n–1'te plads, og dermed, at $f((x,y)) \neq f((s,t))$. Hvis $y \neq t$ får vi på samme måde, at $f((x,y)) \neq f((s,t))$.
Vi har dermed indset, at f er injektiv.

Da f er injektiv, har vi: $\text{Card}(]0,1] \times]0,1]) \leq \text{Card}(]0,1])$
At der også gælder: $\text{Card}(]0,1]) \leq \text{Card}(]0,1] \times]0,1])$ indses ved at betragte funktionen $g\colon]0,1] \to]0,1] \times]0,1]$ defineret ved: $g(x) = (x,1)$ (se figur 2.4 øverst på næste side).

Da det er indlysende, at g er injektiv, får vi som ønsket: $\text{Card}(]0,1]) \leq \text{Card}(]0,1] \times]0,1])$.
Ved anvendelse af Cantor-Bernstein's sætning (sætning 1.31) får vi nu alt i alt, at:
$]0,1] \times]0,1] \sim]0,1]$

Da vi ifølge sætning 2.5 har, at $\mathbb{R} \sim]0,1]$, får vi ifølge sætning 1.8, at $\mathbb{R}^2 \sim]0,1] \times]0,1]$.

Af det netop beviste resultat får vi herefter, at: $\mathbb{R}^2 \sim]0,1]$. I alt har vi dermed, at $\mathbb{R} \sim \mathbb{R}^2$, hvormed sætningen er bevist. ♥

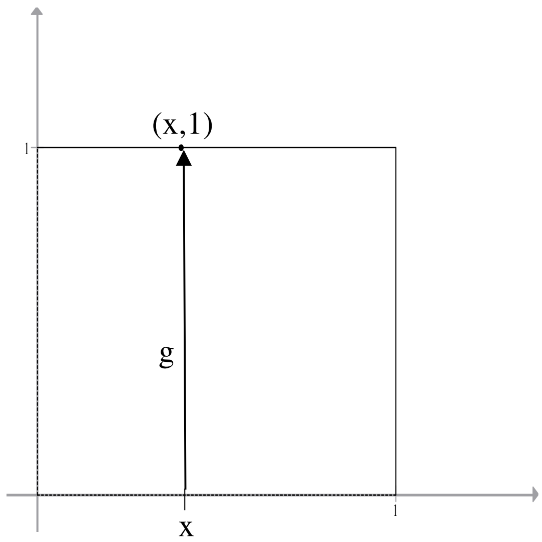


Fig. 2.4

Som den følgende øvelse viser, er der heller ikke i det 3-dimetionale rum $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R} = \mathbb{R}^3$ flere punkter end der er i $\mathbb{R}$:

Øvelse 2.12.
Vis – efter samme princip som i beviset for sætning 2.11 –, at $\mathbb{R} \sim \mathbb{R}^3$ ♥

Vi vender nu tilbage til resultatet af sætning 1.29: $\mathrm{Card}(\mathbb{N}) < \mathrm{Card}(\mathbb{P}(\mathbb{N}))$. Der er her tale om to uendelige "tal", hvoraf det ene åbenbart er mere uendeligt end det andet. Ifølge sætning 2.3 har vi tilsvarende, at $\mathrm{Card}(\mathbb{N}) < \mathrm{Card}(\mathbb{R})$. Et naturligt spørgsmål kunne derfor være, om de to kardinaltal $\mathrm{Card}(\mathbb{P}(\mathbb{N}))$ og $\mathrm{Card}(\mathbb{R})$ kan sammenlignes, og hvordan de i givet fald forholder sig størrelsesmæssigt til hinanden, f.eks.:

$\mathrm{Card}(\mathbb{N}) < \mathrm{Card}(\mathbb{P}(\mathbb{N})) < \mathrm{Card}(\mathbb{R})$, $\mathrm{Card}(\mathbb{P}(\mathbb{N})) = \mathrm{Card}(\mathbb{R})$ eller $\mathrm{Card}(\mathbb{R}) < \mathrm{Card}(\mathbb{P}(\mathbb{N}))$?

Som vi skal se i den følgende sætning, viser det sig, at der gælder: $\mathrm{Card}(\mathbb{P}(\mathbb{N})) = \mathrm{Card}(\mathbb{R})$

Sætning 2.13.

Der gælder, at: $\mathbb{P}(\mathbb{N}) \sim \mathbb{R}$, dvs. $\mathrm{Card}(\mathbb{P}(\mathbb{N})) = \mathrm{Card}(\mathbb{R}) = \mathbf{c}$

Bevis:
Vi viser først, at $\mathrm{Card}(\mathbb{P}(\mathbb{N})) \leq \mathrm{Card}(\mathbb{R})$. Vi definerer en funktion $f: \mathbb{P}(\mathbb{N}) \to \mathbb{R}$ ved:

$$f(X) = 0,x_1\,x_2\,x_3\,x_4 \ldots\ldots x_n \ldots\ldots \qquad \text{hvor} \quad x_n = \begin{cases} 2 & \text{hvis} \ \ n \notin X \\ 5 & \text{hvis} \ \ n \in X \end{cases}$$

når X er et vilkårligt element i $\mathbb{P}(\mathbb{N})$, dvs. X er en vilkårlig delmængde af $\mathbb{N}$. (Hvis vi f.eks. har, at $X = \{2,4,5,8,9,13,15\}$, så er f(X) = 0,252552255222525222222……..)

f er injektiv, idet hvis X og Y er to delmængder af $\mathbb{N}$, hvor $X \neq Y$, så er der mindst ét element i en af mængderne, som ikke er i den anden. Vi kan f.eks. sige, at det naturlige tal $k \in X$ og $k \notin Y$. Da gælder, at tallet f(X) har et 5-tal på den k'te plads efter kommaet, hvorimod tallet f(Y) har et 2-tal på den k'te plads. Og dette betyder, at $f(X) \neq f(Y)$.

Vi har hermed indset, at f er injektiv, og dermed får vi, at $\text{Card}(\mathbb{P}(\mathbb{N})) \leq \text{Card}(\mathbb{R})$.

Vi vil herefter bevise, at $\text{Card}(\mathbb{R}) \leq \text{Card}(\mathbb{P}(\mathbb{N}))$. Vi bemærker her først, at da $\mathbb{N} \sim \mathbb{Q}$ (jfr. sætning 2.1), så får vi af sætning 1.32, at $\mathbb{P}(\mathbb{N}) \sim \mathbb{P}(\mathbb{Q})$, dvs. $\text{Card}(\mathbb{P}(\mathbb{N})) = \text{Card}(\mathbb{P}(\mathbb{Q}))$.

Hvis vi kan vise, at $\text{Card}(\mathbb{R}) \leq \text{Card}(\mathbb{P}(\mathbb{Q}))$, så er det ønskede altså opnået.

For at gøre dette definerer vi funktionen $g: \mathbb{R} \to \mathbb{P}(\mathbb{Q})$ på følgende måde:

For ethvert reel tal $r \in \mathbb{R}$ sætter vi: $\quad g(r) = \{ q \in \mathbb{Q} \mid q < r \}$

Da g(r) pr. definition er en delmængde af $\mathbb{Q}$, skal vi blot vise, at g er injektiv.

Lad da s og t være to vilkårligt valgte reelle tal, hvor $s \neq t$. Vi har da enten, at $s < t$ eller $t < s$. Vi antager det første, dvs. $s < t$ (beviset i den anden situation er helt analogt).

Ifølge sætning A.3.4 1) findes der et $p \in \mathbb{Q}$, som opfylder: $s < p < t$.

Om dette tal p gælder altså, at $p \in \{ q \in \mathbb{Q} \mid q < t \}$ og at $p \notin \{ q \in \mathbb{Q} \mid q < s \}$, hvoraf vi ser, at $\{ q \in \mathbb{Q} \mid q < t \} \neq \{ q \in \mathbb{Q} \mid q < s \}$, dvs. $g(t) \neq g(s)$. Funktionen g er altså injektiv.

Vi ved nu, at $\text{Card}(\mathbb{P}(\mathbb{N})) \leq \text{Card}(\mathbb{R})$ og $\text{Card}(\mathbb{R}) \leq \text{Card}(\mathbb{P}(\mathbb{N}))$. Ifølge Cantor-Bernstein's sætning (sætning 1.31) får vi herefter, at $\text{Card}(\mathbb{P}(\mathbb{N})) = \text{Card}(\mathbb{R})$, og dermed også, at $\mathbb{P}(\mathbb{N}) \sim \mathbb{R}$.

Hermed er sætningen bevist. ♥

Vi vil nu gå over til at tale om den såkaldte "kontinuumshypotese", der først blev formuleret af Cantor. For at få hul på problemstillingen vil vi resumere to sæt resultater fra det foregående:

- I begyndelsen af beviset for sætning 2.13 så vi, at $\text{Card}(\mathbb{P}(\mathbb{N})) \leq \text{Card}(\mathbb{R})$, og vi vidste på forhånd (jfr. Sætning 1.29), at: $\text{Card}(\mathbb{N}) < \text{Card}(\mathbb{P}(\mathbb{N}))$. Vi indså altså alt i alt, at:

  $$\text{Card}(\mathbb{N}) < \text{Card}(\mathbb{P}(\mathbb{N})) \leq \text{Card}(\mathbb{R})$$

  En <u>mulighed</u> ville derfor være: $\text{Card}(\mathbb{N}) < \text{Card}(\mathbb{P}(\mathbb{N})) < \text{Card}(\mathbb{R})$, men alligevel viste det sig (jfr. Sætning 2.13), at vi fik: $\text{Card}(\mathbb{P}(\mathbb{N})) = \text{Card}(\mathbb{R})$.

- Ifølge sætning 2.1 og sætning 2.4 ved vi, at Card($\mathbb{N}$) = Card($\mathbb{Q}$) < Card($\mathbb{I}$), og da $\mathbb{I} \subseteq \mathbb{R}$ ved vi også, at Card($\mathbb{I}$) $\leq$ Card($\mathbb{R}$). I alt ved vi altså, at:

  $$\text{Card}(\mathbb{N}) < \text{Card}(\mathbb{I}) \leq \text{Card}(\mathbb{R})$$

  En mulighed ville derfor tilsvarende være: Card($\mathbb{N}$) < Card($\mathbb{I}$) < Card($\mathbb{R}$), men også her viste det sig (jfr. sætning 2.7), at vi fik Card($\mathbb{I}$) = Card($\mathbb{R}$).

Så selvom mængderne $\mathbb{P}(\mathbb{N})$ og $\mathbb{I}$ begge havde mulighed for at have en kardinalitet, som er større end Card($\mathbb{N}$) og mindre end Card($\mathbb{R}$), så viste dette sig ikke at være tilfældet.
Cantor – og senere andre med ham – har forgæves ledt efter en mængde W, som opfylder følgende:

$$\text{Card}(\mathbb{N}) < \text{Card}(W) < \mathbf{c}$$

Dette førte til, at Cantor opstillede kontinuumshypotesen, som siger følgende:

Hypotese 2.14: (Kontinuumshypotesen)

Der findes ingen mængde W som opfylder, at: opfylder: Card($\mathbb{N}$) < Card(W) < $\mathbf{c}$
eller lidt mere præcist:
Hvis det om en mængde W gælder, at: Card($\mathbb{N}$) < Card(W) $\leq \mathbf{c}$, så er: Card(W) = $\mathbf{c}$

Cantor forsøgte forgæves at bevise rigtigheden af kontinuumshypotesen.

Uden at komme yderligere ind på sagen vil vi omtale, at selvom mængdelæren siden er blevet grundigt endevendt og aksiomatisk opbygget (specielt af matematikerne Ernst Zermelo (1871-1953) og Abraham Fraenkel (1891- 1965)), bl.a. for at undgå visse subtile paradokser i Cantors mængdelære, så står kontinuumshypotesen den dag i dag ubevist, men også uimodsagt. Faktisk lykkedes det i 1940 matematikeren Kurt Gödel (1906-1978) at bevise, at kontinuumshypotesen ikke kan modbevises ud fra den aksiomatiske mængdelære. Og på samme grundlag lykkedes det i 1963 matematikeren Paul Cohen (1934-2007) at bevise, at kontinuumshypotesen ikke kan bevises.

Kapitel 3: Georg Cantor

Indholdet i denne bogs kapitel 1 og 2 skyldes først og fremmest matematikeren Cantor:

Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845-1918) blev født d. 3. marts 1845 i Skt. Petersborg i Rusland. Hans far (Georg Waldemar Cantor) var en dansk købmand, der havde slået sig ned i Skt. Petersborg. Hans mor (Maria Anna Böhm) var af østrig-ungarnsk oprindelse, men blev født i Skt. Petersborg. Faren var meget betaget af og interesseret i kunst og kultur, og moren var meget musikalsk. Dette smittede af på alle deres seks børn, hvoraf Georg Cantor var den ældste. (Han blev også betragtet som en fremragende violinist).

Der har været en del uoverensstemmelse om Cantors religiøse tilhørsforhold. Det ser ud til, at Cantors bedsteforældre på begge sider var af jødisk observans/afstamning, men at Cantors far konverterede til protestantismen, hvilket Cantors mor også gjorde, da hun blev gift med faren. Hun var selv af romersk-katolsk observans. Cantor blev i hvert fald opdraget i en intens kristen atmosfære, hvilket kom til at spille en rolle for ham senere i hans voksenliv.

Cantors far havde et skrøbeligt helbred, og da Cantor var 11 år gammel, flyttede familien til Tyskland, nærmere bestemt til området omkring Frankfurt, for at finde et mildere klima end det de strenge vintre i Skt. Petersborg udsatte dem for. I 1860 – altså som 15-årig – tog Cantor eksamen fra ”Realschule” i byen Darmstadt i nærheden af Frankfurt. Denne eksamen blev bestået med udmærkelse, og man bemærkede specielt han særlige evner i matematik – i denne sammenhæng specielt indenfor trigonometri.
Cantors far ønskede, at Cantor skulle blive ingeniør, så i 1862 begyndte Cantor studier ved det polytekniske institut i Zürich i Schweiz. Han søgte imidlertid farens tilladelse til i stedet for at studere matematik, og han blev ovenud begejstret, da hans far endelig gav sin tilladelse. Studierne i Zürich blev dog ikke langvarige, idet hans far døde i juni 1863. Da han herved arvede visse midler, så han sig nu i stand til at flytte til Berlin, hvor han studerede på universitet.

Cantor deltog i sit studium bl.a. i forelæsninger hos de berømte matematikere Leopold Kronecker og Karl Weierstrass. I 1867 fik Cantor sin Ph.D. fra universitetet i Berlin. Den handlede om talteori. I tiden efter sin eksamen underviste Cantor på en pigeskole i Berlin, samtidig med at han arbejdede på sin ”habilitation” (det er en slags disputats/afhandling, som krævedes udover Ph.D–afhandlingen for at opnå ret til at undervise på universitetet). I 1869 præsenterede han sin afhandling – igen om talteori – og modtog sin habilitation.

Samme år flyttede Cantor til universitetet i Halle, (ca. 150 km sydvest for Berlin), hvor han først var ”privatdocent” og i 1872 blev forfremmet til det der i dag svarer til lektor ved universitet, og endelig i 1879 blev han, i en alder af kun 34 år, professor i matematik. Alt sammen ved universitetet i Halle, hvor han var ansat igennem hele sin karriere.

I 1874 blev han gift med Vally Guttmann, der var en ven af hans søster. De fik i alt seks børn. Han var, takket være arven fra sin far, i stand til at understøtte en familie – på trods af den ret beskedne løn han fik som underviser/forsker.

Nye udfordringer

I Halle skiftede Cantors forskning retning, i første omgang mod matematisk analyse, idet en ældre kollega (Heine) udfordrede ham til at bevise et af de såkaldte "åbne problemer", dvs. en væsentlig matematisk sætning, som man havde en idé om var korrekt, men som man ikke havde kunnet bevise. Det konkrete emne var indenfor teorien om trigonometriske rækker, og det havde uden held været forsøgt bevist af så prominente matematikere som Dirichlet, Lipschitz og Riemann.
I april 1870 (dvs. som 25-årig) præsenterede Cantor et bevis for sætningen – og i et par år frem fortsatte han sin forskning indenfor emnet.

I 1872 mødte Cantor på en ferietur den berømte matematiker Richard Dedekin (1831–1916), som fra da af blev Cantors ven og fortrolige, og de udvekslede over årene mange breve med matematisk indhold med hinanden.
I en afhandling fra 1872 indenfor emnet trigonometriske rækker havde Cantor givet en ny og usædvanlig definition/beskrivelse af de irrationale tal. Samme år udgav Dedekin en afhandling om de reelle tal, og i denne henviste han til Cantors afhandling – hvilket bestemt må betragtes som noget af en anerkendelse af Cantors arbejde.


Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (3. marts 1845 – 6. januar 1918)

I 1873 beviste Cantor, at de rationale tal er nummerable (jfr. sætning 2.1), ligesom han beviste andre interessante sætninger om talmængder (som vi ikke skal komme yderligere ind på her).
Han havde større vanskeligheder med de reelle tals mægtighed, men i december 1873 beviste han, at de reelle tal ikke er nummerable (jfr. sætning 2.3). Cantor gav dog i første omgang et noget mere kompliceret bevis end beviset med diagonalmetoden, som han først fandt på i 1890.
Cantor offentliggjorde sit resultat i en artikel i januar 1874, og det var i denne artikel, at idéen om anvendelse af bijektioner i forbindelse med undersøgelse af mægtighed optrådte for første gang, selvom selve ordet bijektion endnu ikke blev indført.

I januar 1874 stillede Cantor sig selv spørgsmålet, om der findes en bijektion mellem et enhedskvadrat og en enhedslængde. (Problemstillingen er omtalt i forbindelse med sætning 2.11, jfr. indholdet i beviset for sætningen). I et brev til Dedekin skrev han bl.a., at "Jeg tror ikke, at besvarelsen af dette spørgsmål vil være noget let job, til trods for det faktum, at svaret klart synes at være "nej" – så klart at det næsten synes som om et bevis er unødvendigt".
Men i 1877 beviste han, at svaret på spørgsmålet imod hans forventning var "ja" (jfr. sætning 2.11). Og i et brev til Dedekin skrev han om sit overraskende resultat: "Jeg ser det, men jeg tror det ikke".

