Svar på opgave 2004-41
Januar 2004

Vi skal vise at

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}=1\,.$$

Nedenfor angives 2 løsningsmetoder.

Løsning 1.

Vi ganger med $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}$ på begge sider, så ligningen er ensbetydende med

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}^{\,2}+\sqrt[3]{(2-\sqrt{5})(2+\sqrt{5})} = \sqrt[3]{2+\sqrt{5}} \quad\Leftrightarrow\quad \sqrt[3]{2+\sqrt{5}}^{\,2}+\sqrt[3]{4-5}=\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{2+\sqrt{5}}^{\,2}-1 = \sqrt[3]{2+\sqrt{5}}\,. \qquad (1)$$

Vi skal vise at denne ligning er sand. For nemheds skyld sætter vi

$$x = \sqrt[3]{2+\sqrt{5}}\ ,$$

så ligningen (1) er ensbetydende med

$$x^2 - 1 = x \;\Leftrightarrow\; x^2 - x - 1 = 0 \;\Leftrightarrow\; x = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\,.$$

Nu er x positiv, så $x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. Vi skal vise at dette er sandt, altså at

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}\,.$$

Ved at gange med 2 og opløfte til 3. potens på begge sider får vi at

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \;\Leftrightarrow\; 2\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} = 1+\sqrt{5} \Leftrightarrow 8(2+\sqrt{5}) = (1+\sqrt{5})^3\,. \qquad (2)$$

Den sidste parentes udregnes efter formlen

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3\,,$$

så vi får

$$(1+\sqrt{5})^3 = 1 + 3\cdot1\cdot\sqrt{5} + 3\cdot1\cdot5 + \sqrt{5}^{\,3} = 1 + 3\sqrt{5} + 15 + 5\sqrt{5} = 16 + 8\sqrt{5}\,.$$

Dermed er (2) sand, hvilket skulle vises.

Løsning 2.

Vi benytter formlen oven for:

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = a^3 + 3ab(a + b) + b^3 \;. \qquad (3)$$

Vi sætter

$$a = \sqrt[3]{2+\sqrt{5}} \quad \text{og} \quad b = \sqrt[3]{2-\sqrt{5}} \;,$$

så vi får

$$ab = \sqrt[3]{2+\sqrt{5}} \cdot \sqrt[3]{2-\sqrt{5}} = \sqrt[3]{(2+\sqrt{5})(2-\sqrt{5})} = \sqrt[3]{4-5} = \sqrt[3]{-1} = -1$$

og

$$a^3 = 2 + \sqrt{5} \quad \text{og} \quad b^3 = 2 - \sqrt{5} \;.$$

For nemheds skyld sætter vi $x = a + b$ så vi af (3) får

$$x^3 = 2 + \sqrt{5} + 3\cdot(-1)\cdot x + 2 - \sqrt{5} \;\Leftrightarrow\; x^3 = 4 - 3x \;.$$

Hvis vi sætter $f(x) = x^3$ og $g(x) = 4 - 3x$ ser vi at f er voksende og g er aftagende og begge er defineret for alle x. Derfor vil deres grafiske billeder skære hinanden i præcis ét punkt. Vi ser at $x = 1$ passer i ligningen – og det er den eneste værdi, der passer. Altså er $x = 1$, hvilket skulle vises.