Svar på opgave 2004-50
December 2004

Vi skal finde hele tal p og q, så

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{2}{31} .$$

1. metode. Vi ser straks, at $p = q = 31$ er en løsning. For at finde eventuelt andre løsninger ganger vi med fællesnævneren $31pq$ på begge sider:

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{2}{31} \Leftrightarrow 31(p+q)=2pq .$$

Da 31 går op i venstre side af ligningen, må 31 også gå op i højre side. Da 31 er et primtal, må mindst ét af tallene p og q være deleligt med 31. Hvis p er deleligt med 31, er $p = 31k$, så vi får

$$31(31k+q)=2\cdot 31k\cdot q \quad\Leftrightarrow\quad 31k+q=2kq \quad\Leftrightarrow\quad (2k-1)q=31k .$$

Da $2k - 1$ og k er indbyrdes primiske, gælder at

$$2k-1=31 \quad \text{og} \quad q=k .$$

Altså er $q = k = 16$ og $p = 31k = 31\cdot 16 = 496$.

I ligningen kan p og q bytte plads. Ialt har vi fundet løsningerne

$$(p,q) : \quad (16,496) \;,\; (31,31) \;,\; (496,16) .$$

2. metode. Vi ændrer betegnelser og skriver ligningen sådan:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{2}{31} .$$

Her optræder x og y symmetrisk. De kan ikke begge være over 31, for hvis det var tilfældet, ville

$$\frac{1}{x}<\frac{1}{31} \quad \text{og} \quad \frac{1}{y}<\frac{1}{31} \;,\; \text{så} \quad \frac{1}{x}+\frac{1}{y}<\frac{2}{31} .$$

Vi udtrykker y som funktion af x:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{2}{31} \Leftrightarrow \frac{1}{y}=\frac{2}{31}-\frac{1}{x} \Leftrightarrow \frac{1}{y}=\frac{2x-31}{31x} \Leftrightarrow y=\frac{31x}{2x-31} .$$

Her skal nævneren være positiv, så $x > 16$. På grund af symmetrien mellem x og y skal vi søge hele løsninger til denne ligning når x gennemløber tallene 16, 17, . . . , 31. Ved hjælp af grafregnerens tabelfacilitet finder vi løsningerne $x = 16$ og $x = 31$. Disse svarer til $y = 496$ og $y = 31$. Dermed har vi samme løsninger som før.