Cantor bevægede sig efterhånden også ud i mere og mere filosofisk orienterede temaer, og allerede hans artikel fra 1874 om, at de reelle tal ikke er nummerable, og at der derfor findes i hvert fald to former for uendelighed, hvor den ene uendelighed er "større" end den anden, blev ikke modtaget med lige stor begejstring overalt. Værre blev det, da Cantor beviste, at der findes uendelig mange uendeligheder i ordnet rækkefølge (jfr. sætning 1.30 og kommentarerne hertil). Der var modtand fra fremstående matematikere (som Kronecker og Poincaré), filosoffer (som Wittgenstein) og en række teologer, hvor de sidstnævnte så Cantors teorier som en udfordring af Guds <u>ene</u>stående uendelige natur.
Modstanden mod Cantors arbejde var indimellem perfid: Poincaré tillod sig at mene, at Cantors ideer var en "alvorlig sygdom" som inficerede matematiske disciple, og Kronecker beskrev Cantor som en "videnskabens charlatan", en "overløber" og en der korrumperede ungdommen.
Kronecker, der var professor i matematik og Cantors tidligere lærer, var også årsagen til, at Cantor ikke fik en stilling på det mere prestigefyldte universitet i Berlin, noget Cantor gerne ville have haft. (Kronecker var leder af det matematiske institut på universitetet frem til sin død i 1891).
En af Kroneckers væsentligste indvendinger imod Cantors teorier var, at Kronecker kun accepterede beviser, der kunne gennemføres ved et <u>endeligt</u> antal skridt !

Desuden blev en større artikel om mægtighed, som Cantor i 1877 fremsendte til det matematiske tidsskrift Crelle, behandlet med megen mistro af Kronecker, og artiklen blev kun optaget i tidsskriftet efter at Dedekin havde blandet sig i debatten.

Mellem 1879 og 1884 udgav Cantor en sammenhængende artikelrække på seks artikler i tidsskriftet Matematische Annalen. Disse artikler var beregnet på at give en sammenfattende og grundlæggende introduktion til mængdelære.
Undervej, i oktober 1881, døde Cantors ældre kollega professor Heine – og Cantor fik universitetets accept af, at Heines embede skulle tilbydes Dedekin (eller om nødvendigt matematikerne Weber og Mertens). Men til Cantors store fortrydelse viste det sig, at alle tre afslog tilbuddet. (Stillingen blev i stedet for besat af matematikeren Wangerin, som dog aldrig fik noget nært forhold til Cantor).

Efter dette ophørte den ellers så righoldige og omfattende korrespondance mellem Cantor og Dedekin. Til gengæld begyndte Cantor en anden frugtbar brevveksling, nu med den svenske matematiker Gösta Mittag-Leffler, og snart efter udgav Cantor artikler på Acta Mathematica, et tidsskrift som Mittag-Leffler stod bag. Men han fortsatte dog med at udgive den vigtige artikelserie på seks artikler i Matematische Annalen.

Depression og dødsfald.

I maj 1884 havde Cantor sin første registrerede depression. Han var på det tidspunkt kun indlagt nogle få måneder, men han fik resten af sit liv mere og mere alvorlige "anfald" af depression, og deraf følgende hospitalsindlæggelse. Den fjendtlige indstilling hos en del af hans samtidige mod hans matematiske værker er af mange blevet udråbt som årsagen til depressionerne. Men andre har dog forklaret depressionerne med, at Cantor skulle have haft en bipolar psykisk lidelse (også kaldet en maniodepressiv lidelse).

Sikkert er det i hvert fald, at kritikken gik ham på: Cantor skrev i 1884 52 breve til Mittag-Leffler, og Kronecker var omtalt i hvert eneste af dem !

Også på andre felter gik det skidt for Cantor. I 1885 bad Mittag-Leffler Cantor om at trække en artikel tilbage fra tidsskriftet Acta Mathematica. Artiklen var endnu ikke udgivet, men var på det stade, hvor der blev læst korrektur. Mittag-Leffler var bekymret for artiklens filosofiske natur og nye terminologi, og han skrev til Cantor, at artiklen var "omkring hundrede år for tidlig".
Mittag-Leffler handlede givetvis af venlighed, men hans handling viste samtidig en mangel på værdsættelse af betydningen af Cantors arbejde. Cantor blev såret, og hans brevveksling med Mittag-Leffler standsede kort efter.

Med dette ophørte en tolv år lang periode, hvor Cantor i en sand strøm af nye idéer skabte og udviklede mængdelæren (specielt den ikke-trivielle del heraf). Dette betyder ikke, at Cantor herefter ikke bidrog med mere til matematikkens verden, men blot, at en meget intenst, kreative periode sluttede.

I de følgende år oplevede Cantor væsentlige matematiske bekymringer – og ikke kun udfordringer. Cantor var den første til at formulere kontinuumshypotesen (se slutningen af kapitel 2). Det gik ham meget på, at han ikke kunne bevise dens rigtighed. Han var overbevist om, at den var sand, men alligevel prøvede han forgæves i flere år at bevise dette.
Hans to sidste store værker om mængdelære kom i tidsskriftet Mathematische Annalen i hhv. 1895 og 1897. Det relativt store tidsmæssige mellemrum mellem de to artikler skyldtes, at Cantor til det sidste håbede på at kunne inkludere et bevis for rigtigheden af kontinuumshypotesen i den sidste af artiklerne. Men som omtalt lykkedes dette ikke.
Samtidig opdagede han det første paradoks (dvs. åbenlys selvmodsigelse) i mængdelæren. Vi skal ikke her komme ind på, hvad dette går ud på, men det tog også meget af hans energi.

Ved den første internationale matematikerkongres i Zürich i 1897 mødtes Cantor og Dedekin, og de fornyede deres venskab. Cantor genoptog efterfølgende også korrespondancen med Dedekin – og i denne prøvede Cantor at få styr på, hvordan de nye problemer kunne løses. Men p.gr.a. tilbagevendende "anfald" måtte han i 1899 helt opgive denne korrespondance.

Hans mentale helbred blev også svækket af dels hans mors død i oktober 1896, dels hans yngre broders død i januar 1899.
I efteråret 1899 søgte og fik han orlov fra at undervise i vintersemesteret 1899-1900, og samme år var han indlagt på sanatoriet (for så vidt vides anden gang). Ulykkerne ville åbenbart ingen ende tage, for den 16. december 1899 døde hans yngste søn Rudolph i en alder af 13 år.
Specielt denne sidste tragedie drænede Cantors lyst til sit matematiske virke, og fra dette tidspunkt af og til hans død udkæmpede han én lang kamp mod depressionen. Han underviste i nogle perioder og fik orlov i andre perioder.

Når Cantor led mest af depression, vendte han sig mod andre emner, primært filosofiske og religiøse, men også litterære emner. Han var således overbevist om, at Shakespeare ikke selv havde skrevet sine værker, men at de var blevet udfærdiget af Francis Bacon – en engelsk statsmand, filosof og forfatter. Cantor havde allerede tidligere (i 1894 i forbindelse med sin første sygdomsperiode) anmodet om at måtte undervise i filosofi i stedet for matematik, og i 1896 begyndte han at udgive små tryksager om sine litterære studier og overbevisninger.

Han blev indlagt igen i 1903, men allerede i september samme år forelæste han ved *Deutsche Mathematiker-Vereinigung* om visse paradokser i den avancerede mængdelære, og året efter deltog han i den 3. internationale matematikerkongres i Heidelberg. Han havde således på ingen måde lagt matematikken på hylden. Ved denne sidstnævnte kongres præsenterede den ungarske matematiker Gyula König en afhandling, hvori han prøvede at bevise, at væsentlige elementer i Cantor teori var forkert. Cantor følte sig offentligt ydmyget, og selvom matematikeren Ernst Zermelo allerede dagen efter viste, at König's bevis var forkert, så tyngede hændelsen væsentligt på Cantors skuldre og skubbede dermed ekstra til sygdomsbilledet. Han var fra da af og til sin død indlagt gentagne gange – med få års mellemrum.

I 1911 holdt det skotske University of St. Andrews sit 500 års jubilæum, og Cantor blev indbudt som en af "the distinguished foreign scholars" (dvs. fremtrædende lærde personer fra udlandet). Cantor deltog i et håb om at møde det engelske multigeni Bertrand Russell (1872-1970), der året før havde udgivet 1. del af bogen "Principia Mathematica" (der betragtes som et af de mest grundlæggende og betydningsfulde værker indenfor matematisk logik). Russell havde gentagne gange i bogen henvist til Cantors teorier. Men dels p.gr.a sin egen sygdom, dels p.gr.a. en meddelelse om at hans søn var syg, måtte han tage hjem, og det lykkedes ham ikke at møde Russell.
I 1912 blev Cantor udnævnt til æresdoktor ved University of St. Andrews, men han var for syg til at komme og modtage udmærkelsen personligt.

Cantor trak sig tilbage fra sit arbejde på universitet i Halle i 1913. Man havde planlagt en offentlig fejring i Halle af hans 70 fødselsdag i 1915, men p.gr.a. krigen (1. verdenskrig) blev det aflyst og erstattet af en mindre fejring i hans private hjem.

I juni 1917 blev han for sidste gang indlagt på sanatoriet, hvor han døde – så vidt vides af et hjerteanfald – d. 6. januar 1918, i en alder af 72 år.

Hæder, ære og betydning

Som den opmærksomme læser nok kan tænke, må der før eller siden være kommet anerkendelse, ros, hæder og ære til Cantor og hans teorier. (Ellers ville bl.a. den nærværende bog næppe være skrevet). En del fremkom allerede medens han var i live, om end størsteparten heraf daterer sig til tiden efter den første depression:

- Cantor var på afgørende vis medvirkende til grundlæggelsen af Deutsche Mathematiker Vereinigung (Den Tyske Matematikerforening), og han var ansvarlig for det første møde, der blev afholdt i Halle i september 1891. (Ved dette møde fremførte han i øvrigt for første gang sit berømte diagonal-argument). Og hans omdømme var trods alt godt og stærkt nok til, at han blev valgt som den første formand for foreningen. Han beholdt formandsposten frem til september 1893.

- Cantor var flere gange under sin sygdom i religiøs ubalance med usædvanlig opførsel til følge. Og det er blevet sagt om ham, at han troede, at hans teori om transfinite (uendelige) tal var blevet givet ham fra Gud.
  Hertil bemærkede den berømte matematiker David Hilbert, at "ingen skal uddrive os fra det Paradis, som Cantor har skabt".
  (Der er dog uenighed om, hvornår Hilbert første gang fremsatte denne berømte bemærkning).

- I 1897 deltog Cantor i den første internationale matematiker-kongres i Zürich. Her blev Cantor omtalt af bl.a. den berømte tysk-schweiziske matematiker Adolf Hurwitz (1859 – 1919), som i sin forelæsning for kongressen udtrykte sin store beundring for Cantor og erklærede, at Cantor gennem sit arbejde havde beriget bl.a. funktionsteorien. Og ved samme kongres fremførte den franske matematiker Jacques Salomon Hadamard (1865 – 1963) i sin forelæsning, at Cantors mængdelære var uundværlig.

- Cantor blev æresmedlem af The London Mathematical Society (1901) og af Kharkov's matematiske selskab, ligesom han fik diverse æresgrader på forskellige udenlandske universiteter.

- Cantor fik i 1904 tildelt The Sylvester Medal fra det verdenskendte Royal Society. The Sylvester Medal blev uddelt hver tredje år og betydede den højeste ære (givet af The Royal Society) indenfor matematisk arbejde.

- Som tidligere nævnt blev Cantor i 1911 inviteret til, som en "distinguished foreign scholar", at deltage i det skotske University of St. Andrews' 500 års jubilæum. Og året efter blev Cantor tildelt en æresdoktor-grad ved dette universitet.

- I forbindelse med Cantors død beskrev David Hilbert hans arbejde som:
  "… det fineste resultat af matematisk genialitet og en af de ypperste præstationer for menneskelig intellektuel aktivitet".

Cantor er først og fremmest kendt som skaberen af mængdelære, herunder særligt de ikke-trivielle dele af mængdelæren, samt begreber som mægtighed, forskellige uendeligheder, kardinaltal og ordinaltal. Indtil Cantor's teorier fremkom, var en mængde et temmelig elementært og upræcist begreb, som man havde brugt implicit i forskellige sammenhænge, helt tilbage til Aristoteles. Der fandtes kun endelige mængder, samt "det uendelige", et filosofisk begreb uden klar matematisk definition. Alene dette, at Cantor beviste, at der findes flere forskellige slags uendeligheder, er tilstrækkelig til at trække mængdelæren fra det trivielle ind i kredsen af ikke-trivielle emner.

Men Cantor har også bidraget væsentligt på andre felter. Det går for vidt at komme ind på disse ting, men det kan omtales, at Cantor f.eks. også arbejdede med topologiske emner og deres relation til kardinalitet. Han har bl.a. konstrueret en delmængde C af de reelle tal $\mathbb{R}$, som ikke er tæt noget sted i $\mathbb{R}$, men som har samme kardinalitet som $\mathbb{R}$!! (Tænk på, at de rationale tal $\mathbb{Q}$ er tæt overalt i $\mathbb{R}$ (jfr. Sætning A.3.4 i Appendix 3), samt på at $\text{Card}(\mathbb{Q}) < \text{Card}(\mathbb{R})$ (jfr. sætning 2.3).
Mængden C kaldes Cantors mængde – til ære for Cantor.

Mængdelæren er i dag en fundamental (grundlæggende, afgørende, nødvendig) teori for stort set alle former for matematik, selvom denne sammenhæng ikke altid fremhæves eller tydeliggøres.
Efter Cantor's afgørende indsats på området, er der siden arbejdet meget med mængdelæren – og med den heraf følgende etablering af det aksiomatiske fundament for matematikken.
Dette emne – og vejen dertil – er meget omfattende og kompleks, og ligger helt udenfor rammerne af denne bog. Men interesserede læsere kan søge efter information om matematikere/filosoffer som David Hilbert (1862-1943), Bertrand Russell (1872-1970), Ernst Zermelo (1871-1953), Abraham Fraenkel (1891- 1965) og Kurt Gödel (1906-1978).
Alene dette, at så prominente og kapable personer som disse har beskæftiget sig indgående med mængdelæren og matematikkens fundament, fortæller meget om, hvad det var Cantor satte i gang.

Appendix 1: Mængdelære og logik

Mange steder i daglig tale foretager man sammenfatninger af objekter, idet vi f.eks. kan tale om: "Alle indbyggere i Horsens", "gulerødderne i en bestemt pose" eller "børnene under 7 år". Sådan en samling af objekter kalder vi en mængde. Mere præcist har vi:

Definition A.1.1.

Ved en *mængde* forstår vi en velafgrænset samling af objekter, hvor man altid entydigt kan afgøre, om et forelagt objekt er med i samlingen eller ikke.
De objekter, der udgør mængden, kaldes mængdens *elementer*.

Eksempel A.1.2.

a) Vi kan tale om mængden af beboere i Århus til et givet tidspunkt (f.eks. 1. juni 2007), idet vi, forelagt en tilfældig person, kan afgøre, om vedkommende boede i Århus på det pågældende tidspunkt eller ikke.
b) En anden mængde er mængden af hele tal mellem 3 og 10, hvor 3 og 10 er medregnet. Denne mængde består nemlig af tallene 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. Så hvis vi har forelagt et tal, kan vi blot se efter, om det er et af de nævnte tal. I så fald er det et element i mængden. Ellers er det ikke.
c) Hvis vi taler om "alle store huse i Svendborg", så er dette ikke en mængde, idet den ikke er velafgrænset. Det kommer nemlig an på et individuelt skøn, om et givet hus i Svendborg er stort eller ikke.
Hvis vi derimod taler om "alle huse i Svendborg byområde med en højde på mindst 15 m regnet fra grundsoklens begyndelse" så har vi fået en velafgrænset samling af objekter (huse), altså en mængde. ♥

Øvelse A.1.3.

Afgør, om følgende samlinger af objekter er mængder:
a) alle hele tal
b) alle gode idéer
c) børnene under syv år
d) ugedagene
e) alle negative tal, der er større end 2
f) de kønne piger på Fyn ♥

Normalt vil vi symbolisere mængder med store bogstaver: A, B, Q, R, X, Y, …… Hvis A er mængden af biler, der er indregistreret i Danmark i juli måned 2011, så kan vi kort tale om mængden A uden derved hver gang at skulle fortælle, hvilken mængde A nu var.

Når vi skal opskrive mængder, har vi forskellige muligheder, som dog alle har det tilfælles, at de anvender mængdeklammerne $\{$ og $\}$.
Hvis vi som i eksempel A.1.2.b) har med en endelig mængde at gøre, dvs. en mængde med et endeligt antal elementer, så kan vi skrive mængden som:

$$B = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

hvor vi kort har kaldt den omtalte mængde for B. Denne opskrivningsform kaldes fuldstændig listeform, idet alle elementer i mængden anføres.

Undertiden er der en bestemt systematisk sammenhæng mellem de elementer, der udgør en given mængde. Da vil man ofte – hvor misforståelser ikke kan optræde – nøjes med at anføre en del af mængdens elementer. Skal vi f.eks. angive mængden af hele tal fra 2 til 100, hvor 2 og 100 er med, (lad os kalde denne mængde Y), så kan vi skrive:

$$Y = \{2, 3, 4, 5, ..., 99, 100\}$$

hvor prikkerne symboliserer, at alle de mellemliggende hele tal også er med. Vi siger da, at mængden Y er angivet på ufuldstændig listeform.
På tilsvarende måde kan vi opskrive visse uendelige mængder. Vil vi f.eks. opskrive mængden L af alle positive lige tal, så kan det gøres på følgende måde:

$$L = \{2, 4, 6, 8, ...\}$$

idet det da er underforstået, at vi fortsætter i det uendelige.
Eller hvis vi ønsker at anføre mængden af hele tal, kan vi skrive: $\{....., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, ...\}$, idet de to hold prikker her symboliserer, at vi fortsætter i det uendelige i begge retninger.

<u>Øvelse A.1.4.</u>
Opskriv følgende mængder:

a) Mængden af hele tal, som mindst er –5 og højst er 11.
b) Mængden af måneder i et år.
c) Mængden af hele tal, som går op i 30.
d) Mængden af hele tal fra 100 til 1000, begge inkl.
e) Mængden af ulige hele tal.
f) Mængden af hele tal, som er mindre end –7.
g) Mængden af brøker, hvor tælleren er 1 og nævneren er et positivt helt tal. ♥

Inden vi går over til at se på en tredje form for opskrivning af mængder, skal vi beskæftige os lidt med nogle bestemte mængder, som vi ofte anvender i matematikken.

