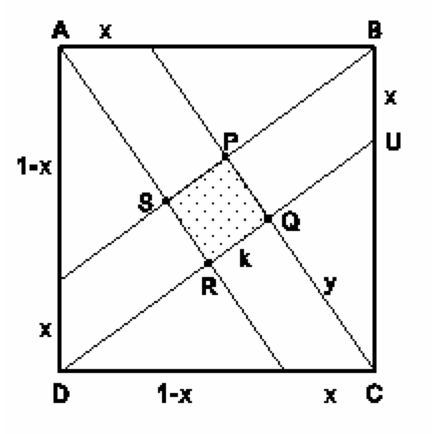
Svar på Opgave 2003-36
August 2003



I kvadratet *ABCD* med sidelængde 1 afsættes punkter på hver af siderne i en afstand på *x* fra hjørnerne som vist. Punkterne forbindes, så der opstår et kvadrat *PQRS* i det indre af kvadratet. Vi skal finde ud af, hvor stort tallet *x* er, hvis arealet af kvadratet *PQRS* er $\frac{1}{2003}$.

Vi sætter $|BP| = |CQ| = |DR| = |AS| = y$ og kvadratsiden $|PQ| = k$.

I ΔDQC får vi ved hjælp af Pythagoras' sætning:

$$(y+k)^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow 2y^2 + 2ky + k^2 - 1 = 0$$

$$y = \frac{-2k \pm \sqrt{4k^2 - 4\cdot 2(k^2-1)}}{4} = \frac{-2k \pm \sqrt{8-4k^2}}{4}$$

Da *y* er positiv er

$$y = \frac{-k \pm \sqrt{2-k^2}}{2} \qquad (1.1)$$

Da ΔPBC og ΔQUC er ensvinklede er

$$\frac{PC}{QC} = \frac{BC}{UC} \Leftrightarrow \frac{y+k}{y} = \frac{1}{1-x} \Leftrightarrow y = (y+k)(1-x)$$
$$1-x = \frac{y}{y+k} \Leftrightarrow x = 1 - \frac{y}{y+k} = \frac{k}{y+k} \quad . \qquad (1.2)$$

Af ligningen (1.1) får vi

$$y+k=\frac{-k+\sqrt{2-k^2}}{2}+k=\frac{k+\sqrt{2-k^2}}{2}$$

så (1.2) giver

$$x=\frac{k}{y+k}=\frac{2k}{k+\sqrt{2-k^2}}=\frac{2k(k-\sqrt{2-k^2})}{(k+\sqrt{2-k^2})(k-\sqrt{2-k^2})}$$

$$=\frac{2k^2-2k\sqrt{2-k^2}}{k^2-(2-k^2)}=\frac{2k^2-2k\sqrt{2-k^2}}{2k^2-2}=\frac{k^2-k\sqrt{2-k^2}}{k^2-1} \quad .$$

Heri kan vi nu indsætte k = $\frac{1}{\sqrt{2003}}$ så vi får

$$x=\frac{\frac{1}{2003}-\frac{1}{\sqrt{2003}}\cdot\sqrt{2-\frac{1}{2003}}}{\frac{1}{2003}-1} \quad .$$

Forlæng brøken med 2003:

$$x=\frac{1-\sqrt{2003}\cdot\sqrt{2-\frac{1}{2003}}}{1-2003}=\frac{1-\sqrt{4006-1}}{1-2003}=\frac{\sqrt{4005}-1}{2002}=\frac{3\sqrt{445}-1}{2002} \quad .$$

Dermed er den ønskede værdi af x fundet. På grafregneren finder vi at x ≅ 0,031111 ≅ 0,03. Vi skal derfor kun afskære ca. 3% af kvadratets sidelængde til x.