Svar på opgave 2005-54 April 2005

Vi skal løse ligningssystemet med de tre ubekendte x, y og z:

$$x + yz = 1$$
$$y + xz = 1$$
$$z + xy = 1$$

Vi isolerer z i den sidste ligning:

$$z = 1 - xy ,$$

og indsætter dette i de to første:

$$x + y(1 - xy) = 1 \;\Leftrightarrow\; x + y - xy^2 = 1$$
$$y + x(1 - xy) = 1 \;\Leftrightarrow\; x + y - x^2y = 1 .$$

Den nederste af to ligninger trækkes fra den øverste:

$$(x + y - xy^2) - (x + y - x^2y) = 0 \;\Leftrightarrow\; x^2y - xy^2 = 0 \;\Leftrightarrow\; xy(x - y) = 0 .$$

Heraf fås ved hjælp af nulreglen, at $x = 0$ eller $y = 0$ eller $x = y$.

Hvis $x = 0$ får vi ved indsættelse i det oprindelige system, at $y = 1$ og $z = 1$, så vi får en mulig løsning til $(x,y,z) = (0,1,1)$.
Hvis $y = 0$ får vi i det oprindelige system, at $(x,y,z) = (1,0,1)$.

Disse to talsæt *er* faktisk løsninger, hvilket ses ved indsættelse.

Vi har nu tilfældet $x = y$ tilbage. Af $x = y$ fås

$$x + y - xy^2 = 1 \;\Leftrightarrow\; 2x - x^3 = 1 \;\Leftrightarrow\; x^3 - 2x + 1 = 0 .$$

Her er $x = 1$ løsning, så faktoren $x - 1$ kan sættes uden for parentes:

$$x^3 - 2x + 1 = 0 \;\Leftrightarrow\; (x - 1)(x^2 + x - 1) = 0 ,$$

hvoraf

$$x^2 + x - 1 = 0 \;\vee\; x = 1 \;\Leftrightarrow\; x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \;\vee\; x = 1 .$$

Hvis $x = 1$, er også $y = 1$ og $z = 1 - xy = 0$, så vi får løsningen $(x,y,z) = (1,1,0)$.

Hvis $x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$, er også $y = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$, og z findes af ligningen

$$z = 1 - xy .$$

Da $x = y$ og

$$x^2 + x - 1 = 0 \iff 1 - x^2 = x ,$$

får vi

$$z = 1 - xy = 1 - x^2 = x ,$$

så vi får de mulige løsninger

$$(x,y,z) = \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2} , \frac{-1+\sqrt{5}}{2} , \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \right) \quad \text{og} \quad (x,y,z) = \left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2} , \frac{-1-\sqrt{5}}{2} , \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \right).$$

Ved indsættelse ser vi, at de 5 angivne talsæt faktisk er løsninger.