Mængden af alle positive hele tal, de såkaldte naturlige tal, betegner vi med $\mathbb{N}$. Vi har altså:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, ...\}$$

Mængden af alle hele tal betegner vi med $\mathbb{Z}$, så der gælder:

$$\mathbb{Z} = \{....., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, ...\}$$

Mængden af alle tal, der kan skrives som en brøk imellem to hele tal, hvor nævneren ikke må være 0, kaldes de rationale tal, og de betegnes med $\mathbb{Q}$.

Eksempler på rationale tal er:

$$\frac{2}{3}, \frac{-7}{2}, \frac{5}{1}, \frac{214}{8}, \frac{0}{4}$$

Vi bemærker, at endelige decimalbrøker, dvs. tal, hvor der er endeligt mange decimaler efter kommaet, også er rationale tal, idet vi f.eks. har:

$$13,2 = \frac{132}{10}, \quad 0,1438 = \frac{1438}{10000}, \quad -2,18436852 = \frac{-218436852}{100000000}$$

Uden at gå nærmere ind i sagen bemærker vi, at også uendelige decimalbrøker kan være rationale. F.eks. har vi, at

$$\frac{2}{3} = 0,666666666666666666\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..$$

hvor 6-tallerne fortsætter i det uendelige.

Endelig har vi mængden af alle de tal vi normalt bruger, dvs. alle tal på tallinjen. Dem kalder vi de reelle tal, og de betegnes med $\mathbb{R}$.

Alle rationale tal er også reelle tal, men der findes – for øvrigt uendeligt mange – tal, som ikke er rationale (se Appendix A.3). Dem kalder vi de irrationale tal, og de betegnes med $\mathbb{I}$.

Eksempelvis er tallene: $\sqrt{2}$, $-\sqrt{3}$ og π irrationale

Øvelse A.1.5.

Afgør for hvert af de følgende tal, om det er naturligt, helt, rationalet eller irrationalt:

$$-25, \quad \sqrt{4}, \quad \frac{9}{17}, \quad \frac{18}{3}, \quad 0, \quad -\sqrt{2}, \quad \frac{4}{4}, \quad 2+3, \quad 2+\sqrt{2}, \quad \frac{-12}{17}, \quad \frac{12}{-4}, \quad (\sqrt{2})^2, \quad \frac{7}{1}$$ ♥

Øvelse A.1.6.

Gør rede for. at alle hele tal også er rationale. ♥

Som det fremgår af det ovenstående, har vi behov for et symbol, der kort kan fortælle os, om et forelagt objekt er element i en given mængde eller ikke.

Hvis x er et element i mængden A, eller hvis S er et element i mængden X, så skriver vi:

$$x \in A \qquad \text{hhv.} \qquad S \in X$$

hvilket læses: "x tilhører A", "x er et element i A" eller "x er indeholdt i A", og tilsvarende "S tilhører X", "S er et element i X" eller "S er indeholdt i X".

Og hvis x ikke tilhører A, hhv. hvis S ikke tilhører X, så skriver vi:

$$x \notin A \qquad \text{hhv.} \qquad S \notin X$$

hvilket læses: "x tilhører ikke A", "x er ikke et element i A" osv. osv.

Eksempel A.1.7.

Hvis M er mængden af måneder i et år, så har vi: april $\in$ M og onsdag $\notin$ M ♥

Øvelse A.1.8.
Indsæt de manglende tegn ($\in$ eller $\notin$) i nedenstående:

$23 \in \mathbb{N}$, $\quad -3 \notin \mathbb{N}$, $\quad 2{,}6 \quad \mathbb{N}$, $\quad 2356 \quad \mathbb{N}$, $\quad 8 \quad \mathbb{Z}$, $\quad -\frac{22}{7} \quad \mathbb{Z}$, $\quad 0 \quad \mathbb{Z}$, $\quad \sqrt{3} \quad \mathbb{Z}$,

$-4 \quad \mathbb{Z}$, $\quad 1 \quad \mathbb{Q}$, $\quad \frac{8}{15} \quad \mathbb{Q}$, $\quad \sqrt{3} \quad \mathbb{Q}$, $\quad -2\frac{1}{4} \quad \mathbb{Q}$, $\quad 7 \quad \mathbb{I}$, $\quad \sqrt{2} \quad \mathbb{I}$ ♥

Vedrørende talmængderne $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{I}$ og $\mathbb{R}$ skal nævnes, at vi undertiden kun er interesseret i at se på f.eks. de negative hele tal. Disse symboliserer vi med $\mathbb{Z}_-$. Og hvis vi kun vil se på de positive rationale tal, så skriver vi: $\mathbb{Q}_+$.
Tilsvarende betydning har: $\mathbb{Z}_+$, $\mathbb{Q}_-$, $\mathbb{I}_+$, $\mathbb{I}_-$, $\mathbb{R}_+$ og $\mathbb{R}_-$.

Øvelse A.1.9.
Indsæt de manglende tegn ($\in$ eller $\notin$) i nedenstående:

$2 \in \mathbb{Z}_+$, $\quad 5{,}3 \notin \mathbb{Q}_-$, $\quad -2\frac{3}{4} \quad \mathbb{Z}_-$, $\quad \frac{23}{3} \quad \mathbb{Q}_+$, $\quad -\frac{1}{3} \quad \mathbb{I}_-$, $\quad 519{,}15 \quad \mathbb{R}_+$, $\quad \pi \quad \mathbb{Q}_+$,

$-22{,}5 \quad \mathbb{Q}_-$, $\quad 0{,}01486 \quad \mathbb{Q}_-$ ♥

Vi vil nu se på den omtalte tredje opskrivningsform for mængder. Den anvender den såkaldte mængdebygger: $\{ \quad | \quad \}$.
Hvis vi f.eks. vil opskrive mængden af hele tal, som går op i 30, så kan det gøres på følgende måde:

$$\{ x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ går op i } 30 \}$$

hvilket læses: ”Mængden af de x indeholdt i $\mathbb{Z}$ for hvilke det gælder, at x går op i 30”

Denne mængdebygger består altså af to ”rum”, adskilt af en lodret streg, hvor vi i det første rum udtaler os om, hvor nogle x’er *skal* ”ligge henne”, og hvor vi efter stregen angiver, hvilke egenskaber disse x’er skal have.
Bemærk, at den lodrette streg læses: ”for hvilke det gælder” (eller ” hvorom det gælder”).
Vi behøver ikke bruge bogstavet x. Vi kan lige så godt brug y, a, z, e, A, B, …… F.eks. har vi:

$$\{ x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ går op i } 30 \} = \{ p \in \mathbb{Z} \mid p \text{ går op i } 30 \} = \{ A \in \mathbb{Z} \mid A \text{ går op i } 30 \}$$

Eksempel A.1.10.

a) Hvis vi skal opskrive mængden af reelle tal, som er større end 2, så kan vi skrive:
$$\{ x \in \mathbb{R} \mid x > 2 \}.$$

b) Hvis E er mængden af samtlige elever på Herning Gymnasium d. 1. september 2009, så kan mængden af elever i klassen 1s skrives som: $\{ e \in E \mid e \text{ går i 1s} \}$

c) Mængden $\{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ kan også skrives som: $\{ y \in \mathbb{N} \mid 3 \leq y \leq 10 \}$, og det betyder selvfølgelig, at vi skal have de y’er indeholdt i $\mathbb{N}$, som mindst er 3 og højst er 10. ♥

Øvelse A.1.11.
Opskriv og oplæs derefter følgende mængder:

a) Mængden af rationale tal, som er mindre end 4,5
b) Mængden af reelle tal, som mindst er 3 og højst er 10
c) Mængden af negative hele tal, som er større end –500
d) Mængden af naturlige tal, som er delelige med 23 ♥

Vi har i det ovenstående set på mængderne:

$$C = \left\{ x \in \mathbb{N} \,\middle|\, 3 \leq x \leq 10 \right\} \quad \text{og} \quad D = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, 3 \leq x \leq 10 \right\}$$

Den eneste forskel i opskrivningen er her, at der står $\mathbb{N}$ i den første mængde og $\mathbb{R}$ i den anden. Men lige netop denne forskel gør, at vi har med to ret så forskellige mængder at gøre.
Medens $C = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, så består D af alle reelle tal mellem 3 og 10, således at f.eks. 4,6 , 7,34234326 og π (der er *ca.* 3,1416) er elementer i D.

Den mængde, vi på forhånd indskrænker os til at se på, kaldes *grundmængden*, og det er inden for grundmængden, at alle ens operationer foregår. I ovenstående eksempler har vi, at $\mathbb{N}$ er grundmængden i første tilfælde, hvorimod $\mathbb{R}$ er grundmængden i andet tilfælde.

Øvelse A.1.12.
Angiv en passende grundmængde, når vi skal se på hver af følgende mænger:

a) Skatteborgeres skattepligtige indkomst
b) Tal, som er delelige med 5
c) Temperaturer mål i ^{o}C
d) Temperaturforskelle
e) Grantræer i dansk skovbrug, som var modne til fældning d. 1.oktober 2003
f) Dage uden regn ved Meteorologisk Institut i 2001 ♥

Lad os prøve at se på mængden: $\left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x^2 < -2 \right\}$.

Dette er mængden af tal, hvis kvadrat er mindre end –2. Nu er det sådan, at kvadratet af et tal altid er større end eller lig med 0. Den nævnte mængde indeholder altså ingen elementer.
Når en mængde ingen elementer indeholder, så siger vi, at den er tom. Vi kalder den: *den tomme mængde*, og betegner den med Ø.

Øvelse A.1.13.
Afgør, om følgende mængder er tomme eller ikke:

a) $\left\{ x \in \mathbb{Z} \,\middle|\, 5 \cdot x = 28 \right\}$

b) $\left\{ y \in \mathbb{R} \,\middle|\, \frac{y}{2} = 0 \right\}$

c) $\left\{ p \in \mathbb{Z}_- \,\middle|\, p^2 > 10 \right\}$

d) Mængden af byer i Verden, som d. 1.januar 1976 havde over 18 millioner indbyggere.

e) Mængden af sælhunde i Det Kaspiske Hav d. 1. juni 2011. ♥

Ofte er det en stor fordel at kunne *illustrere* mængder. En mængde A illustreres gerne som vist på figur A.1.1., og hvis vi ønsker at fremhæve, at et bestemt element x er indeholdt i A, kan vi tegne som vist på figur A.1.2.

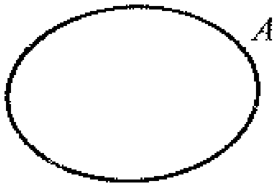


Fig. A.1.1

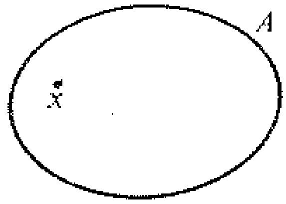


Fig. A.1.2

<u>Eksempel A.1.14.</u>

a) Skal vi illustrere mængden $B = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ kan vi altså tegne:

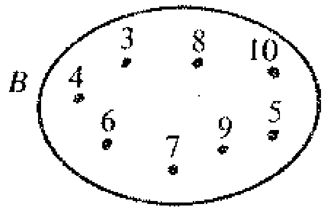


Fig. A.1.3.

hvor vi har valgt at anføre alle B's elementer.

b) Skal vi tegne to mængder A og B, kan det se således ud:

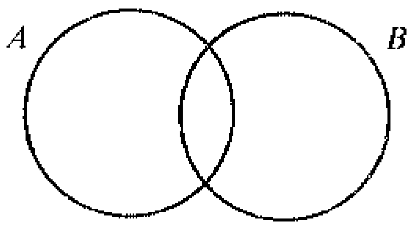


Fig. A.1.4

"Bollerne" går ind over hinanden, idet A og B eventuelt kan indeholde nogle elementer, som ligger i begge mængderne.

Dette er f.eks. tilfældet med mængderne $A = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ og $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$:

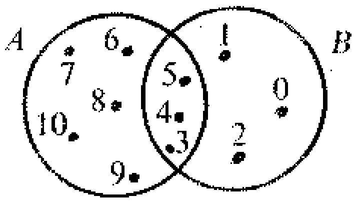


Fig. A.1.5 ♥

Lad nu A betegne mængden af beboere i Århus d. 1. juni 2010, og lad B betegne mængden af beboere i Århus, der d. 1. juni 2010 boede i parcelhus. Denne situation kan illustreres således:

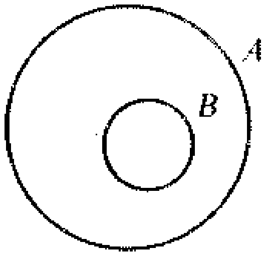


Fig. A.1.6

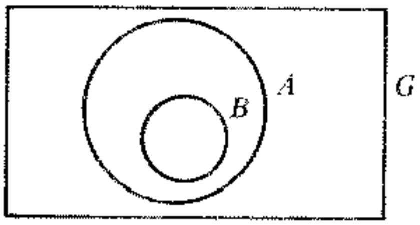
idet alle elementer i B også er elementer i A. Vi siger, at B er en delmængde af A.
Mere præcist har vi følgende definition:

<u>Definition A.1.15.</u>

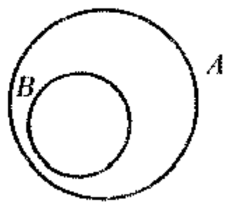
Lad A og B være givne mængder. Hvis alle elementer i B også er element i A, så siger vi, at B er en *delmængde* af A, og vi skriver: $B \subseteq A$.

Hvis B er en delmængde af A, og hvis vi ved, at A indeholder mindst ét element, som ikke er med i B, så siger vi, B er en *ægte delmængde* af A, og vi skriver: $B \subset A$.

$B \subseteq A$ illustreres på følgende måde:



eller



Fig, A.1.7

Fig. A.1.8

På figur A.1.8.er grundmængden G ikke tegnet med, idet den er underforstået. Det er oftest denne illustrationsmetode, vi anvender.

<u>Øvelse A.1.16.</u>
Gør rede for, at hvis det om mængderne X, Y og T gælder, at $X \subseteq Y$ og $Y \subseteq T$, så er $X \subseteq T$.
Lav en figur, der illustrerer situationen. ♥

<u>Øvelse A.1.17.</u>
Undersøg om:

a) $\{41, 63, 22, 17, 78, 4, 9\} \subseteq \{17, 4, 63, 68, 78, 9, 19, 22, 41\}$

b) $\{p \in \mathbb{N} \mid p \text{ er et primtal}\} \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots, 100\}$

c) $\{-5, 5\} \subset \{s \in \mathbb{R} \mid s^2 - 25 = 0\}$

d) $\{5\} \subseteq \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \frac{1}{x} = \frac{1}{x-5} \right\}$ ♥

Vil sige, at to mængder X og Y er ens, hvis alle elementer i X også er indeholdt i Y , og omvendt – altså hvis X og Y består af de samme elementer. Hvis X og Y er ens, skriver vi: X = Y
Hvis to mængder X og Y ikke er ens, skriver vi: $X \neq Y$.

Øvelse A.1.18.
Gør rede for, at $\{1,2,3,4,5,6\} = \{5,4,6,1,3,2\}$
Bemærk, at når vi opskriver alle elementerne i en mængde, så er rækkefølgen uden betydning. ♥

Grundlæggende mængdeoperationer.

Hvis vi har givet en grundmængde G og to delmængder heraf: A og B, så kan vi danne nye mængder ud fra disse – som omtalt i de følgende definitioner:

Definition A.1.19.

Lad A og B være givne mængder med samme grundmængde G.

Ved *fællesmængden* af A og B forstår vi mængden af elementer i G, som *både* er indeholdt i A og i B.

Fællesmængden af A og B betegnes med: $A \cap B$, hvilket læses: "A fælles med B".
$A \cap B$ er skraveret på følgende figur (hvor G er underforstået):

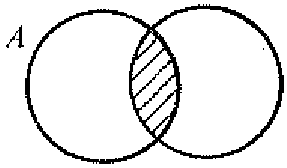


Fig. A.1.9

Hvis de to mængder ikke har nogen elementer til fælles, dvs. hvis $A \cap B = \emptyset$, så siger vi, at A og B er *disjunkte*. Dette ser skematisk således ud:

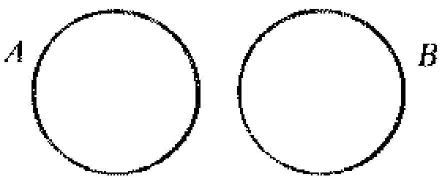


Fig. A.1.10

Definition A.1.20.

Lad A og B være givne mængder med samme grundmængde G.

Ved *foreningsmængden* af A og B forstår vi mængden af elementer i G, som enten er indeholdt i A eller B,dvs. som er indeholdt i mindst én af mængderne A og B.
Foreningsmængden af A og B betegnes med: $A \cup B$, hvilket læses: "A forenet med B".
$A \cup B$ er skraveret på følgende figur (hvor G er underforstået) *(se øverst næste side)*

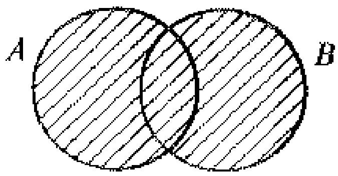


Fig. A.1.11

Bemærk, at et $x \in A \cup B$ gerne må være indeholdt i både A og B, dvs. i $A \cap B$, idet x blot skal ligge i mindst en af mængderne A eller B.

Definition A.1.21.

Lad A og B være givne mængder med samme grundmængde G.

Ved *mængdedifferensen* mellem A og B forstår vi mængden af elementer i A, som ikke er indeholdt i B.
Mængdedifferensen mellem A og B betegnes med: $A \setminus B$, hvilket læses: ”A fraregnet B”.
$A \setminus B$ er skraveret på følgende figur (hvor G er underforstået):

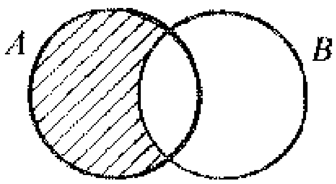


Fig. A.1.12

Definition A.1.22.

Lad A være en given mængde indenfor grundmængden G.

Ved *komplementærmængden* til A indenfor G forstår vi mængden af elementer i G, som ikke ligger i A.
Komplementærmængden til A indenfor G betegnes med: $\complement_G A$, hvilket læses: ”Komplementær-mængden til A indenfor G”. Undertiden er G underforstået, og vi skriver da blot: $\complement A$.
$\complement A$ ses skraveret på følgende figur:

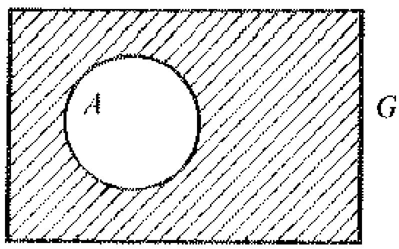


Fig. A.1.13

Det skal omtales, at man undertiden også bruger symbolet: A^C for komplementærmængden til A i stedet for $\complement A$.

