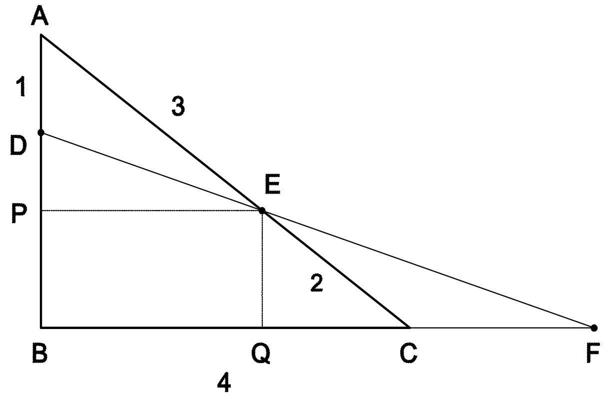
Svar på opgave 2003-40
December 2003

Vi angiver 3 forskellige løsningsmetoder som vi har modtaget fra læserne.

Løsning 1:



Vi projicerer E på AB og BC i henholdsvis P og Q. Da ΔAPE og ΔABC er ensvinklede er

$$\frac{AP}{AB}=\frac{AE}{AC} \iff \frac{AP}{3}=\frac{3}{5} \iff AP=\frac{9}{5} .$$

Da ΔEQC og ΔABC er ensvinklede er

$$\frac{CQ}{CB}=\frac{CE}{CA} \iff \frac{CQ}{4}=\frac{2}{5} \iff CQ=\frac{8}{5} .$$

Nu er

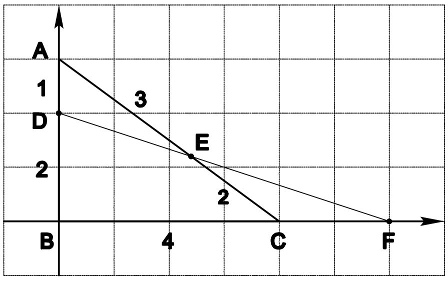
$$DP = AP - AD = \tfrac{9}{5} - 1 = \tfrac{4}{5} \quad \text{og} \quad PE = BQ = BC - QC = 4 - \tfrac{8}{5} = \tfrac{12}{5} .$$

Da endelig ΔDPE og ΔDBF er ensvinklede får vi

$$\frac{BF}{PE}=\frac{DB}{DP} \Leftrightarrow BF\cdot DP = PE\cdot DB \iff BF\cdot\frac{4}{5}=\frac{12}{5}\cdot 2 \iff BF=6 ,$$

og dermed
$CF = BF - BC = 6 - 4 = 2$.

Løsning 2:



Vi anbringer figuren i et koordinatsystem med *B* som begyndelsespunkt.
Så har vi koordinaterne *C* (4,0) og *A* (0,3) og dermed

$$\overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

og dermed

$$\overrightarrow{CE} = \tfrac{2}{5}\overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix} -\frac{8}{5} \\ \frac{6}{5} \end{pmatrix}$$

Altså fås koordinaterne til *E*:

$$\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CE} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{8}{5} \\ \frac{6}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{12}{5} \\ \frac{6}{5} \end{pmatrix}.$$

Nu har *D* koordinaterne (0,2), så linjen *DE* har hældningen

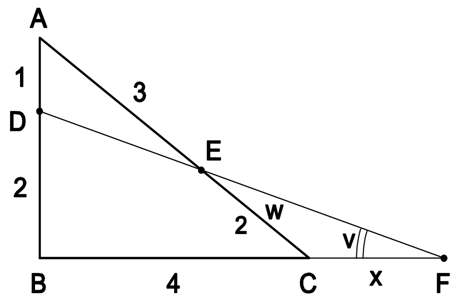
$$\frac{\frac{6}{5} - 2}{\frac{12}{5} - 0} = -\frac{1}{3}$$

og dermed ligningen

$$y = -\tfrac{1}{3}x + 2\ .$$

Heraf ser vi at skæringspunktet med x-aksen er (6,0), fordi dette punkt passer i ligningen.

Løsning 3:



Vi sætter $x = CF$, $\angle CFE = v$ og $\angle CEF = w$.

Så fås af ΔDBF at $\angle BDF = 90° - v$ og af ΔADE fås at

$\angle ADE = 180° - \angle BDF = 180° - (90° - v) = 90° + v$.

Sinusrelationen i ΔADE giver

$$\frac{1}{\sin\angle DEA} = \frac{3}{\sin\angle ADE} \Leftrightarrow \frac{1}{\sin w} = \frac{3}{\sin(90° + v)} \tag{1}$$

og i ΔCEF fås

$$\frac{x}{\sin\angle CEF} = \frac{2}{\sin\angle CFE} \Leftrightarrow \frac{x}{\sin w} = \frac{2}{\sin v} . \tag{2}$$

Da $\sin(90° + v) = \cos v$ giver ligning (1) ved multiplikation med x:

$$\frac{x}{\sin w} = \frac{3x}{\cos v} . \tag{3}$$

Af (2) og (3) fås så

$$\frac{2}{\sin v} = \frac{3x}{\cos v} \Leftrightarrow 2 = \frac{3x \cdot \sin v}{\cos v} \Leftrightarrow 2 = 3x \cdot \tan v \Leftrightarrow \tan v = \frac{2}{3x} . \tag{4}$$

I den retvinklede ΔDBF får vi

$$\tan v = \frac{BD}{BF} = \frac{2}{4 + x} . \tag{5}$$

Altså giver (4) og (5):

$$\frac{2}{3x} = \frac{2}{4 + x} \Leftrightarrow 3x = 4 + x \Leftrightarrow x = 2 .$$