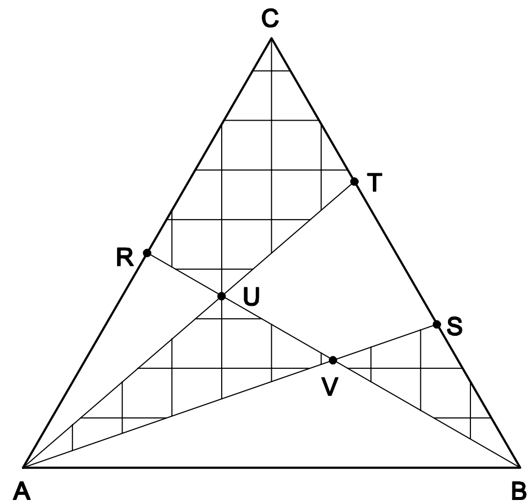
Svar på opgave 2005-59 November 2005

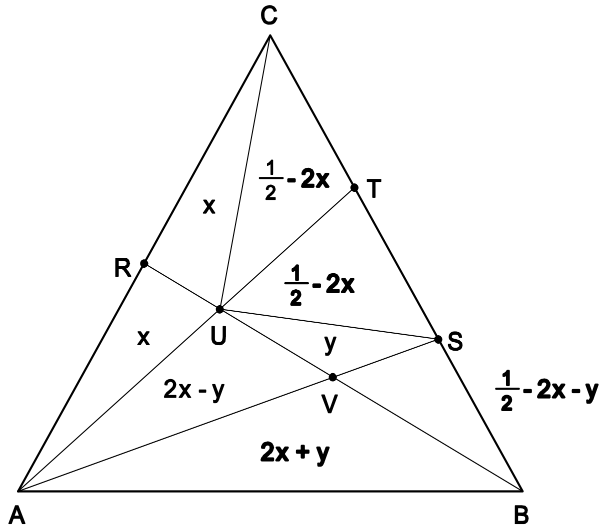
Opgaven:



I den ligesidede Δ*ABC* er *R* midtpunkt af siden *AC* og *T* og *S* er tredelingspunkter på siden *BC*, så *CT* = *TS* = *SB*. Desuden er *U* skæringspunkt mellem *AT* og *BR* og *V* skæringspunkt mellem *AS* og *BR*. Hvor stor en brøkdel udgør det samlede areal af det skraverede område (□*CRUT*, Δ*AVU* og Δ*BSV*) af hele Δ*ABC's* areal?

Løsning:

1. metode.
Vi gengiver en snedig løsning fra Kang Li, 2z, Langkær Gymnasium.



Vi sætter trekantens areal til 1. Dernæst trækker vi linjerne CU og SU og sætter $x = \text{Ar}(\Delta CRU)$ og $y = \text{Ar}(\Delta SUV)$.

Så er $\text{Ar}(\Delta ARU) = x$, fordi ΔCRU og ΔARU har lige lange grundlinjer ($CR = AR$) og samme højde fra U.

Da $\text{Ar}(\Delta ACT) = \frac{1}{3}$, er $\text{Ar}(\Delta CTU) = \frac{1}{3} - 2x$. Da ΔCTU og ΔSTU har lige lange grundlinjer ($ST = CT$) og samme højde fra U, har de samme areal, så

$$\text{Ar}(\Delta STU) = \frac{1}{3} - 2x \, .$$

Desuden har ΔBSU samme areal som ΔCTU og ΔSTU (lige lange grundlinjer og samme højde). Så er

$$\frac{1}{2} = \text{Ar}(\Delta BRC) = x + \text{Ar}(\Delta CTU) + \text{Ar}(\Delta STU) + \text{Ar}(\Delta BSU) = x + 3 \cdot \left(\frac{1}{3} - 2x\right)$$

hvoraf

$$\frac{1}{2} = x + 1 - 6x \;\Leftrightarrow\; 5x = \frac{1}{2} \;\Leftrightarrow\; x = \frac{1}{10} \, .$$