<u>Eksempel A.1.23.</u>
Lad S være mængden af lande i verden, O mængden af olieproducerende lande i verden og K mængden af kulproducerende lande i verden. Da har vi:

- $O \cap K$ er mængden af lande, der både producerer olie og kul. Landene i mængden $O \cap K$ har altså flere forskellige energikilder i produktion.
- $O \cup K$ er mængden af lande, der enten producerer olie eller kul (eller eventuelt begge dele).
- $O \setminus K$ er mængden af lande, som producerer olie, men ikke kul.
- $\complement O$ er mængden af lande, som ikke producerer olie, hvilket i vor tids verden vil sige en stor del af de lande, som er afhængig af energiimport. ♥

<u>Øvelse A.1.24.</u>
Lad $X = \{3,6,9,12,15,18,21\}$ og $Y = \{9,18,27,36,45\}$ være delmængder af grundmængden $\mathbb{N}$.

Angiv: $X \cap Y$, $X \cup Y$, $X \setminus Y$ og $\complement_{\mathbb{N}} X$. ♥

<u>Øvelse A.1.25.</u>
Angiv $S \cap T$, når:

a) $S = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x^2 \geq 4 \right\}$ og $T = \{ x \in \mathbb{R} \mid (x-3)(x-2)(x-1)x = 0 \}$

b) S er mængden af lige hele tal og T er mængden af ulige hele tal. ♥

<u>Øvelse A.1.26.</u>
Angiv $C \cup D$, når:

a) $C = \{ t \in \mathbb{R} \mid 1 \leq t \leq 7 \}$ og $D = \{ t \in \mathbb{R} \mid 5 \leq t \leq 11 \}$

b) $C = \{99,47,23,52,18\}$ og $D = \{23,11,25,57,47,39\}$ ♥

<u>Øvelse A.1.27.</u>
Angiv $Y \setminus X$, når:

a) $X = \{99,47,23,52,18\}$ og $Y = \{23,11,25,57,47,39\}$

b) $X = \left\{ s \in \mathbb{R} \,\middle|\, s + \tfrac{1}{2} \in \mathbb{Z} \right\}$ og $Y = \left\{ s \in \mathbb{R} \,\middle|\, s - \tfrac{1}{2} \in \mathbb{Z} \right\}$ ♥

<u>Øvelse A.1.28.</u>
Angiv $\complement A$, når A og dens grundmængde G er givet ved:

a) $G = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ og $A = \{3,5,6,8\}$

b) $G = \mathbb{R}$ og $A = \mathbb{R}_-$ ♥

<u>Øvelse A.1.29.</u>
Om to mængder A og B er det givet, at:

$A \cup B = \{2,6,10,15,27,53,88\}$ og $A \setminus B = \{6,15,27,88\}$

Angiv mængden B. ♥

Øvelse A.1. 30.
Lad X og Y være to delmængder af grundmængden G.
Argumentér for, at der gælder følgende regler:

a) $X^C = G\backslash C$ b) $(X \cap Y)^C = X^C \cup Y^C$ c) $(X \cup Y)^C = X^C \cap Y^C$

Opskriv de samme regler ved hjælp af symbolet ∁. ♥

Blandt de grundlæggende mængdeoperationer mangler vi nu kun at omtale mængdeproduktet $A \times B$ af to givne mængder:

Definition A.1.31.
Lad A og B være to givne mængder. Ved mængdeproduktet $A \times B$ (som undertiden også kaldes en produktmængde) forstår vi mængden af alle talpar (a,b), hvor $a \in A$ og $b \in B$.
Mængdeproduktet $A \times B$ kan altså opskrives på følgende måde:

$$A \times B = \{ (a,b) \mid a \in A \text{ og } b \in B \}$$

Eksempel A.1.32.
Hvis $A = \{ 1,3,7 \}$ og $B = \{ -1,5,7,19 \}$, så består produktmængden $A \times B$ af alle talpar (a,b), hvor a er et af tallene 1, 3 eller 7, og b er et af tallene –1, 5, 7 eller 19.
Produktmængden $A \times B$ indeholder således 12 elementer, og den er givet ved:

$$A \times B = \{(1,-1), (1,5), (1,7), (1,19), (3,-1), (3,5), (3,7), (3,19), (7,-1), (7,5), (7,7), (7,19)\}$$ ♥

Øvelse A.1.33.
a) Opskriv mængden $A \times B$, idet $A = \{ 0, -33, \sqrt{5} \}$ og $B = \{ -41, 0, 72 \}$

b) Opskriv mængden $S \times T$, idet $S = \{ a,b,c \}$ og $T = \{ x,y \}$

c) Opskriv mængden $M \times M$, idet $M = \{ p,q,r,s \}$ ♥

Undertiden kan man (af praktiske årsager) anvende et semikolon i stedet for et komma i opskrivningen af et talpar. Dette gælder f.eks. hvis skal opskrive talparret bestående af tallene 12,52 og 1,67, hvor man så kan skrive (12,52;1,67) i stedet for (12,52,1,67).

Tallinjer, intervaller og koordinatsystemer.

Som omtalt kan vi illustrere mængder med ”bolle-figurer”, men når det drejer sig om talmængder (f.eks. $\mathbb{R}$, $\mathbb{N}$ eller $\{ x \in \mathbb{R} \mid 1 \le x \le 4\tfrac{1}{2} \}$), er det imidlertid ofte en fordel at tegne en tallinje.

En *tallinje* er en ret linje med en given *positiv retning* og en given *enhed*:

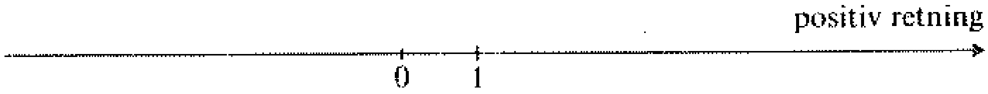


Fig. A.1.14

"Enheden" er afstanden mellem 0 og 1, og den positive retning angiver, i hvilken retning tallene bliver større. Tallinjen som helhed – dvs. inklusiv dens forlængelser i positiv og i negativ retning – repræsenterer de reelle tal $\mathbb{R}$.

Hele tallinjen illustrerer altså mængden af reelle tal, således at et vilkårligt reelt tal har præcis én placering på tallinjen. Og omvendt gælder der, at der til en vilkårlig placering på tallinjen svarer netop ét reelt tal.

<u>Eksempel A.1.34.</u>
På nedenstående figur er indtegnet forskellige tals placering på en tallinje:

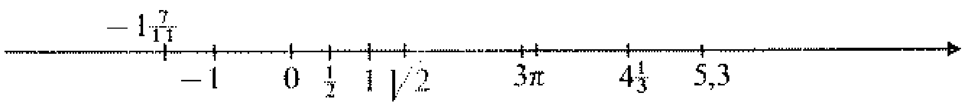


Fig. A.1.15 ♥

<u>Øvelse A.1.35.</u>
Tegn en tallinje og angiv placeringen af følgende tal:

$$8,\ -3\tfrac{1}{2}\ ,\ \sqrt{7}\ ,\ \frac{9}{4}\ ,\ -0{,}28\ ,\ \frac{1}{10}\ ,\ \frac{7}{10}\ ,\ -\pi,\ 4\tfrac{1}{3}$$ ♥

Hvis a og b er to reelle tal, hvor a < b, så skal a komme før b, når vi "bevæger os ud af" tallinjen i positiv retning, dvs. vi har følgende situation:

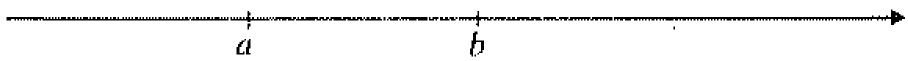


Fig. A.1.16

Når vi skal tegne en punktmængde som $\left\{\, x \in \mathbb{R} \,\middle|\, 1 \le x \le 4\tfrac{1}{2} \right\}$, kan vi gøre følgende:

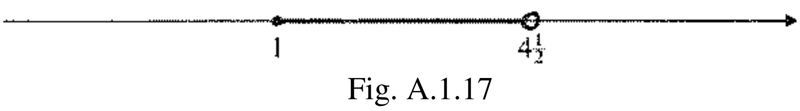


Fig. A.1.17

eller vi kan tegne ovenover tallinjen:

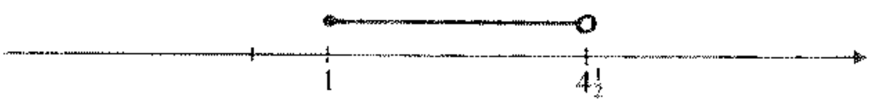


Fig. A.1.18

Eksempel A.1.36.

a) Mængden Y = $\left\{ t\in \mathbb{R} \,\middle|\, -2\tfrac{1}{4} < t < 0 \right\}$ kan tegnes således:

Fig. A.1.19

b) Mængden $\mathbb{R}_+ \cup \{ 0 \}$ kan illustreres af følgende figur:

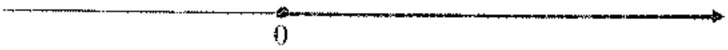


Fig. A.1.20 ♥

Mængder som: $\left\{ x\in \mathbb{R} \,\middle|\, 1 \le x \le 4\tfrac{1}{2} \right\}$, $\left\{ t\in \mathbb{R} \,\middle|\, -2\tfrac{1}{4} < t < 0 \right\}$ og $\left\{ y\in \mathbb{R} \,\middle|\, y > 2 \right\}$ kaldes intervaller. I almindelighed har vi følgende definition:

Definition A.1.37.

Ved et *interval* forstår vi en talmængde af en af følgende ni typer (hvor a og b er givne reelle tal, og a < b). Da intervaller ofte forekommer, er der anført en kort skrivemåde for hver af de optrædende typer. Symbolerne ∞ og $-\infty$ læses "uendelig" og "minus uendelig".

1) $\left\{ x\in \mathbb{R} \,\middle|\, a \le x \le b \right\} = [a, b]$

2) $\left\{ x\in \mathbb{R} \,\middle|\, a \le x < b \right\} = [a, b[$

3) $\left\{ x\in \mathbb{R} \,\middle|\, a < x \le b \right\} =]a, b]$

4) $\left\{ x\in \mathbb{R} \,\middle|\, a < x < b \right\} =]a, b[$

5) $\left\{ x\in \mathbb{R} \,\middle|\, a < x \right\} =]a, \infty[$

6) $\left\{ x\in \mathbb{R} \,\middle|\, a \le x \right\} = [a, \infty[$

7) $\left\{ x\in \mathbb{R} \,\middle|\, x \le a \right\} =]-\infty, a]$

8) $\left\{ x\in \mathbb{R} \,\middle|\, x < a \right\} =]-\infty, a[$

9) Mængden $\mathbb{R}$ af alle reelle tal

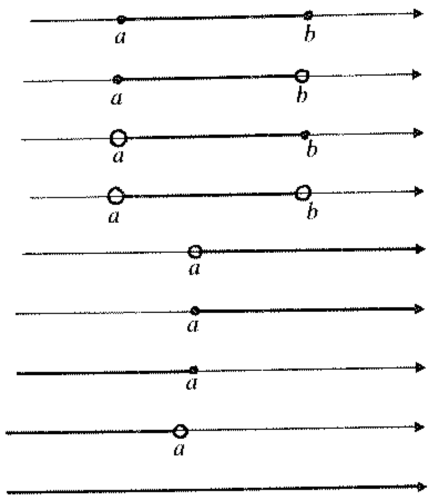


Fig. A.1.21

I tilfældene 1) – 4) kaldes a og b intervallernes endepunkter, og i 5) – 8) kaldes a intervallernes endepunkt, hvorimod intervallet i 9) ikke har nogen endepunkter.

Undertiden (afhængig af kontekst og tradition) anvendes semikolon i stedet for komma i intervalsymbolet, således at vi f.eks. har, at: $]a; b] =]a, b]$

Et interval er altså en "sammenhængende" delmængde af tallinjen (dvs. af $\mathbb{R}$), således at der ikke kommer nogen "huller", når talmængden tegnes på en tallinje. Bemærk., at de kantede parenteser vender "indad", hvis intervalendepunktet er med i intervallet, og "udad", hvis intervalendepunktet

ikke er med. Bemærk ligeledes, at i forbindelse med symbolerne ∞ og $-\infty$ vender de kantede parenteser altid udad.
F.eks. er: $]-3,8] = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x \leq 8\}$:

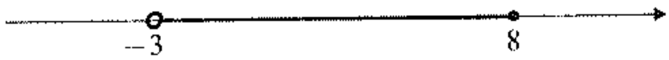


Fig. A.1.22

og $]-\infty,2] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 2\}$:

Fig. A.1.23

Intervallerne 1) – 4) i definition A.1.37 siges at være <u>begrænsede</u>, og intervallerne 1), 6), 7) og 9) siges at være <u>lukkede</u>, idet eventuelle endepunkter er med i intervallet.

<u>Øvelse A.1.38.</u>
Afgør, om følgende talmængder er intervaller.
Indtegn dem i givet fald på en tallinje, og opskriv dem v.hj.a. de kantede parenteser:

a) $\{x \in \mathbb{Z} \mid -2 \leq x \leq 8\}$

b) $\{s \in \mathbb{R} \mid 10 \leq s \leq 15\}$

c) $\{x \in \mathbb{R} \mid -2{,}5 \leq x \leq \sqrt{2}\} \cup \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 4{,}7\}$

d) $\{x \in \mathbb{R} \mid -2{,}5 \leq x \leq \sqrt{2}\} \cap \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 4{,}7\}$

e) $\complement_{\mathbb{R}}\{0\}$

f) $\mathbb{R}_-$

g) $\mathbb{R}_+ \cup \{x \in \mathbb{R} \mid -5 \leq x \leq -3\}$ ♥

Ved et (retvinklet) <u>koordinatsystem</u> forstår vi to tallinjer anbragt vinkelret på hinanden:

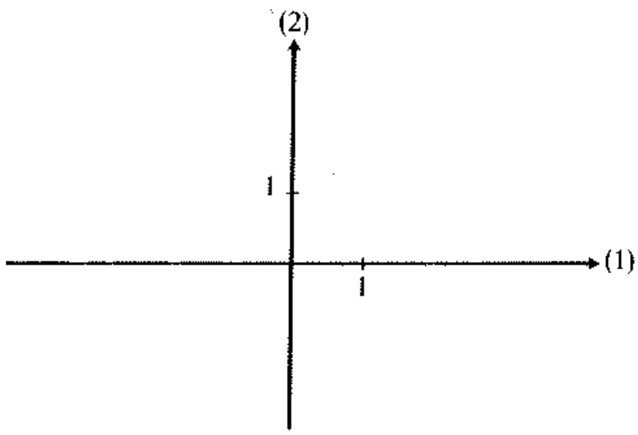


Fig. A.1.24

Almindeligvis (men ikke altid) anbringes de to tallinjer således, at deres nulpunkter er sammenfaldende. De to tallinjer kaldes, som antydet på figuren, for førsteaksen og andenaksen. Førsteaksen kaldes også for abscisseaksen eller blot kort: x-aksen, og andenaksen tilsvarende for ordinataksen eller kort: y-aksen.
Hvis vi betragter et vilkårligt punkt P i planen (se figur A.1.25), så kan vi projicere det vinkelret ned på de to akser. Det tal a, der fremkommer på førsteaksen, kaldes punktet P's førstekoordinat, abscisse eller x-koordinat. Og tilsvarende kaldes det fremkomne tal b på andenaksen for P's andenkoordinat, ordinat eller y-koordinat.
Punktet P siges at have koordinaterne (a, b), og vi kan skrive: P = (a,b) eller P(a,b).

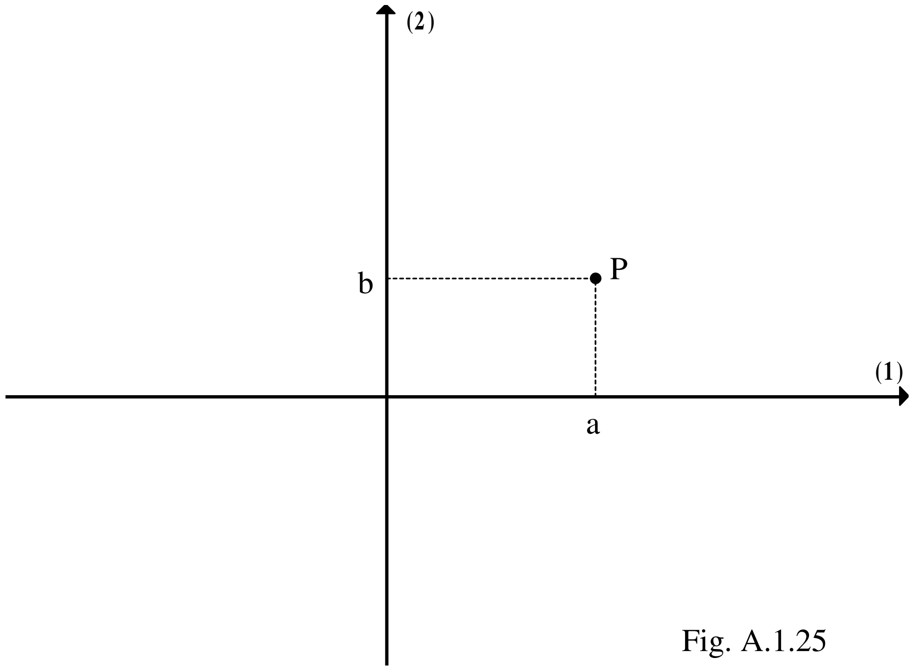


Fig. A.1.25

Eksempel A.1.39.
På figur A.1.26 ses følgende punkter indtegnet:

$$(4,1),\ (0,3),\ (-2;\ 1{,}5),\ (-1,-3),\ (0,0)\ \text{og}\ \left(1\tfrac{1}{3},-\tfrac{5}{7}\right)$$

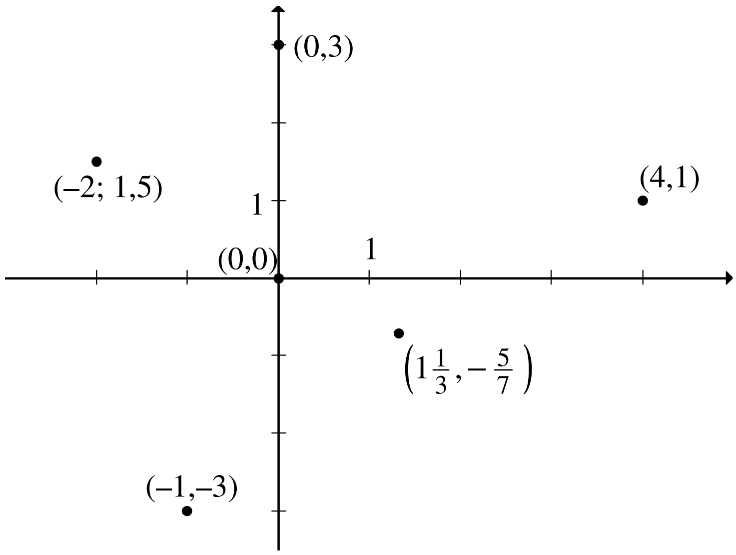


Fig. A.1.26 ♥

<u>Øvelse A.1.40.</u>
Indtegn følgende punkter i et koordinatsystem:

a) (1,4), (1,3), (1,2), (1,1), (2,1), (3,1), (4,1)
b) (– 5,3), (8,6), (8, –2), (3,6; 4,9), (0,11), (–7; –2,6)
c) $\left(-4,\, 1\tfrac{1}{2}\right)$, $\left(0, -2\tfrac{1}{4}\right)$, $\left(\sqrt{2}, -\sqrt{3}\right)$, $\left(\sqrt{2}, -1\right)$, $\left(2-\sqrt{3}, \pi\right)$ ♥

Som det fremgår af det ovenstående, er der en klar sammenhæng mellem et koordinatsystem (punkter i dette) og det tidligere omtalte mængdeprodukt mellem to givne mængder. Vi ser således, at koordinatsystemet som helhed svarer til mængden $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (som undertiden skrives kort: $\mathbb{R}^2$).
Det følgende eksempel og øvelse uddyber dette forhold.

