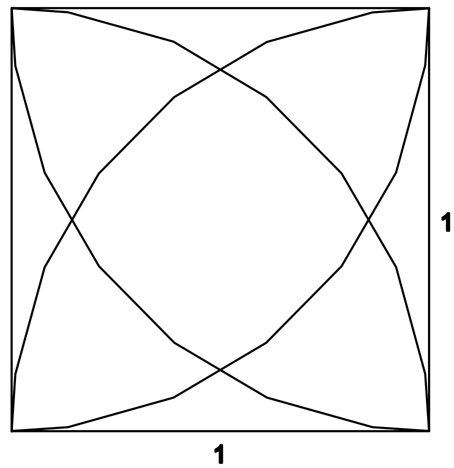
Svar på opgave 2005-57 September 2005

I et kvadrat med sidelængde 1 er tegnet fire kvartcirkler som vist på figuren. Vi skal finde den *eksakte* værdi af arealet af områder begrænset af kvartcirklerne i midten. Vi understreger, at eksakt værdi skal udtrykkes ved rødder, π og lignende og at regninger med decimalbrøker ikke *anses* for korrekte.

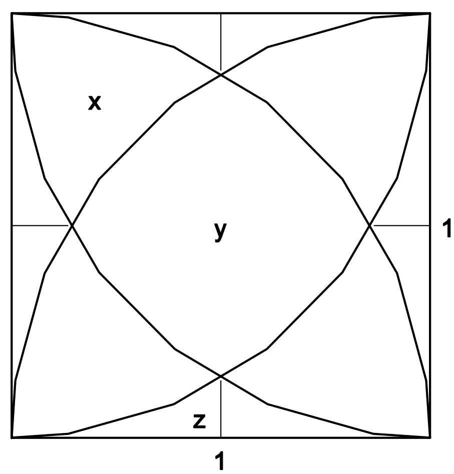


1. metode. Som vist på figuren betegner vi med x, y og z størrelserne af de angivne arealer. Vi ønsker at finde y. Da kvadratets areal er 1, gælder

$$4x + y + 8z = 1 \ .$$

Da arealet af en kvartcirkel er $\frac{1}{4}\pi$, gælder

$$3x + y + 4z = \tfrac{1}{4}\pi \ .$$



Vi indfører betegnelserne E, F, G og H for punkterne på figuren. Vi ser, at ΔABE er ligesidet med sidelængden 1, fordi alle sider i trekanten er radius 1 i en af cirkelbuerne. Så er $FB = \frac{1}{2}$ og i ΔBEF giver Pythagoras sætning:

$$EF^2 = BE^2 - FB^2 = 1 - \tfrac{1}{4} = \tfrac{3}{4} \quad \text{så} \quad EF = \tfrac{\sqrt{3}}{2} \ .$$

Arealet af ΔABE er så

$$\tfrac{1}{2} \cdot AB \cdot EF = \tfrac{1}{2} \cdot 1 \cdot \tfrac{\sqrt{3}}{2} = \tfrac{\sqrt{3}}{4} \ .$$

Den smalle segl mellem buen AGE og ΔABE fås som differensen mellem cirkeludsnittet ('lagkagen') $ABEG$ og ΔABE, dvs. seglens areal er

$$\tfrac{1}{6}\pi - \tfrac{\sqrt{3}}{4} \ .$$

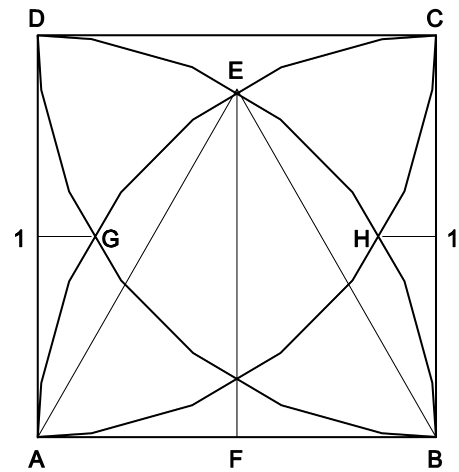
Det krumme område $AGEHB$ består af den ligesidede trekant ABE samt to segl. Området får derfor arealet

$$2x + y + 2z = 2\left(\tfrac{1}{6}\pi - \tfrac{\sqrt{3}}{4}\right) + \tfrac{\sqrt{3}}{4} \ .$$

