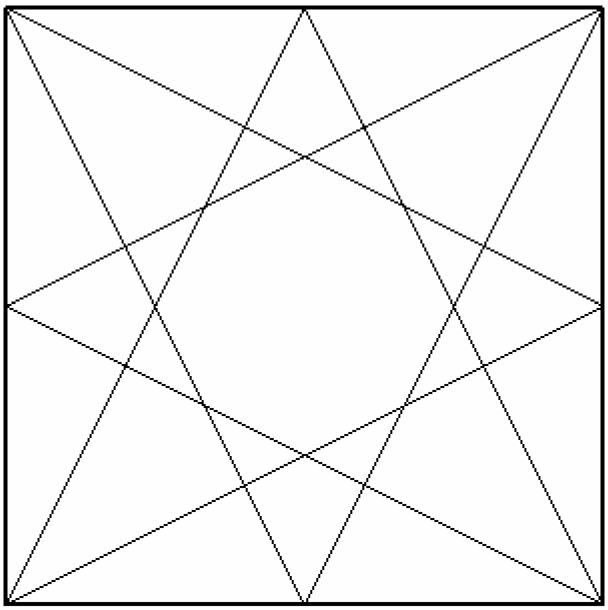
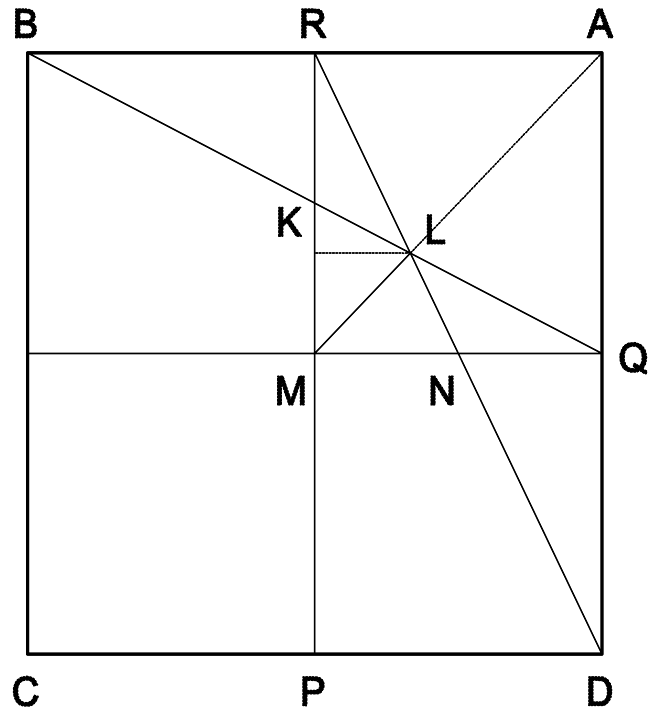
Svar på opgave 2005-51 Januar 2005





På figuren er i et kvadrat tegnet forbindelseslinjerne mellem vinkelspidserne og midtpunkterne af de modstående sider som vist på figuren. Vi skal finde, hvor stor en brøkdel arealet af ottekanten i midten udgør af hele kvadratets areal.

Vi nøjes med at se på den øverste højre fjerdedel af figuren, dvs. på kvadratet *RMQA* og her skal vi finde arealet af firkanten *KMNL* i forhold til arealet af firkanten *RMQA*.
For nemheds skyld betegner vi kvadratets areal med *a*. Så er det klart, at arealet af ΔRPD er $\frac{1}{4}a$:

$$\mathrm{Ar}(\Delta RPD) = \tfrac{1}{4}a\ .$$

Da ΔRMN og ΔRPD er ensvinklede i forholdet 1:2 er arealet af ΔRMN netop $\frac{1}{4}$ af arealet af ΔRPD, dvs.

$$\mathrm{Ar}(\Delta RMN) = \tfrac{1}{16}a\ .$$

Nu er *K* midtpunktet af *RM*, så ΔRKL og ΔKLM har samme areal, fordi de har samme grundlinje ($RK = KM$) og samme højde fra *L*:

$$\mathrm{Ar}(\Delta RKL) = \mathrm{Ar}(\Delta KLM)\ .$$

Figuren er symmetrisk om linjen *AM*, så

$$\mathrm{Ar}(\Delta KLM) = \mathrm{Ar}(\Delta NLM)\ ,$$

og dermed har vi

$$\tfrac{1}{16}\,a = \mathrm{Ar}(\Delta RMN) = \mathrm{Ar}(\Delta RKL) + \mathrm{Ar}(\Delta KLM) + \mathrm{Ar}(\Delta NLM)\ .$$

De tre sidste led har samme værdi, som må være $\tfrac{1}{48}\,a$. Derfor er

$$\mathrm{Ar}(\square KMNL) = 2\cdot \tfrac{1}{48}\,a = \tfrac{1}{24}\,a\ .$$

Da endelig $\mathrm{Ar}(\square RMQA) = \tfrac{1}{4}\,a$, er det søgte arealforhold

$$\frac{1}{24} : \frac{1}{4} = \frac{1}{6}\ .$$