<u>Eksempel A.1.41.</u>
På figur A.1.27 er indtegnet mængden: $[\,3;4\,] \times [1;2\,]$ (Overvej dette !).

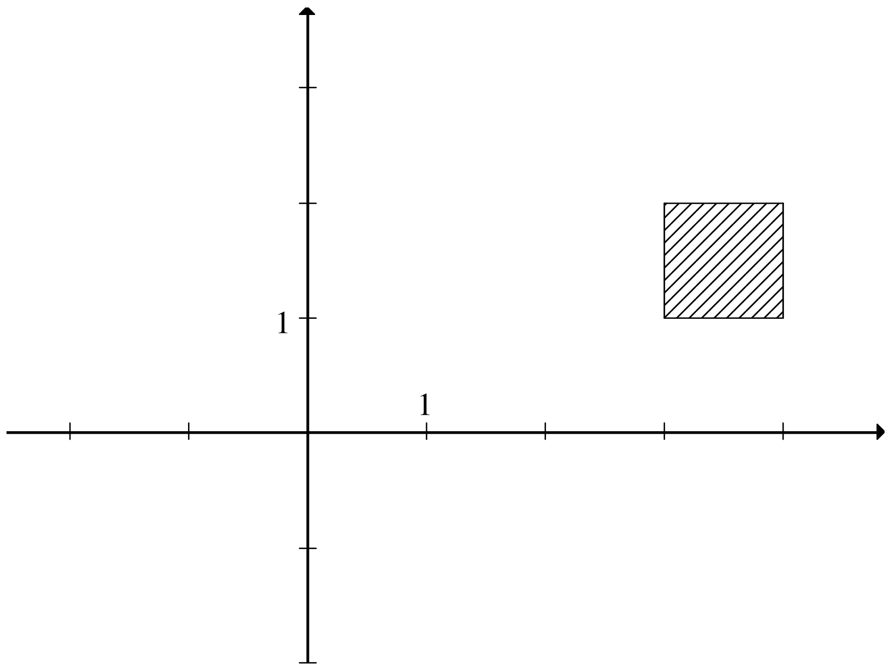


Fig. A.1.27 ♥

<u>Øvelse A.1.42.</u>
Illustrér følgende mængder på hver sin tegning:

a) $]-1;4\,[\, \times [2;5]$

b) $A \times B$, hvor $A = \{-1, 2, 5, 8\}$ og $B = \{-9, 0, 5, 11, 12\}$

c) $\mathbb{R}_{+} \times]\,6;8\,]$ ♥

<u>Øvelse A.1.43.</u>

Tegn en figur, der med rimelighed kan siges at illustrere mængden $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ♥

Nogle yderligere mængdeoperationer.

I dette afsnit vil vi først generalisere de tidligere omtalte fælles- og foreningsmængdeoperationer.

Hvis vi har mængderne A, B, C, D, E, F, G og H, så kan vi finde fællesmængden af disse otte mængder ved at skrive: $A \cap B \cap C \cap D \cap E \cap F \cap G \cap H$. Hvis vi nu ændrer navnene på mængderne, så de hedder $X_1 = A$, $X_2 = B$, $X_3 = C$, $X_4 = D$, $X_5 = E$, $X_6 = F$, $X_7 = G$ og $X_8 = H$, så kan vi kort skrive fællesmængden $X_1 \cap X_2 \cap X_3 \cap X_4 \cap X_5 \cap X_6 \cap X_7 \cap X_8$ således:

$$X_1 \cap X_2 \cap X_3 \cap X_4 \cap X_5 \cap X_6 \cap X_7 \cap X_8 = \bigcap_{i=1}^{8} X_i$$

hvor den variable i , der kaldes et index, i opskrivningen starter med at antage værdien 1, så 2, så 3 osv. indtil værdien 8. Som med øvrige variable kan også index navngives som man ønsker. Der gælder således f.eks., at:

$$\bigcap_{i=1}^{8} X_i = \bigcap_{p=1}^{8} X_p$$

På tilsvarende måde kan foreningsmængden af mange mængder gøres kortere ved at ændre (eller starte med) navngivningen af mængderne ved hjælp af et index. Vi får her f.eks.

$$X_1 \cup X_2 \cup X_3 \cup X_4 \cup X_5 \cup X_6 \cup X_7 = \bigcup_{m=1}^{7} X_m$$

Den korte opskrivningsmåde for fællesmængde og foreningsmængde af mange mængder er speciel velegnet, hvis vi skal skrive fællesmængde eller foreningsmængde af uendelig mange mængder.

<u>Eksempel A.1.44.</u>
Hvis vi til ethvert naturligt tal n knytter mængden X_n defineret ved: $X_n = \{ x \in \mathbb{N} \mid x \text{ går op i } n \}$,

og hvis vi her vil have fat i fællesmængden af alle disse mængder, så skriver vi: $\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n$, idet

indexet n går fra 1 og fortsætter i det uendelige.

Hvis vi tilsvarende vil have fat i foreningsmængden af alle disse mængder, så skriver vi: $\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ ♥

<u>Øvelse A.1.45.</u>
Betragt mængderne X_n fra eksempel A.1.44. Argumentér for, at der gælder følgende:

a) $X_1 = \{1\}$, $X_2 = \{1,2\}$, $X_3 = \{1,3\}$, $X_4 = \{1,2,4\}$, $X_5 = \{1,5\}$ og $X_6 = \{1,2,3,6\}$

b) $\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n = \{1\}$ og $\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n = \mathbb{N}$ ♥

Som en generalisering af eksempel A.1.44 kan vi anføre, at hvis vi for ethvert $n \in \mathbb{N}$ har en mængde Y_n , så angives fællesmængden af alle disse mængder ved: $\bigcap_{n=1}^{\infty} Y_n$, medens foreningsmængden angives ved: $\bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n$, hvor indexet i begge tilfælde starter fra 1 og fortsætter i det uendelige.

Eksempel A.1.46.

Lad for ethvert $n \in \mathbb{N}$ mængden Y_n være givet ved: $Y_n = \,]\,n-1\,;n\,[$.

Vi ser da, at $\bigcap_{n=1}^{\infty} Y_n = \emptyset$ og $\bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n = \mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{N}$ (overvej !). ♥

Øvelse A.1.47:

Betragt intervallerne $X_n = \left[-\frac{1}{n} , \frac{1}{n} \right]$ for ethvert tal $n \in \mathbb{N}$.

Argumentér for, at: $\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n = [-1,1]$ og $\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n = \{0\}$ ♥

Øvelse A.1.48.

For ethvert tal $p \in \mathbb{N}$ er mængden Q_p givet ved: $Q_p = \left] \frac{1}{p} \,;\, 2 \right]$

Bestem $\bigcap_{p=1}^{\infty} Q_p$ og $\bigcup_{p=1}^{\infty} Q_p$ ♥

Det sidste mængdeteoretiske begreb, vi vil beskæftige os med, er begrebet: en mængde af mængder. Vi indleder med et eksempel til at beskrive dele af begrebet.

Eksempel A.1.49.

Lad os betragte mængden F af samtlige fodboldhold i Danmark (nærmere bestemt samtlige hold i de danske fodboldserier). Dette er en veldefineret mængde, og $X \in F$ betyder, at X er et dansk fodboldhold. Men X er da selv en mængde, nemlig mængden af fodboldspillere, der udgør holdet X. Hvert element i F er altså selv en mængde, således at F faktisk er en mængde af mængder. Tilsvarende ser vi, at mængden M af alle molekyler i Universet er en mængde af mængder, idet hvert molekyle er en mængde af atomer. (Hvis molekylet kun består af ét atom, som f.eks. He, så er molekylet blot en mængde med ét element).

Bruger vi de sædvanlige mængdebyggere på disse to eksempler, så har vi:

$$F = \{ X \mid X \text{ er et dansk fodboldhold} \}$$

$$M = \{ Y \mid Y \text{ er et molekyle} \}$$

Lader vi S være mængden af danske fodboldspillere og A mængden af atomer i Universet, så har vi altså (vedrørende tegnet: $\Rightarrow$, se side 60):

$$X \in F \Rightarrow X \subseteq S \qquad \text{og} \qquad Y \in M \Rightarrow Y \subseteq A$$

Da ikke alle delmængder af S udgør et fodboldhold, har vi ikke, at hvis X er en delmængde af S, så er X et element i F. Tilsvarende ser vi, at da en vilkårlig samling af atomer ikke nødvendigvis danner et molekyle, så har vi ikke, at hvis Y er en delmængde af A, så er Y et element i M.
F hhv. M udgør altså kun en bestemt del af alle delmængder af S hhv. af A.

For at kunne opskrive noget sådant kort, vil vi indføre et tegn, der angiver mængden bestående af alle delmængder af S hhv. af A. Vi vil anvende tegnet $\mathbb{P}(S)$ hhv. $\mathbb{P}(A)$.
Vi har altså:

$$\mathbb{P}(S) = \{ X \mid X \subseteq S \} \qquad \text{og} \qquad \mathbb{P}(A) = \{ Y \mid Y \subseteq A \}$$

Og ifølge det ovenstående har vi nu, at $F \subset \mathbb{P}(S)$ og $M \subset \mathbb{P}(A)$. ♥

I forlængelse af eksempel A.1.49 giver vi følgende definition:

Definition A.1.50.
Hvis X er en given mængde, så er $\mathbb{P}(X)$ mængden bestående af alle delmængder af X, dvs.

$$\mathbb{P}(X) = \{ Y \mid Y \subseteq X \} \qquad \text{hvormed der gælder:} \qquad Y \subseteq X \Rightarrow Y \in \mathbb{P}(X)$$

$\mathbb{P}(X)$ kaldes potensmængden af X (På engelsk: The power set of X)

Eksempel A.1.51.
Hvis $X = \{1,2,3\}$, så har vi følgende delmængder af X: $\{1,2,3\}$, $\{1,2\}$, $\{1,3\}$, $\{2,3\}$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$ og Ø. (Den tomme mængde er en delmængde af en hvilken som helst mængde).
Vi har altså:

$$\mathbb{P}(X) = \{ \{1,2,3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1\},\{2\},\{3\},\emptyset \} \qquad ♥$$

Øvelse A.1.52.
Lad $X = \{0,1,2,3\}$. Bestem $\mathbb{P}(X)$.

Gør rede for, at: $\{ X, \emptyset, \{0,2\}, \{1,3\} \}$ er en delmængde af $\mathbb{P}(X)$ ♥

Øvelse A.1.53.
Lad $T = \{a,b,c,d\}$. Bestem $\mathbb{P}(T)$. ♥

Øvelse A.1.54.

Argumentér for, at hvis M er en mængde med n elementer, så indeholder $\mathbb{P}(M)$ 2^n elementer. ♥

Øvelse A.1.55.

Lad X være en given mængde. Prøv at udtrykke i ord, hvad mængden $\mathbb{P}(\mathbb{P}(X))$ består af.

Angiv et ikke-trivielt eksempel på et element i $\mathbb{P}(\mathbb{P}(X))$, hvis X = $\{1,2,3\}$. ♥

Øvelse A.1.56.

Betragt potensmængden $\mathbb{P}(\mathbb{R})$ af de reelle tal $\mathbb{R}$.

a) Gør rede for, at $\mathbb{N} \in \mathbb{P}(\mathbb{R})$, $\mathbb{Z} \in \mathbb{P}(\mathbb{R})$, $\mathbb{Q} \in \mathbb{P}(\mathbb{R})$ og $\mathbb{I} \in \mathbb{P}(\mathbb{R})$

b) Lad S være mængden af alle intervaller. Argumentér for, at $S \subset \mathbb{P}(\mathbb{R})$.

c) Argumenter for, at $\mathbb{P}(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{P}(\mathbb{R})$ ♥

Logik og logiske tegn.

Til sidst i dette appendix vil vi se lidt på nogle få begreber fra logikken.

Definition A.1.57.

Ved et udsagn forstår vi en udtalelse (en ytring eller en påstand), hvor vi entydigt kan afgøre, om den er sand eller falsk.

Eksempel A.1.58.

a) ”Himmelbjerget er 3000 m højt” er et falsk udsagn.
b) ”10 – 6 = 4” er et sandt udsagn.
c) ”Det er dejligt vejr i dag” er ikke et udsagn, idet det kommer an på et skøn, om vejret er dejligt eller ikke.
d) Udtalelser som: ”Hvad er klokken ?” eller ”Kom snart igen” er naturligvis ikke udsagn. ♥

Øvelse A.1.59.

Afgør, om følgende ytringer er udsagn eller ikke, og bestem i bekræftende fald, om udsagnet er sandt eller falsk.

a) Hun kan godt lide fiskefrikadeller.
b) $2 \cdot 6 = 12$
c) Den Anden Verdenskrig sluttede i 1939
d) Kejser Nero var en god cyklist.
e) $\sqrt{36} = 6$
f) $25^2 + 300 > 1000$
g) Hvordan har du det ?
h) Tallet er mindre end 100
i) Alle tal er mindre end 100 ♥

Lad os se lidt nærmere på udtalelsen ”Hun kan godt lide fiskefrikadeller”. Det er ikke noget udsagn, idet det kommer an på, hvem ”hun” står for. Men hvis vi erstatter ”hun” med navnet på en bestemt person af hunkøn, så får vi et udsagn frem. (Vi ser her bort fra mere subtile forhold om, hvor veldefineret det er at ”kunne lide” eller ”ikke kunne lide”. Eksemplet er blot indledende).
Vi kan også prøve at se på: ”Tallet er mindre end 100”. Igen har vi den situation, at udtalelsen ikke er et udsagn. Men hvis vi erstatter ”tallet” med et bestemt tal, f.eks. 36,2 eller 119, så får vi et udsagn frem (hvor det første bliver sandt og det andet falsk).

Udtalelser som de netop præsenterede kalder vi ”åbne udsagn”, og ”hun” (eller ”tallet”) omtales som en ”variabel”. Som man har for sædvane i matematik, vil vi ofte for den variable skrive x, y eller lignende, således at f.eks. ”tallet er mindre end 100” anføres som: $x < 100$.

Definition A.1.60.

Ved et <u>åbent udsagn</u> om elementerne i en mængde G forstår vi en udtalelse (en ytring eller en påstand) indeholdende en <u>variabel</u>, hvor vi får et udsagn frem, når den variable erstattes af et vilkårligt element fra G.
Mængden G kaldes <u>grundmængden</u> for det åbne udsagn, og mængden af elementer fra G, for hvilke udsagnet er sandt, kaldes <u>sandhedsmængden</u> for det åbne udsagn.

Lad f.eks. p(x) betegne det åbne udsagn om naturlige tal: $p(x)\!: \; x < 10, \; x \in \mathbb{N}$

Vi ser da, at p(1), dvs. $1 < 10$, er sandt. Tilsvarende ser vi, at p(2), dvs. $2 < 10$, er sandt, osv. op til og med 9.
p(10) er falsk, idet p(10) står for: $10 < 10$. p(11), p(12) osv. er falske af samme årsag. Sandhedsmængden for det åbne udsagn: $p(x)\!: x < 10, x \in \mathbb{N}$, er altså: $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

I det netop omtalte eksempel var grundmængden $\mathbb{N}$. Lad nu $q(z)\!: z < 10, \; z \in \mathbb{R}$ være et åbent udsagn om elementerne i $\mathbb{R}$. Da er q(2), $q(\sqrt{2})$, q(– 27,41) og q(0) sande, hvorimod q(10,000001), q(28,5) og q(523) er falske. Sandhedsmængden er her simpelt hen mængden af alle reelle tal mindre end 10, og den skriver vi som bekendt således: $\{z \in \mathbb{R} \mid z < 10\}$.
Vi ser altså, at selvom det åbne udsagns udseende er det samme i de to præsenterede tilfælde, så får vi helt forskellige sandhedsmængder afhængigt af, hvilken grundmængde vi betragter.

Som antydet i ovenstående eksempler, vil vi opskrive sandhedsmængden S for et åbent udsagn p(x) med grundmængden G på følgende måde:

$$S = \{x \in G \mid p(x)\}$$

hvilket læses: ”S er lig med mængden af de x indeholdt i G, for hvilke p(x) er sandt”. Ordene ”er sandt” er således underforstået i opskrivningen.
Sandhedsmængden i det første af ovenstående eksempler er da: $\{x \in \mathbb{N} \mid x < 10\}$, og i det andet: $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 10\}$ (idet vi kan benytte den betegnelse for den variable, som vi ønsker).

