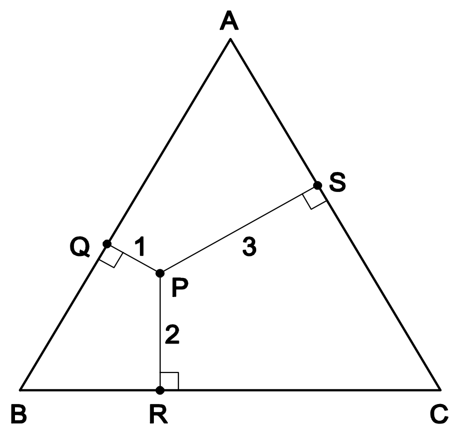
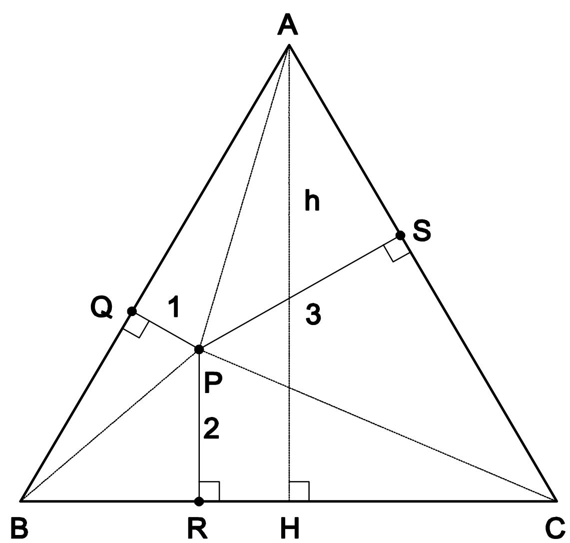
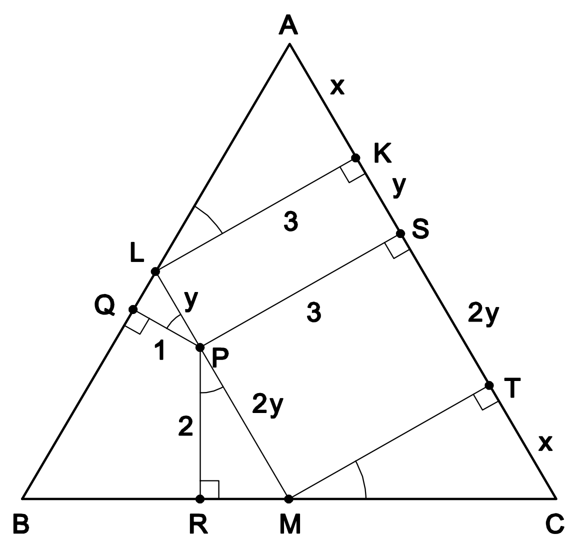
Svar på opgave 2005-53
Marts 2005

Opgaven:
Punktet P i det indre af den ligesidede ΔABC har afstanden 1 til siden AB, afstanden 2 til siden BC og afstanden 3 til siden AC.
Vi skal bestemme trekantens sidelængde.







1. metode.
Vi trækker linjerne PA, PB og PC og betegner sidelængden i ΔABC med a og længden af højden fra en af vinkelspidserne (fx A) med h. Desuden er H fodpunktet af højden på BC.
Pythagoras sætning i ΔAHB giver

$$AH^2 + HB^2 = AB^2 \iff h^2 + (\tfrac{1}{2}a)^2 = a^2 \iff h^2 = \tfrac{3}{4}a^2 \iff h = a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \; .$$

Trekantens areal T er dermed

$$T = \tfrac{1}{2} \cdot a \cdot h = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \ .$$

Trekantens areal kan imidlertid også findes som summen af arealerne af trekanterne PAB, PBC og PAC. Disse arealer er

$$\Delta PAB \ : \ \tfrac{1}{2} a \cdot PQ \quad , \quad \Delta PBC : \tfrac{1}{2} a \cdot PR \quad , \quad \Delta PAC \ : \ \tfrac{1}{2} a \cdot PS \ .$$

Altså er

$$T = \tfrac{1}{2} a \cdot (PQ + PR + PS) = \tfrac{1}{2} a \cdot (1 + 2 + 3) = 3a \ .$$

Men så har vi (da $a \neq 0$), at

$$\frac{\sqrt{3}}{4} a^2 = 3a \ \Leftrightarrow \ \sqrt{3} \cdot a^2 = 12a \ \Leftrightarrow \ \sqrt{3} a = 12 \ \Leftrightarrow \ a = \frac{12}{\sqrt{3}} = \underline{\underline{4\sqrt{3}}} \ .$$

Læg mærke til, at vi desuden har fundet, at

$$\tfrac{1}{2} a \cdot (PQ + PR + PS) = \tfrac{1}{2} a \cdot h \ \text{ hvoraf } \ h = PQ + PR + PS \ .$$

Vi har altså den smukke sætning, at summen af afstandene fra et punkt P i det indre af en ligesidet trekant til siderne netop er højden - og summen af disse afstande er helt uafhængig af, hvor punktet P vælges.

2. metode.

En særdeles skarpsindig metode kommer fra Anders Boesen Lindbo Larsen, Haderslev Katedralskole.

En linje gennem P parallel med AC skærer AB og BC i henholdsvis L og M. De vinkelrette fra L og M på siden AC skærer AC i henholdsvis K og T. Vi sætter $x = AK$, $y = KS = PL$. Så er

$$\angle LPQ = 30° = \angle RPM \ ,$$

så ΔPLQ og ΔPMR er ensvinklede i forholdet 1:2. Derfor er $PM = ST = 2y$. Desuden er ΔALK og ΔCMT kongruente (dvs. helt ens), så $TC = AK = x$.

Nu får vi i ΔALK, at

$$\tan 30° = \frac{x}{3} \ \Leftrightarrow \ x = 3 \cdot \tan 30° = \sqrt{3} \ .$$

I ΔQPL får vi

$$\cos 30° = \frac{1}{y} \ \Leftrightarrow \ y = \frac{1}{\cos 30°} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3}\sqrt{3} \ .$$

Dermed får vi den søgte sidelængde i ΔABC til

$$AC = 2x + 3y = 2\sqrt{3} + 3 \cdot \frac{2}{3}\sqrt{3} = \underline{\underline{4\sqrt{3}}} \ .$$