

# Svar på opgave 2005-56

## August 2005

### Opgaven:

Vi ser på talfølgen

1 2 2 3 3 3 4 4 4 4 5 5 5 5 5 6 6 ...

Tallet  $k$  optræder  $k$  gange.

Besvar med udførlige forklaringer hvert af følgende spørgsmål:

1. Hvilken værdi har led nr. 2005 i denne talfølge?
2. Med hvilket nummer i talfølgen optræder tallet 100 første gang?

### Løsning:

Vi ser på talfølgen

1 2 2 3 3 3 4 4 4 4 ...

hvor tallet  $n$  optræder  $n$  gange.

1.

Vi skal først finde ud af, hvilken værdi led nr. 2005 har.

Der er  $1 + 2 + 3$  led med værdi på højst 3, der er  $1 + 2 + 3 + 4$  led med en værdi på højst 4 osv. Derfor er det af interesse at finde en formel for summen

$$1 + 2 + 3 + \dots + n .$$

Vi betegner denne sum med  $s$ , dvs. vi sætter

$$s = 1 + 2 + 3 + \dots + (n - 1) + n .$$

Så er også

$$s = n + (n - 1) + \dots + 3 + 2 + 1 .$$

Nu lægger vi disse to ligninger sammen led for led:

$$2s = (1 + n) + (2 + n - 1) + (3 + n - 2) + \dots + (n - 1 + 2) + (n + 1) .$$

Der er her  $n$  parenteser, der hver har værdien  $n + 1$ , så vi får

$$2s = n(n + 1) \quad \text{eller} \quad s = \frac{1}{2}n(n + 1) = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n .$$

Hvis  $n$  er er 'stort' tal, er

$$s = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n \approx \frac{1}{2}n^2 .$$

Leddene med værdi  $n$  slutter ved led nr.  $\frac{1}{2}n(n + 1)$ . Vi søger led nr. 2005, så vi skal finde  $n$  så  $\frac{1}{2}n(n + 1) \approx 2005$  eller

$$\frac{1}{2}n^2 \approx 2005 \Leftrightarrow n^2 \approx 4010 \Leftrightarrow n \approx \sqrt{4010} \approx 63,32 .$$

Led med værdien 63 slutter ved led nr.  $\frac{1}{2} \cdot 63 \cdot 64 = 2016$ . Da der i talfølgen er 62 led af værdi 63 forud for led nr. 2016 ser vi, at led nr. 2005 er 63.

## 2.

Dernæst skal vi finde nummeret på det led, der for første gang har værdien 100. Efter ovenstående slutter leddene med værdi 99 ved led nr.  $\frac{1}{2} \cdot 99 \cdot 100 = 4950$ . Derfor optræder tallet 100 i talfølgen for første gang som led nr. 4951.