

MATEMATISK LINJE
1-ÅRIGT FORLØB TIL A-NIVEAU

MATEMATIK

DELPØVEN MED HJÆLPEMIDLER

Torsdag den 21. august 2008 kl. 9.00-13.10

Kun én af opgaverne 6a og 6b må afleveres til bedømmelse

Der tildelles i alt ca. 75 point

Eksamenssæt fra Færøerne

Opgave 2
(ca. 15 point)

I et koordinatsystem i rummet med begyndelsespunkt $O(0,0,0)$ er givet to punkter $A(1,-1,2)$ og $B(3,1,1)$.

Beregn skalarproduktet af vektorerne \overrightarrow{OA} og \overrightarrow{AB} .

Bestem en ligning for den plan α , der indeholder punkterne O , A og B .

En plan β er bestemt ved ligningen

$$2x + y - 2z = 0.$$

Beregn afstanden fra punktet $C(11, 2, -6)$ til planen β .

Bestem en ligning for den kugle, der har centrum i punktet C , og som har β som tangentplan.

Beregn koordinatsættet til kuglens røringspunkt med β .

VEND!

Opgave 3
(ca. 15 point)

I et koordinatsystem i planen bevæger et punkt $P(x, y)$ sig, således at der til tidspunktet t gælder

$$\begin{aligned}x &= t^2 + t \\ y &= 3t - t^3, \quad t \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Beregn koordinatsættet til hvert af banekurvens skæringspunkter med koordinatsystemets andenakse.

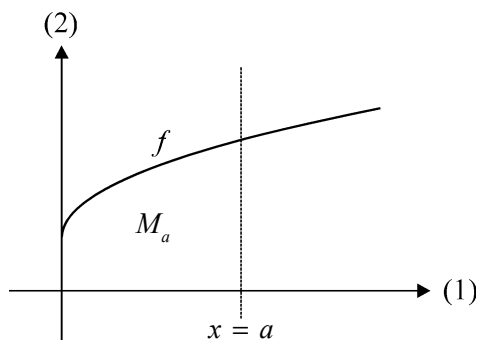
Bestem en parameterfremstilling for tangenten til banekurven i det punkt Q , der svarer til $t = -2$.

Det oplyses, at punktet Q også svarer til en anden værdi af t .

Beregn denne værdi af t .

Beregn den spidse vinkel mellem banekurvens to tangenter i Q .

Opgave 4
(ca. 15 point)



En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = 1 + \sqrt{x}.$$

For ethvert positivt tal a afgrænser grafen for f , koordinatsystemets akser og linjen med ligningen $x = a$ en punktmængde M_a , der har et areal.

Beregn ved hjælp af stamfunktioner arealet af M_a .

Rumfanget af det omdrejningslegeme, der fremkommer, når M_a drejes 360° om koordinatsystemets førsteakse, betegnes med $V(a)$.

Gør rede for, at

$$V(a) = \pi \left(a + \frac{1}{2} a^2 + \frac{4}{3} a \sqrt{a} \right).$$

Benyt grafregneren til at bestemme den værdi af a , for hvilken $V(a) = 42$.

Opgave 5
(ca. 15 point)

Bestem hvert af integralerne

$$\int 5xe^{-x} dx \quad \text{og} \quad \int 2x \cos(x^2 + \pi) dx.$$

Bestem en forskrift for den løsning til differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = y \cdot 2x \cos(x^2 + \pi),$$

hvis graf indeholder punktet $P(0,1)$.

Opgave 6a
(ca. 15 point)

I et koordinatsystem er givet to vektorer

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{u} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Beregn arealet af det parallelogram, der udspændes af \vec{v} og \vec{u} .

Bestem tallet t , så vektoren $\vec{v} - t\vec{u}$ er vinkelret på \vec{v} .

Om to vektorer \vec{a} og \vec{b} gælder, at

$$|\vec{a}| = 7, \quad |\vec{b}| = 5 \quad \text{og} \quad \angle(\vec{a}, \vec{b}) = 60^\circ.$$

Beregn $|\vec{a} - \vec{b}|$.

Opgave 6b
(ca. 15 point)

En funktion f er den løsning til differentialligningen

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = 9y,$$

der opfylder, at $f(0) = 6$ og $f'(0) = 12$.

Bestem en ligning for tangenten til grafen for f i punktet $P(0, f(0))$.

Bestem en forskrift for f .

Gør rede for, at funktionen

$$g(x) = f(x) - 9x^2 - 5$$

er en løsning til differentialligningen

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - 9y = 81x^2 + 27.$$

Kun én af opgaverne 6a og 6b må afleveres til bedømmelse
--