Vi har nu ligningssystemet bestående af 3 ligninger med 3 ubekendte:

$$4x + y + 8z = 1$$

$$3x + y + 4z = \tfrac{1}{4}\pi$$
$$2x + y + 2z = 2\left(\tfrac{1}{6}\pi - \tfrac{\sqrt{3}}{4}\right) + \tfrac{\sqrt{3}}{4} = \tfrac{1}{3}\pi - \tfrac{\sqrt{3}}{4}\ .$$



Vi eliminerer først z ved at trække 2 gange den anden ligning fra den første:

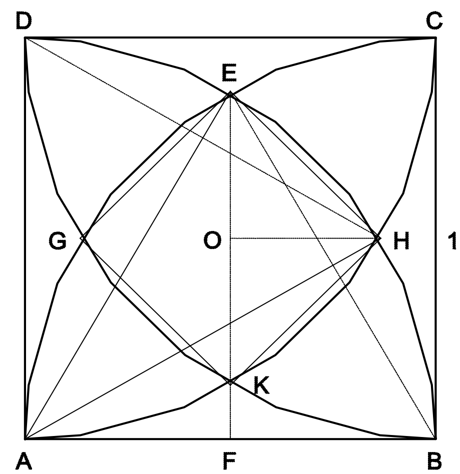
$$4x + y + 8z - 2(3x + y + 4z) = 1 - \tfrac{1}{2}\pi \qquad \text{eller}$$
$$2x + y = \tfrac{1}{2}\pi - 1\ . \qquad (1)$$

Derefter trækker vi 2 gange den tredje ligning fra den anden:

$$3x + y + 4z - 2(2x + y + 2z) = \tfrac{1}{4}\pi - 2\left(\tfrac{1}{3}\pi - \tfrac{\sqrt{3}}{4}\right) =$$
$$\tfrac{\sqrt{3}}{2} - \tfrac{5}{12}\pi$$

hvoraf

$$x + y = \tfrac{5}{12}\pi - \tfrac{\sqrt{3}}{2}\ . \qquad (2)$$



Dernæst elimineres *x*. Af ligningerne (1) og (2) kan vi finde *y*, idet vi ganger ligning (2) med 2 og trækker ligning (1) fra:

$$2(x + y) - (2x + y) = 2\left(\tfrac{5}{12}\pi - \tfrac{\sqrt{3}}{2}\right) - \left(\tfrac{1}{2}\pi - 1\right) = \tfrac{1}{3}\pi - \sqrt{3} + 1\ ,$$

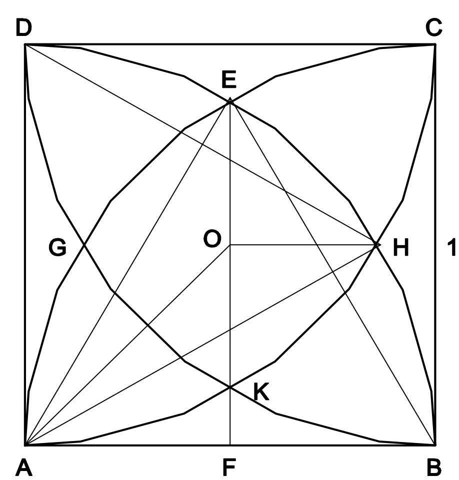
hvoraf det søgte areal

$$y = \tfrac{1}{3}\pi - \sqrt{3} + 1\ .$$

2. metode. Da ΔDHA er ligesidet, er $\angle DAH = 60°$ og dermed $\angle HAB = 30°$. Da ΔEAB er ligesidet, er $\angle EAB = 60°$ og dermed er $\angle DAE = 30°$. Men så er også $\angle HAE = 30°$.

