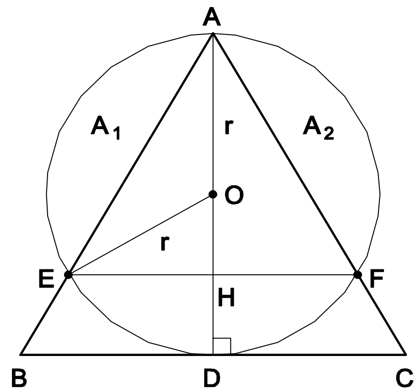
Svar på Opgave 2003-38 Oktober 2003



Vi anvender Pythagoras' sætning på ΔABD:

$$AD^2 + BD^2 = AB^2 \Leftrightarrow AD^2 + 4 = 16 \Leftrightarrow AD = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \ ,$$

så radius i cirklen er

$$r = AO = \tfrac{1}{2}AD = \sqrt{3} \ .$$

AB og *AC* skærer cirklen i *E* og *F*. Punkterne *A*, *E* og *F* ligger på cirklen med 120° afstand. Derfor er buen *AE* 120°, så ∠AOE = 120°.

Arealet af cirklen er $\pi r^2 = 3\pi$, så arealet af cirkeludsnittet *AOE* (lagkagestykket) er π. Arealet *T* af ΔAOE er efter arealformlen for trekanter

$$T = \tfrac{1}{2}\cdot r\cdot r\cdot \sin\angle AOE = \tfrac{1}{2}\cdot 3\cdot \sin 120° = \frac{1}{2}\cdot 3\cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4} \ .$$

Dermed er arealet A_1 af det cirkelafsnit der ligger uden for trekantsiden *AB* lig med

$$\pi - \frac{3\sqrt{3}}{4} \ .$$

De to cirkelafsnit A_1 og A_2 uden for trekanten har altså et samlet areal på det dobbelte:

$$2\pi - \frac{3\sqrt{3}}{2} \ .$$

Vi anfører en anden løsning der stammer fra Christian O. Lund, 2x, Amtsgymnasiet i Roskilde.

(se side 2)

Som før finder vi at $r = \sqrt{3}$. Vi har at ΔAEF er ligebenet fordi $A = 60°$ og $AE = AF$. Da O er centrum for den omskrevne cirkel for ΔAEF er O centrum centrum i trekanten, dvs. skæringspunktet for højder og for medianer.

Medianernes skæringspunkt deler hver median i forholdet 2:1 regnet fra vinkelspidsen. Derfor er AO dobbelt så lang som OH, dvs.

$$AH = \tfrac{3}{2}AO = \tfrac{3}{2}r = \frac{3\sqrt{3}}{2} \ .$$

Desuden er $OH = \tfrac{1}{2}AO = \tfrac{1}{2}r$ og Pythagoras' sætning anvendt på ΔOEH giver

$$EH^2 = OE^2 - OH^2 = r^2 - \tfrac{1}{4}r^2 = \tfrac{3}{4}r^2 = \tfrac{3}{4}\cdot 3 = \tfrac{9}{4} \ \Leftrightarrow \ EH = \tfrac{3}{2} \ ,$$

så at $EF = 2\cdot EH = 3$. Arealet af ΔAEF er

$$\tfrac{1}{2}\cdot EF\cdot AH = \tfrac{1}{2}\cdot 3\cdot\frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{9\sqrt{3}}{4} \, .$$

Cirklens areal er $\pi r^2 = 3\pi$, så den del af cirklen der ligger uden for trekanten (de tre lagkagestykker) har et samlet areal på

$$3\pi - \frac{9\sqrt{3}}{4} \ .$$

Derfor har de to søgte lagkagestykker et areal på

$$\frac{2}{3}\left(3\pi - \frac{9\sqrt{3}}{4}\right) = 2\pi - \frac{3\sqrt{3}}{2} \ .$$