Øvelse A.1.61.
Angiv sandhedsmængden for hvert af følgende åbne udsagn:

a) $x + 3 = 8$, hvor $x \in \mathbb{R}$

b) $x^2 + 2 = 0$, hvor $x \in \mathbb{R}$

c) $50 \leq x \leq 100$, hvor $x \in \mathbb{N}$

d) $y^2 + 4y - 3 = -3 + y^2 + 4y$, hvor $y \in \mathbb{R}$

e) z er en planet i Solsystemet, som er nærmere Solen end Jorden.

f) $x = 4$, $x \in \mathbb{N}$ ♥

Ud fra givne åbne udsagn p(x) og q(x) med samme grundmængde kan vi danne nye åbne udsagn v.hj.a. de såkaldte udsagnsoperatorer:

Lad f.eks. p(x): x går op i 30, $x \in \mathbb{N}$, og q(x): x er mindre end 14, $x \in \mathbb{N}$, være åbne udsagn om elementerne i $\mathbb{N}$. Vi kan da se på det åbne udsagn:

$p(x) \wedge q(x)$: x går op i 30, og x er mindre end 14.

Udsagnet $p(x) \wedge q(x)$ læses kort: ”Både p(x) og q(x)”, og det er kun sandt, hvis både p(x) og q(x) er sande. Sandheds er således i dette eksempel lig med: $\{1, 2, 3, 5, 6, 10\}$.

Bemærk, at med indførelse af tegnet $\wedge$ kan den tidligere omtalte produktmængde $A \times B$ beskrives ved:

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$$

Vi kan også danne det åbne udsagn:

$p(x) \vee q(x)$: x går op i 30, eller x er mindre end 14.

Udsagnet $p(x) \vee q(x)$ læses kort: ”p(x) eller q(x)”, og det er sandt, når mindst ét af de åbne udsagn p(x) og q(x) er sandt (herunder også, når begge udsagn er sande !).

I dette tilfælde bliver sandhedsmængden altså: $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 15, 30\}$

Inspireret af dette eksempel kan vi opstille følgende matematiske sætning:

Sætning A.1.62.
La p(x) og q(x) være to åbne udsagn med grundmængde G, og lad $P = \{x \in G \mid p(x)\}$ og $Q = \{x \in G \mid q(x)\}$ være sandhedsmængderne for p(x) og q(x).

Da har vi, at:

a) $P \cap Q$ er sandhedsmængden for $p(x) \wedge q(x)$

b) $P \cup Q$ er sandhedsmængden for $p(x) \vee q(x)$.

<u>Øvelse A.1.63.</u>
Bevis sætning A.1.62.
Efterprøv sætningen på det ovenfor præsenterede eksempel. ♥

<u>Øvelse A.1.64.</u>
Lad p(x) og q(x) være følgende åbne udsagn med grundmængden $\mathbb{Z}$:

p(x): x er ikke negativ
q(x): 3 går op i x

Angiv sandhedsmængderne for følgende åbne udsagn:
a) $p(x) \wedge q(x)$
b) $p(x) \vee q(x)$ ♥

<u>Hvis</u> vi om to åbne udsagn p(x) og q(x) med samme grundmængde G kan sige, at: hvis p(x) er sandt, så er q(x) også sandt, så skriver vi:

$$p(x) \Rightarrow q(x)$$

hvilket læses: "p(x) medfører q(x)".
Vi har altså, at $p(x) \Rightarrow q(x)$, hvis q(x) er sandt for alle de værdier af x, for hvilke p(x) er sandt.
F.eks. har vi: $x < 7 \Rightarrow x < 9$, idet alle de tal fra grundmængden, der er mindre end 7, også er mindre end 9 (hvis et tal er mindre end 7, så er det som bekendt også mindre end 9 !).
Tegnet: $\Rightarrow$ kaldes en <u>implikationspil</u>.

Tilsvarende skriver vi:

$$p(x) \Leftrightarrow q(x)$$

hvis p(x) og q(x) er sande for de samme værdier af x fra grundmængden, altså hvis p(x) og q(x) har samme sandhedsmængde.
Her har vi f.eks.: $3x + 4 = 10 \Leftrightarrow 3x = 6$ og: $3x = 6 \Leftrightarrow x = 2$

Tegnet: $\Leftrightarrow$ kaldes en <u>biimplikationspil</u>, og $p(x) \Leftrightarrow q(x)$ læses: "p(x) er ensbetydende med q(x)".

Undertiden vil matematiske sætninger være formuleret på en sådan måde, at det om to påstande (to udsagn eller to åbne udsagn) gælder, at den ene påstand er korrekt <u>hvis og kun hvis</u> den anden påstand er korrekt. Dette er i realiteten det samme som at sige, at de to påstande er ensbetydende, og at vi derfor kan sætte tegnet $\Leftrightarrow$ imellem dem. (Over dette nærmere !)

<u>Øvelse A.1.65.</u>
Undersøg, om følgende gælder:
a) $x^2 > 1 \Rightarrow x > 1$
b) $2t - 4(3t - 7) + (t + 2)\cdot 5 = 8 \Leftrightarrow t = 6$
c) s går op i 23 $\Rightarrow$ s er et primtal
e) $x = \sqrt{16} \Leftrightarrow x = 4$ ♥

Øvelse A.1.66.
Lad p(x) og q(x) være to givne åbne udsagn om elementerne i en mængde G, og lad P og Q være de tilsvarende sandhedsmængder.
Argumentér for, at hvis vi har: $p(x) \Rightarrow q(x)$, så er $P \subseteq Q$. ♥

Øvelse A.1.67.
Lad A og B være givne mængder indenfor grundmængden G.
Gør rede for at følgende gælder:
a) $x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B$
b) $x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B$
c) $x \in A \setminus B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B$
d) $x \in \complement_G A \Leftrightarrow x \in G \wedge x \notin A$ ♥

For at udelukke misforståelser og misbrug skal det fremhæves, at symbolerne: $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$ og $\Leftrightarrow$ kun må anvendes i forbindelse med udsagn og åbne udsagn.
Ligeledes fremhæves det, at symbolerne: $\cap$, $\cup$, $\setminus$, $\complement$ og $\mathbb{P}(\ )$ kun må anvendes i forbindelse med mængder.

Appendix 2. Grundlæggende funktionsteori.

Definition A.2.1. Kort definition på en funktion.

Ved en funktion forstår vi et matematisk begreb, der til ethvert element i én mængde tilordner ét og kun ét element i en anden mængde.

Definition A.2.2. Lang definition af en funktion.

Hvis der til ethvert element x i en mængde A er tilordnet netop ét element f(x) i en mængde B, så siger vi, at vi har en funktion f fra mængden A ind i mængden B.
Mængden A kaldes funktionens definitionsmængde, hvilket skrives: Dm(f) = A, og mængden B kaldes en sekundærmængde for funktionen f.

Det til x tilordnede element f(x) kaldes funktionsværdien af x.
Mængden af funktionsværdier: $\{f(x) \in B \mid x \in Dm(f)\}$ kaldes værdimængden for f, og den skrives kort: Vm(f).

Hvis f er en funktion fra en mængde A ind i en mængde B, kan vi illustrere dette med en figur som følgende:

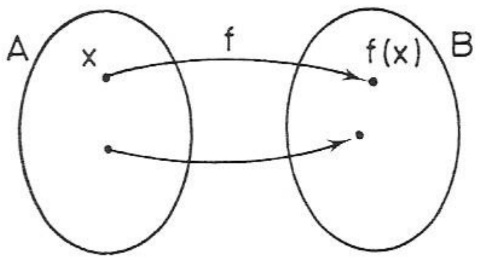


Fig A.2.1

og vi kan skrive: $f : A \to B$

Vi siger også, at f afbilder A ind i B, og at f er en afbildning af A ind i B. Værdimængden for f kaldes derfor undertiden for billedmængden for f.
At et element x afbildes i f(x) skrives undertiden således: $f : x \to f(x)$.
En sekundærmængde for en funktion er blot det samme som en mængde, der på forhånd vides at omfatte hele værdimængden for funktionen.

En funktion kan angives på fire måder: 1) en kurve, 2) en tabel, 3) en forskrift og 4) en algoritme.

Ad 1): Kurve.

Der tænkes her almindeligvis på en kurve i et koordinatsystem, og der er almindeligvis tale om at funktionen går fra en talmængde til en anden talmængde.

Eksempel A.2.3.
I nedenstående koordinatsystem er indtegnet en kurve, som viser sammenhængen mellem tidspunktet på en given arbejdsdag og produktionshastigheden af et kemikalie i en kemisk virksomhed:

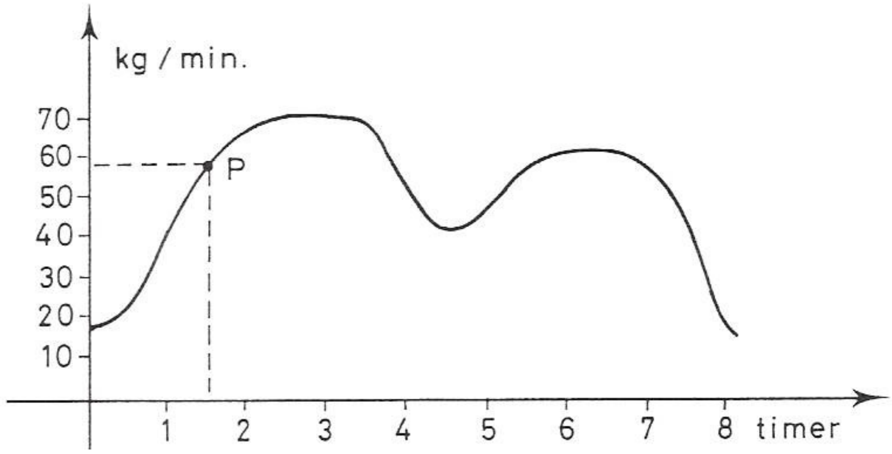


Fig. A.2.2

Ud af førsteaksen er afsat tiden målt i timer efter arbejdstidens begyndelse, og op ad andenaksen er afsat produktionshastigheden målt i kg. pr. minut.
Hvis vi gerne vil vide, hvor stor produktionshastigheden er efter 1,5 timer, så går vi ud til 1,5 på førsteaksen, derefter går vi vinkelret op til kurven til punktet P, og endelig går vi vinkelret ind på andenaksen og aflæser produktionshastigheden: 58 kg/min.
Vi ser, at der til ethvert tidspunkt svarer én og kun én produktionshastighed. Til ethvert element $t \in [\,0;8\,]$ svarer der altså netop én produktionshastighed, som vi vil betegne P(t).
Kurven giver os altså en funktion P, og vi ser f.eks., at P(1,5) = 58. ♥

Den kurve i koordinatsystemet, der repræsenterer funktionen, kaldes funktionens graf:

Definition A.2.4.
Lad f være en funktion fra en talmængde A (= Dm(f)) ind i en talmængde B. Ved funktionens grafiske billede – også kaldet funktionens graf – forstår vi følgende punktmængde (se figuren):

$$\mathrm{Gr}(f) = \{(x,y) \mid x \in \mathrm{Dm}(f) \wedge y = f(x)\}$$

Et punkt (x,y) i koordinatsystemet ligger på grafen for f, når $x \in$ Dm(f) <u>og</u> y = f(x).
Ligningen y = f(x) kaldes grafens ligning.

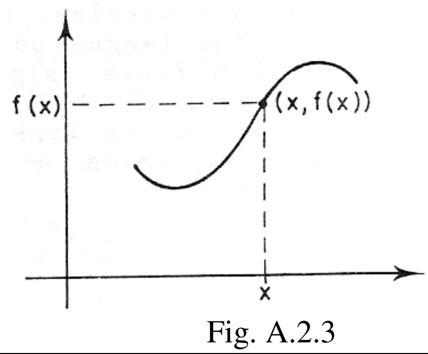


Fig. A.2.3

Som det fremgår af definitionen, skal der til ethvert element i definitionsmængden for en funktion f være knyttet ét og kun ét element i sekundærmængden. Dette bevirker, at grafen for f skal opfylde følgende: Uanset hvilket x indeholdt i Dm(f) vi betragter , så må linjen gennem x vinkelret på 1.aksen kun skære grafen i ét punkt. Følgende kurve (se figur A.2.4 øverst på næste side) er altså <u>ikke</u> graf for nogen funktion fra en talmængde til en anden talmængde:

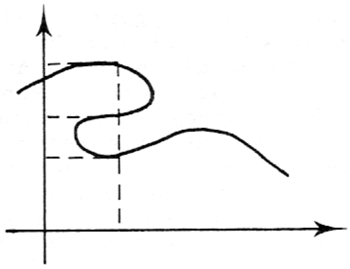


Fig. A.2.4

Ad 2): Tabel

Tabellagte funktioner findes i et utal af eksempler. Hvis vi f.eks. ser på listen over deltagere på et slankehold i et givet fitness-center, hvor holddeltagerne bliver vejet og vægten registreret hver uge, så har vi en funktion fra en mængde af navne (holddeltagernes) ind i de reelle tal, idet der til hvert navn angives personens vægt (målt i kg).

Eksempel A.2.5.
Firmaet Delikat A/S har konstrueret en ny type stegetermometer og sætter en salgskampagne i gang. I nedenstående tabel kan vi se resultatet af salgskampagnen, idet tabellen viser salgstallene pr. uge som funktion af antal uger efter præsentationen på markedet:

Ugenr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Salgstal	200	253	230	286	321	370	355	422	519	610	576	623	560	519

Vi har her en funktion s med definitionsmængde: $\{1, 2, 3, 4, ... ,14\}$, idet der til ethvert ugenummer i definitionsmængden er tilordnet netop ét tal: salgstallet for den pågældende uge.
F.eks. er s(5) = 321 stk. ♥

Ad 3) Forskrift

Definition A.2.6.
Ved en funktionsforskrift for en funktion f forstår vi et udtryk (en formel) indeholdende en variabel, hvor følgende er opfyldt:
Til enhver værdi i Dm(f) får vi den tilsvarende funktionsværdi ved at erstatte den variable med værdien fra Dm(f) – og så regne ud.

Eksempel A.2.7.

a) Formlen: $g(t) = 0{,}6t + 300$ er en funktionsforskrift for en funktion g. Definitionsmængden kan (med mindre andet fremgår af konteksten) være alle reelle tal $\mathbb{R}$, og hvis vi f.eks. vil finde funktionsværdien af 100, så erstatter vi den variable t med tallet 100, og regner ud, dvs. vi får: $g(100) = 0{,}6 \cdot 100 + 300 = 360$.

b) Udtrykket: $f(x) = \dfrac{2x}{x-2}$ er funktionsforskrift for en funktion f med definitionsmængden $\mathbb{R}\setminus\{\,2\,\}$, og funktionsværdier regnes ud ved at erstatte den variable x med de givne udgangspunkter. F.eks. er $f(-3) = \dfrac{2\cdot(-3)}{-3-2}$, dvs. $f(-3) = \dfrac{6}{5}$ ♥

Ad 4): Algoritme.

En algoritme er en beregningsprocedure /konstruktionsmetode til bestemmelse af funktionsværdier. I princippet kan bestemmelse af funktionsværdier v.hj.a. en kurve, en tabel eller en forskrift også siges at foregå ved en beregningsprocedure eller en konstruktionsmetode, men da disse optræder så ofte, behandles de hver for sig – og algoritmemåden omfatter de resterende procedurer/metoder.

Eksempel A.2.8.
På figur A.2.5 ses en cirkel C og et linjestykke L Vi definerer en funktion $g : L \to C$ fra linjestykket over på cirklen på følgende måde:

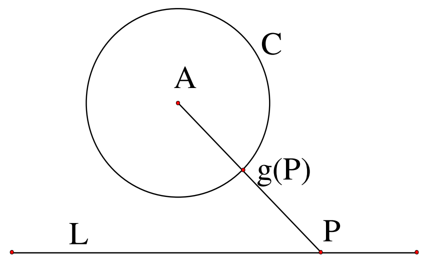


Fig. A.2.5

Et punkt P på linjestykket føres over i det punkt g(P) på cirklen, som fremkommer ved at tegne et linjestykket AP fra P til cirklens centrum A. g(P) er da skæringspunktet mellem cirklen og AP. ♥

Sammenhængen mellem en funktion givet ved en graf, en tabel og en forskrift kan kort beskrives som følger:

- Vi kan lave en graf ud fra en forskrift som anført i det nedenstående eksempel A.2.9.
- Vi kan lave en tabel ud fra graf ved at aflæse sammenhørende værdier af 1.koordinat og 2. koordinat, og anføre disse i en tabel. En sådan tabel dækker naturligvis kun en del af grafen.
- Vi kan lave en graf ud fra en tabel (over en funktion med talmængder) ved at afsætte (x,f(x))–koordinatsættene i et koordinatsystem, og så forbinde disse punkter på passende vis.
- Vi kan lave en tabel ud fra en forskrift ved at udvælge en række tal, som vi vil finde funktionsværdierne for – og så opstille disse talsæt i en tabel.
- De sidste to muligheder, nemlig at bestemme en forskrift ud fra en graf eller en forskrift ud fra en tabel er straks noget vanskeligere, og det kan kun lade sig gøre i specialtilfælde.

Eksempel A.2.9.
Lad os se på funktionen f fra eksempel A.2.7 b). Vi vil tegne grafen ud fra kendskab til forskriften. Først bestemmer vi en række såkaldte støttepunkter (hvilket svarer til at lave en tabel over en del af funktionsværdierne). Vi får her (kontrollér):

x	–4	–2	0	1	1,5	2,5	3	4	6	9
f(x)	1,333	1	0	–2	–6	10	6	4	3	2,571

Disse punkter (x, f(x)) afsættes i et koordinatsystem og forbindes med en blød kurve, idet vi dog husker på, at funktionen ikke er defineret i 2. Den endelige graf fremkommer dog først ved anvendelse af mere avancerede begreber som differentialkvotient, monotoniforhold og grænseværdi – begreber som vi på ingen måde skal komme ind på her. Vi får følgende resultat:

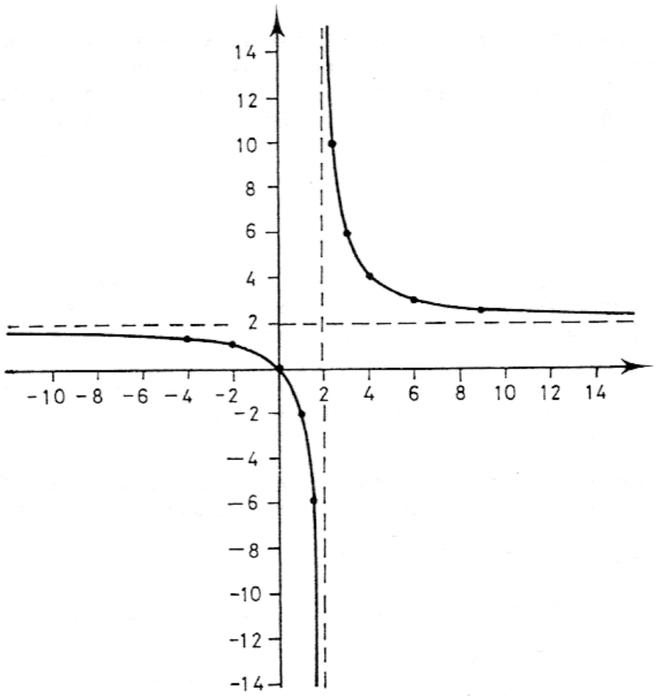


Fig. A.2.6

De stiplede linjer er ikke en del af grafen, men er blot medtegnet for at vise, at

- f(x) nærmer sig til 2, når x går mod uendelig eller minus uendelig,
- at f ikke er defineret i 2, samt at
- f(x) går mod uendelig hhv. minus uendelig, når x nærmer sig 2 fra højre hhv. fra venstre. ♥

Sammensætning af funktioner.

