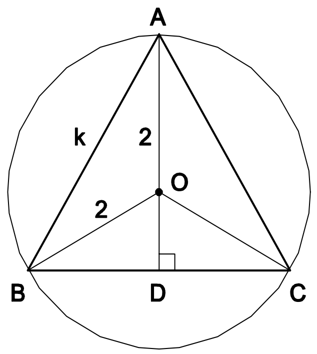
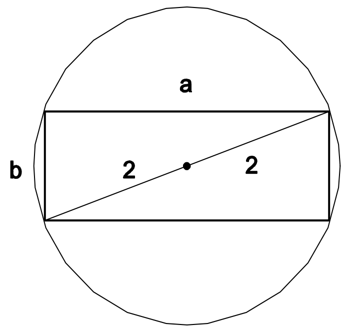
Svar på opgave 2004-42
Februar 2004





I den ligesidede ΔABC er O centrum for den omskrevne cirkel med radius 2 og k er sidelængden i trekanten. Vi anvender cosinusrelationen i ΔAOB og får

$$k^2 = 2^2 + 2^2 - 2\cdot 2\cdot 2\cdot \cos 120° = 8 - 8\cdot(-½) = 12 \iff k = \sqrt{12}\ .$$

Lad D være skæringspunkt mellem AO og BC, dvs. D er midtpunkt af siden BC. Så er

$$BD = \tfrac{1}{2}k = \sqrt{3}$$

og

$$AD^2 = AB^2 - BD^2 = k^2 - (\tfrac{1}{2}k)^2 = \tfrac{3}{4}k^2 = \tfrac{3}{4}\cdot 12 = 9\ .$$

Derfor er arealet T af ΔABC

$$T = \tfrac{1}{2}\cdot BC\cdot AD = BD\cdot AD = \sqrt{3}\cdot\sqrt{9} = \sqrt{27}\ .$$

Rektanglet har altså også arealet $\sqrt{27}$. Vi betegner sidelængderne i rektanglet med a og b hvor $a > b$, så vi får at

$$a\cdot b = \sqrt{27} \iff a^2b^2 = 27 \iff a^2 = \frac{27}{b^2}\ ,$$

og desuden er efter Pythagoras' sætning

$$a^2 + b^2 = 4^2\ .$$

Altså er

$$\frac{27}{b^2} + b^2 = 16 \iff 27 + b^4 = 16b^2 \iff b^4 - 16b^2 + 27 = 0\ .$$

Dette er en andengradsligning i b^2 så vi får ved den sædvanlige løsningsformel

$$b^2 = \frac{16 \pm \sqrt{256-108}}{2} = \frac{16 \pm \sqrt{148}}{2} = \frac{16 \pm 2\sqrt{37}}{2} = 8 \pm \sqrt{37} \Leftrightarrow b = \sqrt{8 \pm \sqrt{37}} .$$

Da b tydeligvis er mindre end 2 er $\underline{\underline{b = \sqrt{8-\sqrt{37}}}}$.

Dernæst får vi længden a:

$$a^2 = \frac{27}{b^2} = \frac{27}{8-\sqrt{37}} = \frac{27(8+\sqrt{37})}{(8-\sqrt{37})(8+\sqrt{37})} = \frac{27(8+\sqrt{37})}{64-37} = 8+\sqrt{37} \Leftrightarrow \underline{\underline{a = \sqrt{8+\sqrt{37}}}} .$$

Dermed er de ønskede sider a og b i rektanglet fundet.