Svar på opgave 2004-43 Marts 2004

Vi skal løse uligheden

$$\frac{2\sqrt{x}-x}{\sqrt{x}-2x} \;\leq\; 15\sqrt{x}.$$

Vi må kræve at x > 0 og at

$$\sqrt{x}-2x \neq 0 \;\Leftrightarrow\; x \neq \tfrac{1}{4}$$

Vi forkorter brøken med $\sqrt{x}$ så uligheden er ensbetydende med

$$\frac{2-\sqrt{x}}{1-2\sqrt{x}} \leq 15\sqrt{x} \;\Leftrightarrow\; \frac{2-\sqrt{x}}{1-2\sqrt{x}}-15\sqrt{x} \;\leq\; 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{2-\sqrt{x}-15\sqrt{x}(1-2\sqrt{x})}{1-2\sqrt{x}} \;\leq\; 0$$

.

$$\Leftrightarrow\; \frac{2-\sqrt{x}-15\sqrt{x}+30x}{1-2\sqrt{x}} \;\leq\; 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{30x-16\sqrt{x}+2}{1-2\sqrt{x}} \;\leq\; 0\;.$$

For nemheds skyld sætter vi z = $\sqrt{x}$ altså x = z^2 så uligheden får udseendet

$$\frac{30z^2-16z+2}{1-2z} \;\leq\; 0\;.$$

Vi deler op i to tilfælde:

I. Hvis 1-2z < 0 er z > $\frac{1}{2}$ og nævneren er negativ. Når vi ganger med nævneren skal vi derfor vende ulighedstegnet så vi får

$$30z^2 - 16z + 2 \;\geq\; 0\;.$$

Rødderne i dette andengradspolynomium er

$$z=\frac{16\pm\sqrt{256-240}}{60} \;\Leftrightarrow\; z=\frac{1}{3} \;\vee\; z=\frac{1}{5}\;.$$

Uligheden har derfor løsningerne

$$z \geq \tfrac{1}{3} \vee z \leq \tfrac{1}{5}\;,$$

men da samtidig z > $\frac{1}{2}$ har vi som løsninger z > $\frac{1}{2}$, hvoraf $\sqrt{x} \;>\; \frac{1}{2} \;\Leftrightarrow\; x \;>\; \frac{1}{4}$.

II. Hvis $1\text{-}2z > 0$ er $z < \frac{1}{2}$ og nævneren positiv. Ved multiplikation med nævneren skal ulighedstegnet *ikke* vendes så vi får

$$30z^2 - 16z + 2 \le 0 .$$

Løsningerne til denne andengradsulighed er

$$\tfrac{1}{5} \le z \le \tfrac{1}{3} .$$

Alle disse værdier af z opfylder at $z < \frac{1}{2}$, så løsningerne er

$$\tfrac{1}{5} \le \sqrt{x} \le \tfrac{1}{3} \Leftrightarrow \tfrac{1}{25} \le x \le \tfrac{1}{9} .$$

Sammenfattende er løsningsmængden L til den oprindelige ulighed

$$L = \underline{\underline{\left[\frac{1}{25};\frac{1}{9}\right] \cup \left]\frac{1}{4};\infty\right[}}$$