Som under 1. metode finder vi $EF = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Så har vi

$$EF = \tfrac{\sqrt{3}}{2} = EO + OK + KF = 2 \cdot OE + KF$$
$$OF = \tfrac{1}{2} = OK + KF = OE + KF\ .$$



Vi trækker den nederste af disse ligninger fra den øverste og får

$$EF - OF = \tfrac{\sqrt{3}}{2} - \tfrac{1}{2} \qquad \text{eller} \qquad EO = OH = \tfrac{\sqrt{3}}{2} - \tfrac{1}{2}\ .$$

Vi finder arealet af cirkel*udsnittet AHE*, som udgør $\frac{1}{12}$ af enhedscirklen. Arealet af dette cirkeludsnit er derfor $\frac{1}{12}\pi$.

Arealet af ΔAHE er

$$\Delta AHE \quad : \quad \tfrac{1}{2} \cdot AE \cdot AH \cdot \sin \angle HAE = \tfrac{1}{2} \cdot \sin 30° = \tfrac{1}{4} \ ,$$

og derfor er arealet af cirkel*afsnittet* mellem E og H forskellen, altså

$$\text{cirkelafsnit} \quad : \quad \tfrac{1}{12}\pi - \tfrac{1}{4} \ .$$

Vi finder nu arealet af kvadratet *EHKG*. Arealet af ΔOHE er

$$\tfrac{1}{2} \cdot OH \cdot OE = \tfrac{1}{2} \cdot OH^2 = \tfrac{1}{2} \cdot \left(\tfrac{\sqrt{3}}{2} - \tfrac{1}{2} \right)^2 = \tfrac{1}{2} - \tfrac{\sqrt{3}}{4} \ .$$

Altså er arealet af kvadratet *EHKG*

$$4 \cdot (\tfrac{1}{2} - \tfrac{\sqrt{3}}{4}) = 2 - \sqrt{3} \ ,$$

og når vi hertil lægger arealerne af de 4 segl (cirkelafsnit), får vi det søgte areal:

$$2 - \sqrt{3} + 4 \cdot \left(\tfrac{1}{12}\pi - \tfrac{1}{4} \right) = \tfrac{1}{3}\pi - \sqrt{3} + 1 \ .$$

3. metode. Som under 2. metode finder vi $\angle HAE = 30°$. Derfor er arealet af cirkeludsnittet *HAE* netop $\tfrac{1}{12}$ af hele cirklens areal, dvs. det er $\tfrac{1}{12}\pi$.

Vi ser derefter på ΔAOE, hvor vi opfatter *OE* som grundlinje og *AF* som højde. Vi finder at $\angle AEF = 30°$, så

$$EF = AE \cdot \cos 30° = 1 \cdot \tfrac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{så} \quad OE = EF - OF = \tfrac{\sqrt{3}}{2} - \tfrac{1}{2} \ .$$

Arealet af ΔAOE er så

$$\tfrac{1}{2} \cdot OE \cdot AF = \tfrac{1}{2} \cdot \left(\tfrac{\sqrt{3}}{2} - \tfrac{1}{2} \right) \cdot \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{8}(\sqrt{3} - 1) \ .$$

Arealet af området *OEH* er nu cirkeludsnittets areal minus det dobbelte areal af ΔAOE (fordi ΔAOE og ΔAOH er kongruente), altså

$$\mathrm{Ar}(OEH) = \tfrac{1}{12}\pi - 2 \cdot \tfrac{1}{8}(\sqrt{3} - 1) \ .$$

Det søgte areal er nu 4 gange så stort som dette, fordi figuren er symmetrisk om midtpunktet O. Det søgte areal er derfor

$$4 \cdot \mathrm{Ar}(OEH) = \tfrac{1}{3}\pi - \sqrt{3} + 1 \ .$$