Lad f og g være to givne funktioner, og lad x ∈ Dm(f). <u>Hvis</u> f(x) ∈ Dm(g), så kan vi finde g(f(x)):

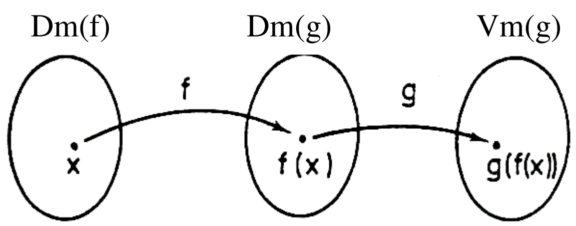


Fig. A.2.7

I denne forbindelse anføres følgende definition:

<u>Definition A.2.10.</u>

Lad f og g være to givne funktioner. Hvis der findes $x \in Dm(f)$, så $f(x) \in Dm(g)$, så defineres funktionen $g \circ f$ (læses: "g sammensat med f") på følgende måde (jfr. figur A.2.8):

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) \qquad \text{og} \qquad Dm(g \circ f) = \{\, x \in Dm(f) \mid f(x) \in Dm(g) \,\}$$

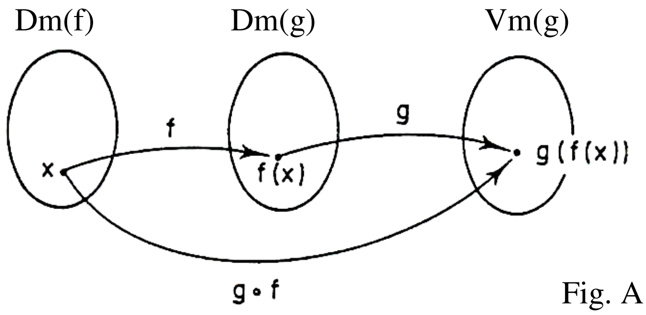


Fig. A 2.8

Funktionen $g \circ f$ kaldes sammensætningen af f og g, og $g \circ f$ siges at være en sammensat funktion.

Pointen ved en sammensat funktion $g \circ f$ er, at først bestemmer man funktionsværdien ved f, og for det resultat man får, bestemmer man funktionsværdien ved g.

<u>Eksempel A.2.11.</u>

a) Hvis $f(x) = x^2 + 6$ og $g(x) = \frac{1}{2}x + 2$, så er Dm(f) og Dm(g) begge lig med $\mathbb{R}$, så der er ingen problemer med at beregne $(g \circ f)(x)$ eller $(f \circ g)(x)$. Vi ser således at:

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2 + 6) = \frac{1}{2}(x^2 + 6) + 2 = \frac{1}{2}x^2 + 5$, altså:

$$(g \circ f)(x) = \tfrac{1}{2}x^2 + 5$$

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\frac{1}{2}x + 2) = (\frac{1}{2}x + 2)^2 + 6 = \frac{1}{4}x^2 + 2x + 10$, altså:

$$(f \circ g)(x) = \tfrac{1}{4}x^2 + 2x + 10.$$

b) Hvis $f(x) = 3x + 9$ og $g(x) = \sqrt{x}$, så er $Dm(g) = [\,0;\infty\,[$, hvormed det kræves, at $3x + 9 \geq 0$ for at vi kan udregne g(f(x)). Definitionsmængden for $g \circ f$ er altså $[\,-3;\infty\,[$, og forskriften for $g \circ f$ findes således: $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(3x+9) = \sqrt{3x+9}$, dvs. $(g \circ f)(x) = \sqrt{3x+9}$, $x \geq -3$ ♥

Injektive og omvendte funktioner.

<u>Definition A.2.12.</u>

En funktion f kaldes <u>injektiv</u>, hvis der til <u>ethvert</u> $y \in Vm(f)$ findes <u>netop ét</u> $x \in Dm(f)$, så $f(x) = y$.

For funktioner, der har en graf, kan situationen i definition A.2.12 illustreres på følgende måde:

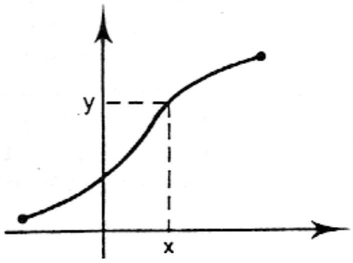


Fig A.2.9

Funktion med forskriften $f(x) = x^2$ er ikke injektiv, idet vi f.eks. har, at $f(-3) = f(3) = 9$, hvorimod f.eks. funktionen med forskriften $f(x) = 4x + 17$ er injektiv. (Overvej!)
Den tabellagte funktion omtalt i eksempel A.2.5 er ikke injektiv, idet s(9) = s(14).

I forbindelse med injektive funktioner gælder der følgende sætning:

<u>Sætning A.2.13.</u>
Om en given funktion f gælder, at følgende tre udsagn er ensbetydende:
1) f er injektiv
2) For <u>alle</u> $x_1, x_2 \in$ Dm(f): $x_1 \neq x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) \neq f(x_2)$
3) For <u>alle</u> $x_1, x_2 \in$ Dm(f): $f(x_1) = f(x_2) \;\Rightarrow\; x_1 = x_2$

Sætningen bevises ved at vise, at 1) ⇒ 2), 2) ⇒ 3) og 3) ⇒ 1) (Overvej !), og hver af disse tre implikationer vises v.hj.a. et simpelt indirekte argument. Detaljerne i beviset overlades til læseren.
For funktioner, der har en graf, kan dele af indholdet i sætning A.2.13 illustreres på følgende måde:

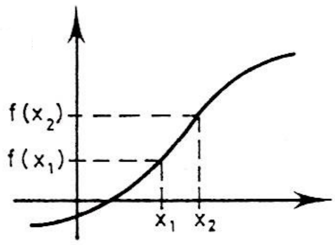


Fig. A.2.10

<u>Sætning A.2.14.</u>
Sammensætningen af to injektive funktioner er også injektiv, dvs.
Hvis f og g er to injektive funktioner, så er $g \circ f$ også injektiv.

Bevis: Lad $x_1, x_2 \in \mathrm{Dm}(g \circ f)$ være vilkårligt valgt, dog således at $x_1 \neq x_2$. Ifølge sætning 2.13 skal vi vise, at $(g \circ f)(x_1) \neq (g \circ f)(x_2)$.
Da f er injektiv har vi: $x_1 \neq x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) \neq f(x_2)$, og da g er injektiv har vi, at $f(x_1) \neq f(x_2) \;\Rightarrow$ $g(f(x_1)) \neq g(f(x_2))$. Men dette er det samme som at $(g \circ f)(x_1) \neq (g \circ f)(x_2)$.
Hermed er sætningen bevist. ♥

Hvis vi igen ser på den grundlæggende definition på en funktion (definition A.2.1), så kan den udtrykkes således: Vi har en funktion g fra en mængde A ind i en mængde B, hvis der til ethvert element i A ved g tilordnes netop ét element i B. Hvis vi så ser på definitionen af en injektiv funktion, så har vi netop denne situation, idet der til ethvert element $y \in Vm(f)$ (= A) svarer netop ét element $x \in Dm(f)$ (= B), hvor x er bestemt ved, at $f(x) = y$.

Dette fører til følgende definition:

Definition A.2.15.

Hvis f er en injektiv funktion, så har vi samtidig en funktion fra Vm(f) ind i Dm(f). Denne funktion kaldes den omvendte funktion til f, og betegnes f^{-1}. Og der gælder at: $f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow y = f(x)$

Indholdet i definition A.2.15 kan illustreres som vist på figur A.2.11, og hvis funktionen f har en graf, kan situationen også illustreres som vist på figur A.2.12:

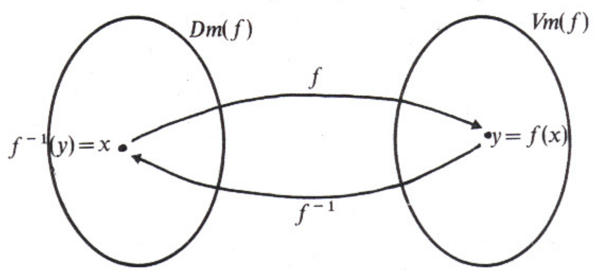


Fig A.2.11

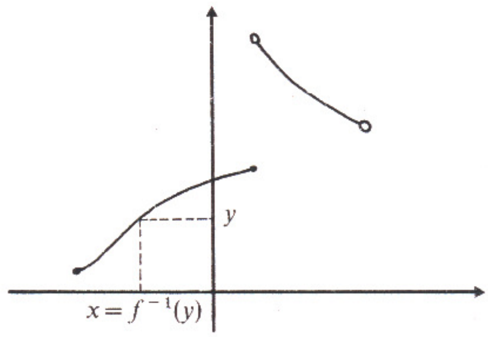


Fig. A.2.12

Vi bemærker, at $Dm(f^{-1}) = Vm(f)$ og at $Vm(f^{-1}) = Dm(f)$.

For nogle injektive funktioner med en forskrift kan vi finde en forskrift for den omvendte funktion, for andre injektive funktioner kan vi finde en algoritme (en procedure) for den omvendte funktion, og for nogle injektive funktioner må vi blot nøjes med at vide, at den omvendte funktion eksisterer.

Eksempel. A.2.16.

a) Vi vil finde en forskrift for den omvendte funktion til: $f(x) = 2x - 6$ (Overvej, at f er injektiv !). Ifølge definition A.2.15 har vi:

$$x = f^{-1}(y) \Leftrightarrow y = f(x) \Leftrightarrow y = 2x - 6 \Leftrightarrow y + 6 = 2x \Leftrightarrow x = \tfrac{1}{2}y + 3$$

dvs. $f^{-1}(y) = \tfrac{1}{2}y + 3$.

b) Funktionen $g(x) = \dfrac{1}{x+3}$, $x > -3$ er injektiv, og har dermed en omvendt funktion. Dette ses af, at ligningen $g(x) = y$ kun har én løsning x for en given værdi af y, og dette indses således:

$$g(x) = y \Leftrightarrow \frac{1}{x+3} = y \Leftrightarrow y\cdot(x+3) = 1 \Leftrightarrow y\cdot x = 1 - 3y \Leftrightarrow x = \frac{1-3y}{y}$$

Vi ser dermed samtidig, at $g^{-1}(y) = \dfrac{1-3y}{y}$, hvormed forskriften for g^{-1} er fundet.

Det overlades til læseren at argumentere for, at $\mathrm{Dm}(g^{-1}) = \mathbb{R}_+$ ♥

Sætning A.2.17.

Hvis en funktion f er injektiv, så er dens omvendte funktion f^{-1} også injektiv.

Bevis: Lad $y_1, y_2 \in \mathrm{Vm}(f)$ være vilkårligt valgt, dog således at $y_1 \neq y_2$. Ifølge sætning A.2.13 skal vi vise, at $f^{-1}(y_1) \neq f^{-1}(y_2)$. Da f er injektiv, findes der netop ét x_1, så $f(x_1) = y_1$ og netop ét x_2, så $f(x_2) = y_2$, og vi har, at $x_1 = f^{-1}(y_1)$ og $x_2 = f^{-1}(y_2)$.
Antag, at $x_1 = x_2$. Så er $f(x_1) = f(x_2)$, og dermed er $y_1 = y_2$. Men det strider imod forudsætningen om, at $y_1 \neq y_2$. Antagelsen $x_1 = x_2$ kan altså ikke gælde, hvormed vi får, at $x_1 \neq x_2$. Men det betyder så, at $f^{-1}(y_1) \neq f^{-1}(y_2)$, hvormed det ønskede er bevist. ♥

Som det fremgår af definition A.2.15 og figur A.2.11, gælder der følgende sætning (overvej !):

Sætning A.2.18.

Lad f være en injektiv funktion. Da gælder, at

$$f^{-1}(f(x)) = x \quad \text{for alle } x \in \mathrm{Dm}(f) \qquad \text{og} \qquad f(f^{-1}(y)) = y \quad \text{for alle } y \in \mathrm{Vm}(f)$$

hvilket også kan formuleres således:

$$(f^{-1} \circ f)(x) = x \quad \text{for alle } x \in \mathrm{Dm}(f) \qquad \text{og} \qquad (f \circ f^{-1})(y) = y \quad \text{for alle } y \in \mathrm{Vm}(f)$$

Funktionerne f og f^{-1} er altså hinandens omvendte funktioner.

Surjektive og bijektive funktioner.

Definition A.2.19.

Lad f være en funktion fra en mængde A ind i en mængde B.
Hvis Vm(f) = B, så siger vi, at f afbilder A på B, og f siges at være surjektiv.

En funktion f er altså surjektiv, hvis alle elementer i sekundærmængden er funktionsværdi (billede) af et eller andet element fra definitionsmængden. (surjektiv udtales ”syrjektiv”, jfr. fransk).

<u>Eksempel A.2.20.</u>

a) Funktionen $\theta : \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ givet ved: $\theta(n,m) = \frac{n}{m}$ er surjektiv, idet ethvert rationalt tal kan skrives som et helt tal delt med et positivt helt tal (overvej !).

b) Funktionen g: $\mathbb{R} \to [\,0;\infty\,[$ defineret ved: $g(t) = t^2$ er surjektiv (overvej !).

c) Funktionen f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ givet ved: $f(x) = 5x + 12$ er surjektiv. (Overvej !) ♥

<u>Definition A.2.21.</u>
Lad f være en funktion fra en mængde A til en mængde B.
Hvis f både er injektiv og surjektiv, så siger vi, at f er <u>bijektiv</u>. Og f kaldes en <u>bijektion</u> af A på B.

Overvej, at funktionerne θ og g i eksempel 2.20 ikke er bijektioner, hvorimod funktionen f er.

Hvis f: $A \to B$ er injektiv, så gælder der ifølge sætning A.2.13, at:

For <u>alle</u> $x_1, x_2 \in Dm(f)$: $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

dvs. forskellige elementer i A afbildes i forskellige elementer i B, men der kan godt i B være elementer, som ikke er funktionsværdi af noget element fra A. Vi ser dermed, at der må være mindst lige så mange elementer i B som i A

Hvis f: $A \to B$ er surjektiv, så gælder der, at $B = Vm(f) = \{f(x) \mid x \in A\}$. Da f er en funktion, er der pr. definition for ethvert $x \in A$ tilordnet netop ét element f(x) i B – men der kan godt være flere elementer i A som har samme funktionsværdi. Vi ser dermed, at der må være mindst lige så mange elementer i A som i B.

Hvis f: $A \to B$ både er injektiv og surjektiv, så ser vi alt i alt, at der må være lige mange elementer i A og B. Dette resultat ligger til grund for definitionen af ækvipotens i definition 1.2 (side 4).

Noget om mængder i forbindelse med funktioner.

<u>Definition A.2.22.</u>
Lad f: $A \to B$ være en funktion fra en mængde A ind i en mængde B, og lad S være en delmængde af A, dvs. $S \subseteq A$. Ved <u>billedet af S ved f</u> forstår vi mængden f(S) givet ved:

$$f(S) = \{f(x) \in B \mid x \in S\}$$

f(S) er altså mængden af alle funktionsværdier der fremkommer, når den uafhængige variable gennemløber S. Det overlades til læseren at tegne en figur, der illustrerer situationen.
Specielt har vi, at f(Ø) = Ø og at f(A) = Vm(f)

Eksempel A.2.23.

a) Betragt f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ givet ved: $f(x) = x^2$.

Da har vi, at: $f(\{1,2\}) = \{1,4\}$ og $f(\{\frac{1}{2}, 7, -3, -4, 4\}) = \{\frac{1}{4}, 49, 9, 16\}$

b) Betragt g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ givet ved: $g(x) = -2x + 5$. Da er $g(]3,7]) = [-9,-1[$ (Overvej !) ♥

Definition A.2.24.
Lad f: $A \to B$ være en funktion fra en mængde A ind i en mængde B, og lad T være en delmængde af B, dvs. $T \subseteq B$. Ved det inverse billede af T ved f forstår vi mængden $f^{-1}(T)$ givet ved:

$$f^{-1}(T) = \{x \in A \mid f(x) \in T\}$$

Bemærk, at definitionen på det inverse billede ikke forudsætter, at funktionen f er injektiv – anvendelsen af symbolet $f^{-1}(T)$ må derfor ikke forveksles med symbolet $f^{-1}(y)$, hvor f er en injektiv funktion og y er et element i Vm(f). $f^{-1}(T)$ beskriver blot, at vi går "den modsatte vej" af funktionen f for at finde alle de elementer i A, der afbildes over i T.
Det overlades til læseren at tegne en figur, der illustrerer situationen i definition A.2.24.

Eksempel A.2.25.
Betragt funktionen f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ givet ved: $f(x) = x^2$. Da er:

a) $f^{-1}(\{1,4\}) = \{1, 2, -1, -2\}$

b) $f^{-1}(\{2,3,4\}) = \{\sqrt{2}, -\sqrt{2}, \sqrt{3}, -\sqrt{3}, 2, -2\}$

c) $f^{-1}([1,2]) = [-\sqrt{2}, -1] \cup [1, \sqrt{2}]$

d) $f^{-1}(\{-1,-4\}) = \emptyset$ ♥

Hvis mængden T i definition A.2.24 består af kun ét element q, dvs. hvis $T = \{q\}$, så ser vi, at

$$f^{-1}(\{q\}) = \{x \in Dm(f) \mid f(x) = q\}$$

$f^{-1}(\{q\})$ er altså mængden bestående af alle de elementer i Dm(f), for hvilke funktionsværdien er lig med q.

Øvelse A.2.26.
Betragt en funktion h: $X \to Y$. Argumentér for følgende to udsagn:

a) Funktionen h er injektiv, hvis og kun hvis der for alle $y \in Y$ gælder, at $h^{-1}(\{y\})$ enten er den tomme mængde eller består af præcis ét element.

b) Funktionen h er surjektiv, hvis og kun hvis der for alle $y \in Y$ gælder, at $h^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset$ ♥

Appendix 3. Nogle egenskaber ved de reelle tal.

