Svar på opgave 2005-52
Februar 2005

1. metode.

Det oplyses, at $x^3+\frac{1}{x^3}=18$. Vi skal finde værdien af $x^4+\frac{1}{x^4}$.

Vi sætter

$$x+\frac{1}{x}=k$$

og får

$$k^2=\left(x+\tfrac{1}{x}\right)^2=x^2+\frac{1}{x^2}+2 \quad \text{så} \quad x^2+\frac{1}{x^2}=k^2-2 \ .$$

Vi ganger med $x+\frac{1}{x}$ og får

$$k(k^2-2)=\left(x+\tfrac{1}{x}\right)\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)=x^3+\frac{1}{x^3}+x+\frac{1}{x}=x^3+\frac{1}{x^3}+k$$

Her kan vi isolere $x^3+\frac{1}{x^3}$:

$$x^3+\frac{1}{x^3}=k(k^2-2)-k=k^3-3k\ .$$

Nu er det opgivet, at $x^3+\frac{1}{x^3}=18$, og dermed er

$$k^3-3k=18 \iff k^3-3k-18=0\ .$$

Her er $k = 3$ løsning, så polynomiet er deleligt med $k - 3$. Ligningen er derfor ensbetydende med

$$(k-3)(k^2+3k+6)=0\ .$$

Den sidste parentes har ingen rødder (diskriminanten er negativ), så den eneste løsning til ligningen er $k = 3$.

Vi ganger endnu en gang med $x+\frac{1}{x}$ og får

$$k(k^3-3k)=\left(x+\tfrac{1}{x}\right)\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)=x^4+\frac{1}{x^4}+x^2+\frac{1}{x^2}=x^4+\frac{1}{x^4}+k^2-2\ ,$$

hvoraf med $k = 3$:

$$3\cdot(27-9)=x^4+\frac{1}{x^4}+9-2 \iff x^4+\frac{1}{x^4}=3\cdot18-9+2=\underline{\underline{47}}$$

2. metode.

Vi forlænger ligningen med x^3 :

$$x^3+\frac{1}{x^3}=18 \Leftrightarrow (x^3)^2+1=18x^3 \quad \Leftrightarrow \quad (x^3)^2-18x^3+1=0 \ .$$

Denne andengradsligning i x^3 har løsningerne

$$x^3=\frac{18\pm\sqrt{(-18)^2-4\cdot 1\cdot 1}}{2}=\frac{18\pm\sqrt{320}}{2}=9\pm 4\sqrt{5} \ .$$

Heraf fås

$$x=\sqrt[3]{9\pm 4\sqrt{5}}=\tfrac{1}{2}(3\pm\sqrt{5}) \ ,$$

hvoraf

$$x^4+\frac{1}{x^4}=\tfrac{1}{16}(3+\sqrt{5})^4+\frac{1}{\tfrac{1}{16}(3+\sqrt{5})^4}=\underline{\underline{47}}$$

eller

$$x^4+\frac{1}{x^4}=\tfrac{1}{16}(3-\sqrt{5})^4+\frac{1}{\tfrac{1}{16}(3-\sqrt{5})^4}=\underline{\underline{47}}$$

Vi finder nemlig ved hjælp af formlen

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \ ,$$

at

$$[\tfrac{1}{2}(3+\sqrt{5})]^3=\tfrac{1}{8}\left(27+3\cdot 3^2\cdot\sqrt{5}+3\cdot 3\cdot\sqrt{5}^2+\sqrt{5}^3\right)$$
$$=\tfrac{1}{8}(27+27\sqrt{5}+45+5\sqrt{5})=\tfrac{1}{8}(72+32\sqrt{5})=9+4\sqrt{5} \ .$$