Svar på opgave 2004-48
Oktober 2004

Vi skal inden for de reelle tal løse ligningssystemet

$$x^3 = 2y - 1$$
$$y^3 = 2z - 1$$
$$z^3 = 2x - 1\ .$$

Hvis (x,y,z) er en løsning, hvori x, y og z var parvis forskellige, kan vi forudsætte, at $x < y < z$. Så ville vi ved at trække den første ligning fra den tredje få, at

$$z^3 - x^3 = 2(x - y)\ .$$

Her er venstre side positiv (fordi $z > x$) og højre side negativ (fordi $x < y$) og det er umuligt.

Altså kan de tre tal x, y og z ikke være parvis forskellige, så mindst to af dem er ens, fx kan vi sætte $x = y$. Den første ligning giver så at

$$x^3 = 2x - 1 \iff x^3 - 2x - 1 = 0 \iff (x-1)\cdot(x^2 + x - 1) = 0$$
$$\iff x = 1 \ \vee\ x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \ \vee\ x = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\ .$$

Da $x = y$ får vi af de to første ligninger i systemet at $y = z$, så løsningssættene til systemet skal søges blandt talsættene

$$(x,y,z)\ :\ (1,1,1)\ ,\ \left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right),\ \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right).$$

Ved at gøre prøve i ligningssystemet ser man, at disse talsæt faktisk *er* løsninger.