Vi starter dels med en kort repetition af nogle få emner fra Appendix 1, dels med at omtale nogle specielle egenskaber ved de rationale og de hele tal.

Fra Appendix 1 ved vi bl.a., at:

- De reelle tal $\mathbb{R}$ (dvs. alle tal på tallinjen) består af de rationale tal $\mathbb{Q}$ og de irrationale tal $\mathbb{I}$, dvs. $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$, hvor der gælder: $\mathbb{Q} \cap \mathbb{I} = \emptyset$.
- De rationale tal $\mathbb{Q}$ er mængden af tal, der kan skrives som brøker imellem to hele tal, hvor nævneren er forskellig fra nul, og de irrationale tal $\mathbb{I}$ er de tal, som ikke har denne egenskab.
- Mængden $\mathbb{Z}$ af hele tal er en delmængde af de rationale tal, dvs. $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$, idet ethvert helt tal kan skrives som en brøk imellem sig selv og tallet 1.

Ethvert rationalt tal kan i øvrigt skrives som en uforkortelig brøk mellem to hele tal, idet vi kan forkorte brøken mellem de to hele tal indtil den ikke kan forkortes mere (dvs. bliver uforkortelig).

Endvidere gælder det, at $\mathbb{Q}$ er afsluttet overfor regningsarterne: addition (+), subtraktion (–) og multiplikation (·), dvs. at en sum, en differens eller et produkt af to rationale tal giver et nyt rationalt tal.
Vi viser dette for addition (+), og overlader argumenterne for subtraktion (–) og multiplikation (·) til læseren.
Vi skal altså vise, at hvis p og q er rationale tal, så er p + q også er rationalt tal. Da p og q er rationale, findes her hele tal m, n, s og t, så: $p = \frac{m}{n}$ og $q = \frac{s}{t}$. Ud fra dette ser vi, at:

$$p + q = \frac{m}{n} + \frac{s}{t} = \frac{m \cdot t + s \cdot n}{n \cdot t}$$

og da et produkt og en sum af hele tal giver hele tal ser vi, at $m \cdot t + s \cdot n$ og $n \cdot t$ er hele tal. p + q er derfor skrevet som en brøk mellem hele tal, dvs. p + q er et rationalt tal.

Om de hele tal $\mathbb{Z}$ gælder, at hvis $m \in \mathbb{Z}$ er ulige, så er m^2 også ulige.

Dette bevises på følgende måde:
Hvis m er ulige, så findes et helt tal n, så m = 2n + 1 (overvej!), hvormed vi får, at:
$m^2 = (2n + 1)^2 = 4n^2 + 4n + 1$. Da $4n^2$ og $4n$ er lige tal (de er hele tal ganget med 4), så er $4n^2 + 4n$ også et lige tal. Når vi så lægger 1 til dette, får vi et ulige tal, hvormed vi ser, at m^2 er ulige.

Vi ser dermed også, at der for et helt tal p gælder, at hvis p^2 er lige, så er p selv lige.
Dette skyldes, at et helt tal enten er lige eller ulige, og hvis p var ulige, så ville p^2 også være ulige, og det er jo ikke tilfældet, idet p^2 er forudsat at være lige.

Efter denne indledning går vi nu i gang med de egentlige emner for dette appendix. Det første vi vil bevise er, at der overhovedet eksisterer irrationale tal, idet vi starter med følgende berømte sætning:

Sætning A.3.1.

$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, dvs. $\sqrt{2}$ er et irrationalt tal.

Bevis:
Vi beviser sætningen ved et indirekte argument. Vi antager altså, at $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, dvs. at $\sqrt{2}$ er et rationalt tal, og vi vil så vise, at dette fører til en modstrid (dvs. noget, der er logisk forkert).

Da $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, kan $\sqrt{2}$ skrives som en <u>uforkortelig</u> brøk mellem to hele tal.

Vi antager altså, at $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, hvor p og q er hele tal, og hvor brøken er uforkortelig.

Af $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ ses, at $(\sqrt{2})^2 = (\frac{p}{q})^2$ og dermed, at $p^2 = 2 \cdot q^2$. Da q^2 er et helt tal, ses det, at p^2 er lige.
Ifølge de indledende kommentarer er p derfor selv lige. Der findes således et helt tal s, så p = 2s, hvilket indsat i $p^2 = 2 \cdot q^2$ giver: $(2s)^2 = 2 \cdot q^2$, hvoraf vi får: $q^2 = 2 \cdot s^2$. Dette betyder, at q^2 også er lige, og dermed, at q selv er lige. Vi har således, at både p og q er lige. Men dette er i strid med, at brøken $\frac{p}{q}$ er uforkortelig. Vi er hermed kommet til en modstrid, hvormed den oprindelige antagelse om at $\sqrt{2}$ er et rationalt tal ikke kan gælde. $\sqrt{2}$ er altså et irrationalt tal. Hermed er sætningen bevist. ♥

Om de irrationale tal $\mathbb{I}$ gælder bl.a. følgende:

Sætning A.3.2.

For ethvert rationalt tal q og ethvert helt tal n ($n \neq 0$) gælder, at $q + \frac{\sqrt{2}}{n} \in \mathbb{I}$

Der findes derfor uendeligt mange irrationale tal , og der findes mindst lige så mange irrationale tal, som der findes rationale tal.

Bevis:

Vi fører et indirekte bevis: Antag altså, at $q + \frac{\sqrt{2}}{n} \in \mathbb{Q}$. Da $\mathbb{Q}$ er stabil overfor +, – og · , og da q og n er rationale tal, ser vi, at: $q + \frac{\sqrt{2}}{n} \in \mathbb{Q}$ giver os, at: $q + \frac{\sqrt{2}}{n} - q \in \mathbb{Q}$, dvs. $\frac{\sqrt{2}}{n} \in \mathbb{Q}$.

Og dermed får vi, at: $\frac{\sqrt{2}}{n} \cdot n \in \mathbb{Q}$, dvs. $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. Dette er imidlertid i strid med sætning A.3.1, hvormed første del af sætning A.3.2 er bevist.

Hvis n = 1 ser vi specielt, at $q + \sqrt{2} \in \mathbb{I}$. Heraf fås de to sidste påstande i sætningen: Dels ses, at da der er uendelig mange rationale tal (de rationale tal indeholder bl.a. de hele tal), er der uendeligt mange irrationale tal, og dels ses, at for ethvert rationalt tal q findes der et irrationalt tal $q + \sqrt{2}$
Hermed er sætningen bevist. ♥

<u>Øvelse A.3.3.</u>

Opskriv de 15 irrationale tal $q + \frac{\sqrt{2}}{n}$, der fremkommer, når $q = 5$, $q = -265{,}89$ hhv. $q = \frac{213}{17}$ og $n = -3$, $n = 2$, $n = 18$, $n = 54$ hhv. $n = -2000$.
Udregn en tilnærmet værdi på regnemaskinen og kommentér resultatet. ♥

Vi nævner uden bevis, at for ethvert primtal p gælder, at $\sqrt{p} \in \mathbb{I}$, samt at der findes mange andre irrationale tal end kvadratroden af visse hele tal. Et af de berømteste er tallet π (som er fastlagt ved forholdet mellem omkredsen og diameteren i en cirkel).

Vi vil nu gå over til at se på andre særlige egenskaber ved de rationale og de irrationale tal.
Der gælder nemlig om dem begge, at de ligger tæt i $\mathbb{R}$, hvilket betyder, at uanset hvilke to reelle tal man tager (og underforstået: uanset hvor tæt de to valgte reelle tal ligger på hinanden), så findes der både et rationalt og et irrationalt tal imellem disse to tal. Der gælder altså følgende sætning:

<u>Sætning A.3.4.</u>

1) De rationale tal $\mathbb{Q}$ <u>ligger tæt</u> i de reelle tal $\mathbb{R}$, dvs. uanset hvor tæt to forskellige reelle tal ligger på hinanden, så findes der et rationalt tal imellem dem.
2) De irrationale tal $\mathbb{I}$ <u>ligger tæt</u> i de reelle tal $\mathbb{R}$, dvs. uanset hvor tæt to forskellige reelle tal ligger på hinanden, så findes der et irrationalt tal imellem dem.

Bevis:

<u>Ad 1):</u> Lad r_1 og r_2 være to vilkårligt valgte reelle tal, hvor $r_1 < r_2$. Vi skal da bevise, at der findes et rationalt tal q, som ligger imellem r_1 og r_2, dvs. som opfylder: $r_1 < q < r_2$

Lad $n \in \mathbb{N}$ være valgt, så $n > \frac{1}{r_2 - r_1}$ ($\mathbb{N}$ er som bekendt mængden af de positive hele tal).

Dette er muligt, da $\mathbb{N}$ fortsætter i det uendelige. Lad herefter m være det <u>mindste hele</u> tal, som opfylder, at: $m \geq n \cdot r_2$. Vi vil nu bevise, at hvis vi sætter $q = \frac{m-1}{n}$, så opfylder q det ønskede.

Da q er en brøk mellem to hele tal, er q et rationalt tal. Vi skal derfor undersøge størrelsen af q.
Først bevises, at $q < r_2$:
Ifølge definitionen af m har vi, at $m - 1 < n \cdot r_2$, og da n er positiv, kan vi dividere med n uden at vende ulighedstegnet, hvormed vi får: $\frac{m-1}{n} < r_2$.

Dernæst bevises, at $r_1 < q$. Vi benytter et indirekte bevis, og antager altså, $q \leq r_1$, dvs. at $\frac{m-1}{n} \leq r_1$.

Vi vil så argumentere for, at dette fører til en modstrid, hvormed der må gælde, at $r_1 < q$.

Hvis $\frac{m-1}{n} \leq r_1$ får vi ved multiplikation med n, at $m - 1 \leq n \cdot r_1$ og dermed, at $m \leq n \cdot r_1 + 1$

Af $n > \dfrac{1}{r_2 - r_1}$ får vi, idet $r_2 - r_1$ er et positivt tal, at $n \cdot (r_2 - r_1) > 1$ og dermed: $n \cdot r_2 - n \cdot r_1 > 1$, hvilket giver os: $n \cdot r_2 > n \cdot r_1 + 1$. Kombineres dette med $m \le n \cdot r_1 + 1$, ser vi, at $m < n \cdot r_2$, hvilket er i strid med, at m er valgt, så $m \ge n \cdot r_2$. Hermed er sætningens 1. del bevist.

<u>Ad 2):</u> Lad r_1 og r_2 være to vilkårligt valgte reelle tal, hvor $r_1 < r_2$. Vi skal da bevise, at der findes et irrationalt tal s, som ligger imellem r_1 og r_2, dvs. som opfylder: $r_1 < s < r_2$
Da de rationale tal $\mathbb{Q}$ ifølge 1. del af sætningen ligger tæt i R, findes et tal $q \in \mathbb{Q}$, så $r_1 < q < r_2$

Lad n være et positivt helt tal som opfylder, at $n > \dfrac{\sqrt{2}}{r_2 - q}$. Da $r_2 - q$ er positivt, får vi hermed, at

$n \cdot (r_2 - q) > \sqrt{2}$ og dermed, at: $r_2 - q > \dfrac{\sqrt{2}}{n}$. Dette giver os endeligt, at $q + \dfrac{\sqrt{2}}{n} < r_2$.

Da $\dfrac{\sqrt{2}}{n} > 0$ har vi desuden, at $r_1 < q < q + \dfrac{\sqrt{2}}{n}$. Hvis vi sætter $s = q + \dfrac{\sqrt{2}}{n}$, så ser vi altså, at $r_1 < s < r_2$, og da s ifølge sætning A.3.2 er et irrationalt tal, er sætningen bevist. ♥

<u>Øvelse A.3.5.</u>
a) Bestem et rationalt og et irrationalt tal imellem 3,123456788 og 3,123456789
b) Bestem et rationalt og et irrationalt tal imellem $\sqrt{5}$ og 2,236068
c) Bestem et rationalt og et irrationalt tal imellem – 2000,0000000001 og – 2000 ♥

Sætning A.3.4 har mange konsekvenser vedrørende egenskaber ved de reelle tal. Vi vil her se på nogle få af disse:

- Hvis a er venstre endepunkt i et interval J, hvor $a \notin J$ (dvs. intervallet er åbent hen mod a), så findes der ikke noget mindste tal i intervallet.
  Hvis vi f.eks. ser på intervallet J =]41 ; 200[, så er 41 ikke med i J, og der findes ikke noget tal i J, som er det mindste (dvs. som er større end 41 men samtidig mindre end alle de andre tal i intervallet). Dette skyldes, at uanset hvor tæt på 41 vi vælger et tal t, f.eks. t = 41,00000000001, så er der ifølge sætning A.3.4 både et rationalt og et irrationalt (og dermed reelle) tal imellem a og t.

- Hvis b er højre endepunkt i et interval J, hvor $b \notin J$ (dvs. intervallet er åbent hen mod b), så findes der ikke noget største tal i intervallet. (Argumentet overlades til læseren som en øvelse).

- *For læsere, der kender til begrebet grænseværdi, kan følgende bemærkes:*
  I forbindelse med grænseværdi taler vi om, at en variabel størrelse x går imod et givet fast tal x_o, hvilket skrives $x \to x_o$. Vi kan f.eks. have, at $x \to 5$, hvor det faste tal $x_o = 5$.
  Dette betyder, at x kan komme lige så tæt på x_o, som det skal være – uden nogensinde at blive lig med x_o !!
  At noget sådant giver mening fremgår bl.a. af, at uanset hvor tæt x er på x_o, så findes der ifølge sætning A.3.4 stadigvæk reelle tal imellem x og x_o, både rationale og irrationale tal.

I forlængelse af sætning A.3.4 anfører vi følgende sætning:

Sætning A.3.6.

I ethvert interval (dvs. imellem to vilkårlige reelle tal) findes der uendeligt mange rationale og uendeligt mange irrationale tal – og dermed altså også uendeligt mange reelle tal.

Bevis:
Betragt intervallet fra a til b, og lad c være dette intervals midtpunkt. Da a < c, findes der et rationalt tal q_1 imellem a og c, dvs. $a < q_1 < c$, og tilsvarende ses, at der findes et rationalt tal q_2 imellem c og b, dvs. $c < q_2 < b$. Vi har dermed to rationale tal q_1 og q_2 imellem a og b, hvor $q_1 < q_2$. (Tegn en skitse af situationen !)

For ethvert $m \in \mathbb{N}$ gælder (overvej !), at $a < q_1 + \frac{q_2 - q_1}{m} \leq q_2 < b$, og da tallet $q_1 + \frac{q_2 - q_1}{m}$ er et rationalt tal (overvej !), er der uendeligt mange rationale tal mellem a og b.

Det er muligt at vælge et positivt helt tal p, så $a < q_1 + \frac{\sqrt{2}}{p} < b$. Vi skal blot vælge $p > \frac{\sqrt{2}}{b - q_1}$

(overvej dette !). Hvis $n \in N$ er større end p, så er $a < q_1 + \frac{\sqrt{2}}{n} < q_1 + \frac{\sqrt{2}}{p} < b$.

Da der er uendeligt mange hele tal n større end p, er der ifølge sætning A.3.3 uendeligt mange irrationale tal mellem a og b.
Hermed er sætningen bevist. ♥

De reelle tal har mange flere interessante egenskaber. En af de vigtigste egenskaber – som vi ikke kan bevise her, men dog nok fornemme på baggrund af bl.a. de ovenfor omtalte egenskaber – er, at **de reelle tal er et kontinuum (dvs. en sammenhængende talmængde uden huller).** Dette berøres yderligere i tekstens kapitel 2.
Der er altså ingen steder på tallinjen, hvor der "mangler" noget tal.

Intervalruser.

Definition A.3.7.
Ved en *intervalruse* forstås en uendelig række af ikke-tomme, lukkede, begrænsede intervaller $I_1, I_2, I_3, \ldots\ldots, I_n, \ldots\ldots\ldots$, hvorom der gælder, at

- ethvert interval i rusen er en delmængde af det foregående interval, dvs.:
  $I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \supseteq \ldots\ldots \supseteq I_n \supseteq \ldots$
- længden af et vilkårligt interval i rusen er højst halvdelen af det foregående intervals længde dvs. for alle $n \in N$: $\ell(I_{n+1}) \leq \frac{1}{2} \cdot \ell(I_n)$, hvor $\ell(I)$ betyder længden af intervallet I.

Vi bemærker, at det i en intervalruse gælder, at $\ell(I_n) \leq \frac{1}{2^{n-1}} \cdot \ell(I_1)$ for alle $n \in \mathbb{N}$ (Overvej !).

Hvis vi ser på fællesmængden $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ af alle intervallerne i en intervalruse, så er det klart, at denne fællesmængde <u>højst</u> kan indeholde ét tal. Hvis vi nemlig har to forskellige tal p og q, hvor $p < q$, så findes der et naturligt tal n, så $\frac{\ell(I_1)}{q-p} \leq 2^{n-1}$, hvormed der gælder, at: $q-p \geq \frac{\ell(I_1)}{2^{n-1}} \geq \ell(I_n)$.
Da $q-p$ er afstanden mellem p og q ser vi derfor, at p og q ikke begge kan ligge i intervallet I_{n+1} .

Omvendt må det være oplagt (bl.a. når vi tænker på de egenskaber ved de reelle tal, der er beskrevet i det foregående), at der <u>findes</u> et tal, som ligger i alle intervaller i rusen.
Dette er en af de fundamentale egenskaber ved de reelle tal, som vi ikke kan bevise, men som må anføres som et såkaldt <u>aksiom</u> byggende på de reelle tals opbygning og egenskaber.

<u>Aksiom A.3.8.</u> (Intervalsammensnævringsaksiomet).

Enhver intervalruse fastlægger netop ét reelt tal, dvs. fællesmængden $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ består af netop ét tal.

<u>Eksempel A.3.9.</u>
Betragt intervallet $I_1 = [0;1]$. Ud fra I_1 kan laves en intervalruse ved som det næste interval i rusen at tage skiftevis den venstre og den højre halvdel af det foregående interval.
Man kan bevise, at denne intervalruse bestemmer tallet $\frac{1}{3}$, men beviset udelades her. ♥

<u>Øvelse A.3.10.</u>
Opskriv de første otte intervaller i den intervalruse, der omtales i eksempel A.3.9 – og argumentér for, at $\frac{1}{3}$ er indeholdt i dem alle sammen. ♥

Stikordsregister