Af ΔAST med areal $\frac{1}{3}$ fås

$$\text{Ar}(\Delta AUV) = \frac{1}{3} - y - \left(\frac{1}{3} - 2x\right) = 2x - y \, ,$$

og af ΔBSU med arealet $\frac{1}{3} - 2x$ fås

$$\text{Ar}(\Delta SVB) = \frac{1}{3} - 2x - y \, .$$

Endelig fås af ΔASB med arealet $\frac{1}{3}$ at

$$\text{Ar}(\Delta ASB) = \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{3} - 2x - y\right) = 2x + y \, .$$

Nu ser vi, at ΔSUV og ΔAUV har sanme højde fra U, så forholdet mellem deres arealer er det samme som forholdet mellem deres grundlinjer:

$$\frac{y}{2x-y}=\frac{\mathrm{Ar}(\Delta SUV)}{\mathrm{Ar}(\Delta AUV)}=\frac{VS}{AV}\ .$$

På samme måde har ΔSVB og ΔAVB samme højde fra V, så forholdet mellem deres arealer er det samme som forholdet mellem grundlinjerne:

$$\frac{\frac{1}{3}-2x-y}{2x+y}=\frac{\mathrm{Ar}(\Delta BSV)}{\mathrm{Ar}(\Delta AVB)}=\frac{VS}{AV}\ .$$

Altså får vi

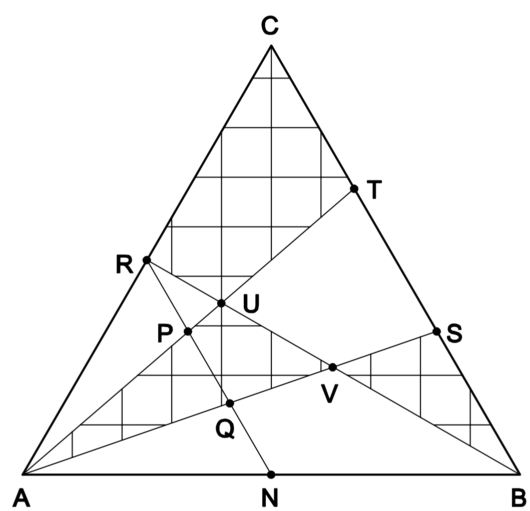
$$\frac{y}{2x-y}=\frac{\frac{1}{3}-2x-y}{2x+y}\ \Leftrightarrow\ \frac{y}{\frac{1}{5}-y}=\frac{\frac{1}{3}-\frac{1}{5}-y}{\frac{1}{5}+y}\ \Leftrightarrow\ \frac{5y}{1-5y}=\frac{2-15y}{3+15y}$$

$$\Leftrightarrow\ 5y(3+15y)=(1-5y)(2-15y)\ \Leftrightarrow\ 15y+75y^2=2-15y-10y+75y^2\ \Leftrightarrow\ y=\tfrac{1}{20}\ .$$

Nu ser vi, at det søgte skraverede areal er

$$2x-y+\tfrac{1}{3}-2x-y+x+\tfrac{1}{3}-2x=\tfrac{2}{3}-2y-x=\tfrac{2}{3}-\tfrac{1}{10}-\tfrac{1}{10}=\tfrac{7}{15}.$$

2. metode.



Lad højden i ΔABC være h og dens sidelængde a. I ΔAUV kan vi opfatte UV som grundlinje og AR som højde, fordi AR er vinkelret på BR.

Det areal, vi søger, er da

$$\mathrm{Ar}(\Delta BCR) - (\mathrm{Ar}(\Delta AST) - \mathrm{Ar}(\Delta AUV)) + \mathrm{Ar}(\Delta AUV)$$
$$= \mathrm{Ar}(\Delta BCR) - \mathrm{Ar}(\Delta AST) + 2\cdot \mathrm{Ar}(\Delta AUV)$$

$$= \tfrac{1}{2}\cdot \mathrm{Ar}(\Delta ABC) - \tfrac{1}{3}\cdot \mathrm{Ar}(\Delta ABC) + UV\cdot AR = \tfrac{1}{6}\cdot Ar(\Delta ABC) + \tfrac{1}{2}a\cdot UV \quad . \qquad (1)$$

Derfor skal vi bestemme længden af UV. Vi trækker midtpunktstransversalen RN som er parallel med BC. Så er $RN = \tfrac{1}{2}a$ og $RP = PQ = QN = \tfrac{1}{3}RN = \tfrac{1}{6}a$.

