Svar på opgave 2004-47
September 2004

Vi skal finde to hele positive tal, hvis kvadrater har en forskel på 105. Vi betegner tallene med x og y. Så har vi at

$$x^2 - y^2 = 105 \iff (x+y)(x-y) = 105 .$$

Her er 105 produkt af de to hele tal $x + y$ og $x - y$. Nu kan 105 skrives som produkt af to hele tal på fire måder:

$$105 = 105 \cdot 1 = 21 \cdot 5 = 15 \cdot 7 = 35 \cdot 3 .$$

Dermed er $x + y$ større end $x - y$, så vi får følgende fire muligheder:

1. $x + y = 105$	II. $x + y = 21$	III. $x + y = 35$	IV. $x + y = 15$
$x - y = 1$	$x - y = 5$	$x - y = 3$	$x - y = 7$.

Disse ligningssystemer løses og man får løsningerne

I. $(x,y) = (53,52)$ II. $(x,y) = (13,8)$ III. $(x,y) = (19,16)$ IV. $(x,y) = (11,4)$.

Vi kontrollerer at

$$105 = 53^2 - 52^2 = 19^2 - 16^2 = 13^2 - 8^2 = 11^2 - 4^2 .$$

Der er således fire løsninger til problemet.

Alternativ metode. En indsender bruger følgende metode, som vi pynter lidt på. Da forskellen mellem to kvadrattal skal give 105 kan vi skrive at

$$(n+y)^2 - y^2 = 105 \iff n^2 + y^2 + 2ny - y^2 = 105$$

$$\iff n^2 + 2ny = 105 \iff y = \frac{105 - n^2}{2n} = \frac{105}{2n} - \frac{1}{2}n .$$

Funktionen

$$f(x) = \frac{105}{2x} - \frac{1}{2}x$$

er aftagende, fordi den er sum af de to aftagende funktioner

$$f_1(x) = \frac{105}{2x} \quad \text{og} \quad f_2(x) = -\frac{1}{2}x .$$

Vi ser at $f(10) > 0$ og $f(11) < 0$, så behøver kun at se på f i intervallet]0;11[når x er hel. Vi kan tabellægge funktionen på grafregneren og finder at funktionen kun har hele værdier for x = 1, 3, 5 og 7 og at værdierne er henholdsvis 52, 16, 8 og 4. Dermed kan vi bruge værdierne

$n + y = 53$, $n = 1$ dvs. $53^2 - 52^2 = 105$
$n + y = 19$, $n = 3$ dvs. $19^2 - 16^2 = 105$
$n + y = 13$, $n = 5$ dvs. $13^2 - 5^2 = 105$
$n + y = 11$, $n = 7$ dvs. $11^2 - 4^2 = 105$.