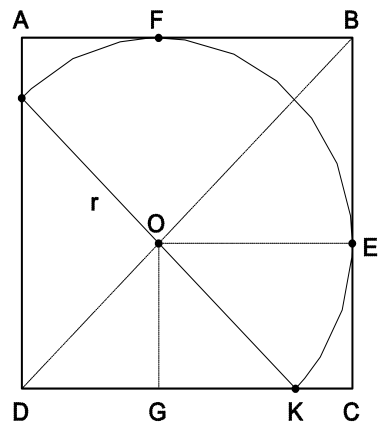
Svar på opgave 2005-55 Maj 2005



Opgaven:

□*ABCD* er et kvadrat med sidelængde 1. Med centrum på diagonalen *BD* tegnes en cirkelbue, der tangerer siderne *AB* og *BC* i henholdsvis *F* og *E* som vist. Bestem den eksakte værdi for radius *r* i cirkelbuen.

Løsning:

Lad *G* være projektionen af *O* på *DC* og *K* diameterens endepunkt på *DC*. Da $\angle DOK = 90°$ og $\angle ODK = 45°$, er $\angle OKD = 45°$, så ΔODK er ligebenet og retvinklet. Så er *G* midtpunkt af *DK*, fordi *OG* er højde.

Nu er

$$DG + GC = 1 \;\Leftrightarrow\; DG + OE = 1 \;\Leftrightarrow\; DG = 1 - r \quad \text{så} \quad DK = 2(1 - r)\,.$$

Pythagoras giver så i ΔODK:

$$OD^2 + OK^2 = DK^2 \;\Leftrightarrow\; r^2 + r^2 = 4(1-r)^2 \;\Leftrightarrow\; 2r^2 = 4r^2 - 8r + 4$$

$$\Leftrightarrow\; 2r^2 - 8r + 4 = 0 \;\Leftrightarrow\; r^2 - 4r + 2 = 0 \;\Leftrightarrow\; r = \frac{4 \pm \sqrt{16-8}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{8}}{2} = 2 \pm \sqrt{2}\,.$$

Da kvadratets side er 1, kan *r* højst være 2, så der gælder, at $r = 2 - \sqrt{2}$, og dette er den søgte eksakte værdi af radius i cirklen.