Svar på Opgave 2003-37 September 2003

Vi skal vise at brøken

$$\frac{n^3-3n^2+2n-3}{n^3+3n^2+2n+3}$$

er forkortelig uanset hvilken værdi det naturlige tal n antager.

1. metode. Vi omskriver brøken sådan:

$$\frac{n^3-3n^2+2n-3}{n^3+3n^2+2n+3}=\frac{n^3-n-3n^2+3n-3}{n^3-n+3n^2+3n+3}=\frac{n(n^2-1)-3(n^2-n+1)}{n(n^2-1)+3(n^2+n+1)}$$

$$=\frac{n(n+1)(n-1)-3(n^2-n+1)}{n(n+1)(n-1)+3(n^2+n+1)}$$

I både tæller og nævner optræder produktet $(n - 1)\cdot n\cdot(n + 1)$ af tre på hinanden følgende tal i talrækken. I et sådant produkt ligger netop én af faktorerne i 3-tabellen, så produktet er deleligt med 3.

Sidste led i tæller og nævner er også deleligt med 3, fordi faktoren 3 optræder. Da alle fire led i brøken er delelige med 3 kan brøken forkortes med 3.

2. metode. Vi benytter at ethvert naturligt tal n kan skrives på en af måderne

$$n = 3k \quad , \quad n = 3k + 1 \quad , \quad n = 3k - 1 \ ,$$

fordi ethvert naturligt tal enten ligger i 3-tabellen ($n = 3k$), eller er 1 større end et tal i 3-tabellen ($n = 3k + 1$) eller er 1 mindre end et tal i 3-tabellen ($n = 3k - 1$).

Hvis n er et tal i 3-tabellen kan brøken forkortes med 3, fordi alle 8 led i brøken er delelige med 3.

Hvis $n = 3k + 1$ udregner vi

$$n^3 = (3k + 1)^3 = 27k^3 + 27k^2 + 9k + 1 \quad \text{og} \quad n^2 = (3k + 1)^2 = 9k^2 + 6k + 1 \ .$$

Tælleren i brøken bliver så

$$n^3 - 3n^2 + 2n - 3 = 27k^3 + 27k^2 + 9k + 1 - 3(9k^2 + 6k + 1) + 2(3k + 1) - 3 = 27k^3 - 3k - 3 \ .$$

Nævneren bliver

$$n^3 +3n^2 + 2n + 3 = 27k^3 + 27k^2 + 9k + 1 + 3(9k^2 + 6k + 1) + 2(3k + 1) - 3$$

$$= 27k^3 + 54k^2 + 30k + 9 \ .$$

Da samtlige led i tæller og nævner er delelige med 3 kan brøken forkortes med 3.
Hvis endelig $n = 3k - 1$ kan regningerne foretages på helt tilsvarende måde.