Svar på opgave 2004-45
Maj 2004

Checken lyder på x euro og y cent, hvor $0 < x < 100$ og $0 < y < 100$, dvs. beløbet er $100x + y$ cent. Tiggeren får 1 € så Herbert derefter har $100y + x - 100$ cent. Dette beløb er det dobbelte af checkens pålydende så

$$100y + x - 100 = 2(100x + y) \Leftrightarrow 100y + x - 100 = 200x + 2y \Leftrightarrow 98y - 199x = 100 .$$

Dette er en såkaldt *diofantisk* ligning, dvs. en ligning hvori vi søger *hele* løsninger. Der findes en fremgangsmåde til at løse sådanne ligninger af første grad. Vi isolerer dén af de to variable med den numerisk mindste koefficient, her y:

$$98y = 199x + 100 \Leftrightarrow y = \frac{199x+100}{98} = 2x+1+\frac{3x+2}{98} .$$

Da y er et helt tal må $\frac{3x+2}{98}$ være et helt tal, som vi kan betegne med k:

$$k = \frac{3x+2}{98} \Leftrightarrow 3x + 2 = 98k \Leftrightarrow 3x = 98k - 2$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{98k-2}{3} = 32k + \frac{2k-2}{3} .$$

Da x er hel må $\frac{2k-2}{3}$ være et helt tal, så vi kan sætte

$$p = \frac{2k-2}{3} \Leftrightarrow 3p = 2k - 2 \Leftrightarrow k = \frac{3p+2}{2} = p+1+\frac{p}{2} .$$

Da endelig k er et helt tal, er $\frac{p}{2}$ hel, så vi kan sætte

$$t = \frac{p}{2} \Leftrightarrow p = 2t .$$

Nu indsætter vi baglæns op gennem ligningerne

$$k = p+1+\frac{p}{2} = 2t + 1 + t = 3t + 1$$
$$\boldsymbol{x} = 32k + \frac{2k-2}{3} = 32(3t + 1) + p = 96t + 32 + 2t = 98t + 32$$
$$y = 2x + 1 + \frac{3x+2}{98} = 2(98t + 32) + 1 + k = 196t + 65 + 3t + 1 = 199t + 66$$

Samtlige løsninger x og y til ligningen i begyndelsen har derfor formen

$$x = 98t + 32 \ , \ y = 199t + 66 .$$

Checken lød derfor på 32,66 €, kassereren udbetalte 66,32 €. Efter at tiggeren havde fået 1 €, har Herbert 65,32 € tilbage, hvilket netop er det dobbelte af 32,66 €.