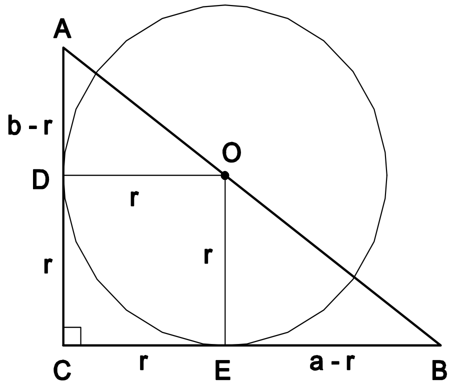
# Svar på opgave 2004-46 August 2004

Situationen er at kateterne i den retvinklede ΔABC har længderne *a* og *b* og en cirkel med radius *r* med centrum på hypotenusen tangerer kateterne. Vi skal vise at $\frac{1}{r}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$

*1. metode.*

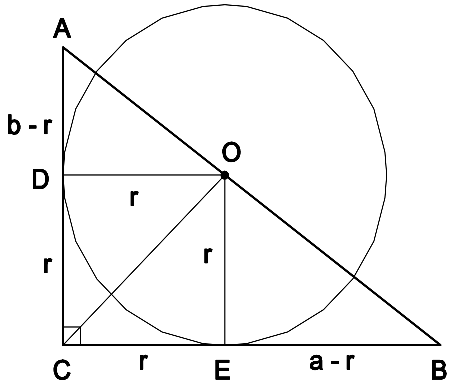



Vi nedfælder de vinkelrette fra centrum *O* på siderne *AC* og *BC* i henholdsvis *D* og *E*.
Så er *OD* = *OE* = *r* og da Δ*ADO* og Δ*OEB* er ensvinklede får vi

$$\frac{b-r}{r}=\frac{r}{a-r} \Leftrightarrow r^2=(b-r)(a-r) \Leftrightarrow r^2=ab-rb-ra+r^2$$

$$\Leftrightarrow ra+rb=ab \Leftrightarrow \frac{ra}{abr}+\frac{rb}{abr}=\frac{ab}{abr} \Leftrightarrow \frac{1}{b}+\frac{1}{a}=\frac{1}{r}.$$

*2. metode.*



Vi deler $\Delta ABC$ op i de to trekanter $\Delta AOC$ og $\Delta COB$. For disse trekanters arealer gælder så

$$Ar(\Delta ABC) = Ar(\Delta AOC) + Ar(\Delta COB) \Leftrightarrow \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}br + \frac{1}{2}ar$$

$$\Leftrightarrow ab = br + ar \Leftrightarrow \frac{ab}{abr} = \frac{br}{abr} + \frac{ar}{abr} \Leftrightarrow \frac{1}{r} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}\ .$$

**Bemærkning.** I en retvinklet $\Delta ABC$ gælder med de sædvanlige betegnelser at

$$a^2 + b^2 = c^2$$

dvs. summen af kateternes 2. potenser er $c^2$.

I Månedens Opgave nr. 3 (april 2000) skulle vi vise at der i en retvinklet $\Delta$ABC gælder at

$$a^{-2} + b^{-2} = h^{-2}$$

hvor $h$ er højden fra hypotenusen.

I denne opgave har vi vist at

$$a^{-1} + b^{-1} = r^{-1}$$

hvor $r$ er radius i den specielle cirkel, vi har nævnt.

Ialt har vi altså fundet udtryk for summen af kateternes potenser med eksponenter der er -2, -1 og 2. Selvfølgelig kan vi også nævne eksponenten 0, selvom den ikke er så interessant: $a^0 + b^0 = 2$.

*Findes der mon en interessant formel for eksponent 1, altså for a + b?*