Svar på opgave 2005-58
Oktober 2005

Opgaven:

Find alle *hele* talsæt (x,y,z), som passer i ligningssystemet

$$(x+y)(x+y+z)=90$$
$$(y+z)(x+y+z)=105$$
$$(z+x)(x+y+z)=255\ .$$

Løsning:

1. metode.

Vi lægger ligningerne sammen:

$$(x+y)(x+y+z)+\ (y+z)(x+y+z)+\ (z+x)(x+y+z)=450$$

$$\Leftrightarrow\ (x+y+z)(x+y+y+z+x+z)=450\ \Leftrightarrow\ (x+y+z)(2x+2y+2z)=450$$

$$\Leftrightarrow\ 2(x+y+z)^2=450\quad\Leftrightarrow\quad(x+y+z)^2=225\quad\Leftrightarrow\quad(x+y+z)=\pm 15\ .$$

Vi deler derfor op i to tilfælde.

I. $x+y+z=15$.

Ligningssystemet får nu udseendet

$$\begin{array}{lcl} 15(x+y)=90 & & x+y=6 \\ 15(y+z)=105 & \text{eller} & y+z=7 \\ 15(z+x)=255 & & z+x=17\ . \end{array}$$

Ligningerne

$$x+y+z=15\quad\text{og}\quad x+y=6$$

giver ved subtraktion

$$z=9\ ,$$

og heraf fås umiddelbart af de to sidste ligninger, at $y=-2$ og $x=8$, så vi har fundet den mulige løsning $(x,y,z)=(8,-2,9)$. At denne løsning passer i det oprindelige system ses ved indsættelse.

II. $x+y+z=-15$.

Nu har vi systemet

$$\begin{array}{lcl} -15(x+y) = 90 & & x+y=-6 \\ -15(y+z) = 105 & \text{eller} & y+z=-7 \\ -15(z+x) = 255 & & z+x=-17\ . \end{array}$$

Som før giver ligningerne

$$x + y + z = -15 \quad \text{og} \quad x + y = -6$$

ved subtraktion

$$z = -9\ ,$$

og de to sidste ligninger giver $y = 2$ og $x = -8$. Talsættet $(x,y,z) = (-8,2,-9)$ passer i det oprindelige ligningssystem, så vi har ialt fundet løsningerne

$$(x,y,z):\ (8,-2,9)\ ,\ (-8,2,-9)\ .$$

2. metode.

Vi ser på systemet

$$(x + y)(x + y + z) = 90 \tag{1}$$
$$(y + z)(x + y + z) = 105 \tag{2}$$
$$(z + x)(x + y + z) = 255\ . \tag{3}$$

Ved division af (1) med (2) fås, idet ingen af faktorerne kan være 0:

$$\frac{x+y}{y+z} = \frac{90}{105} \iff \frac{x+y}{y+z} = \frac{6}{7} \iff 7x + 7y = 6y + 6z \iff 7x + y = 6z\ . \tag{4}$$

Division af (1) med (3) giver

$$\frac{x+y}{z+x} = \frac{90}{255} \iff \frac{x+y}{z+x} = \frac{6}{17} \iff 17x + 17y = 6x + 6z \iff 11x + 17y = 6z\ .$$

De fundne ligninger giver

$$7x + y = 11x + 17y \iff -4x = 16y \iff x = -4y\ .$$

Af (4) får vi ved indsættelse:

$$-28y + y = 6z \iff 6z = -27y \iff z = -\frac{9}{2}y\ .$$

Nu indsætter vi x og z i (1):

$$(-4y + y)(-4y + y - \tfrac{9}{2}y) = 90 \iff -3y \cdot \frac{-15}{2}y = 90 \iff y^2 = 4 \iff y = \pm 2\ .$$

Heraf fås ved indsættelse i de øvrige ligninger, at $x = \mp 8$ og $z = \mp 9$, så vi får de samme løsninger som før.

3. metode.

Vi sætter for nemheds skyld $x + y + z = k$, så ligningssystemet kan skrives sådan:

$$k(x + y) = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$$

$$k(y+z) = 3\cdot 5\cdot 7$$
$$k(z+x) = 3\cdot 5\cdot 17\ .$$

Derfor skal k gå op både i 90, 105 og 255 og ved hjælp af faktoropløsningen ser vi, at k kan have værdierne $k = \pm 1$, $k = \pm 3$, $k = \pm 5$ eller $k = \pm 15$. Hver af disse 8 værdier af k giver anledning til et ligningssystem med 3 ubekendte. Fx for vi får $k = 5$ systemet

$$x + y = 18$$
$$y + z = 21$$
$$z + x = 51\ ,$$

og dette system har ingen løsninger i hele tal. På samme måde gennemgås de øvrige muligheder for k, og man opdager, at hvis $k = 15$ eller $k = -15$ får ligningssystemet løsninger – og netop dem, vi fandt ovenfor.