Nu er ΔRPU og ΔBTU ensvinklede, så

$$\frac{RU}{UB} = \frac{RP}{BT} = \frac{\tfrac{1}{6}a}{\tfrac{2}{3}a} = \frac{1}{4} \quad \text{hvoraf} \quad UB = 4\cdot RU \ .$$

Så får vi

$$RU + UB = RB = h \iff RU + 4\cdot RU = h \iff RU = \tfrac{1}{5}h \ .$$

Desuden er ΔRQV og ΔBSV ensvinklede, så

$$\frac{RV}{VB} = \frac{RQ}{BS} = \frac{\tfrac{2}{3}RN}{\tfrac{1}{3}a} = \frac{\tfrac{2}{3}\cdot\tfrac{1}{2}a}{\tfrac{1}{3}a} = 1 \quad \text{hvoraf} \quad RV = VB \ ,$$

og da $RB = h$, er $RV = \tfrac{1}{2}h$. Heraf følger, at

$$UV = RV - RU = \tfrac{1}{2}h - \tfrac{1}{5}h = \tfrac{3}{10}h \ .$$

Arealet af det skraverede område er nu efter (1):

$$\tfrac{1}{6}Ar(\Delta ABC) + \tfrac{1}{2}UV = \tfrac{1}{12}a\cdot h + \tfrac{1}{2}a\cdot\tfrac{3}{10}h = \tfrac{7}{30}a\cdot h = \tfrac{7}{15}\cdot \mathrm{Ar}(\Delta ABC) \ .$$

Det skraverede område udgør altså $\tfrac{7}{15}$ af trekantens areal.

3. metode.

Vi betegner arealet af ΔABC med k.

Vi trækker linjen RT. Da R er midtpunkt af AC og T er midtpunkt af CS, er RT en midtpunktstransversal i ΔASC, så $RT \parallel AS$. Vi sætter $RT = x$, så $AS = 2x$.

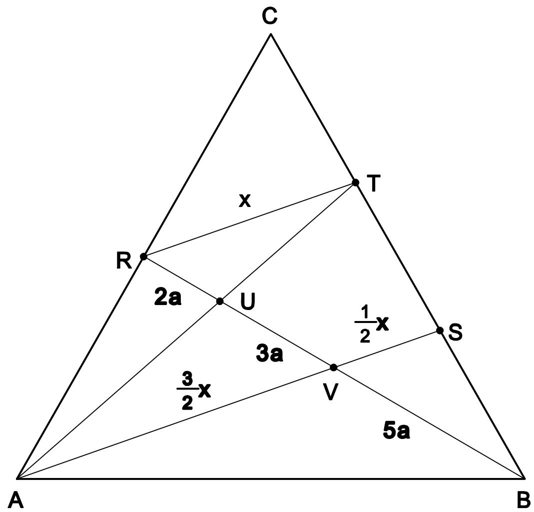
Da $VS \parallel RT$ og S er midtpunkt af BT, er VS midtpunktstransversal i ΔBRT, så $VS = \tfrac{1}{2}RT = \tfrac{1}{2}x$. Men så er

$$AV = AS - VS = 2x - \tfrac{1}{2}x = \tfrac{3}{2}x \ .$$

Trekanterne ΔAUV og ΔTUR er ensvinklede, fordi $AV \parallel RT$. Sideforholdet er

$$\frac{AV}{RT} = \frac{\tfrac{3}{2}x}{x} = \frac{3}{2} \ ,$$

så vi kan sætte $RU = 2a$ og $UV = 3a$. Da ΔBVS og ΔBRT er ensvinklede i forholdet 1:2, er så $BV = 5a$.



De tre trekanter ΔARU, ΔAUV og ΔAVB har samme højde, så forholdet mellem deres arealer er det samme som forholdet mellem grundlinjerne $2a$, $3a$ og $5a$. Deres samlede areal er Ar(ΔARB) = $\frac{1}{2}k$, så

$$\text{Ar}(\Delta ARU) = \frac{2a}{10a}\cdot\frac{1}{2}k = \frac{1}{10}k \quad , \quad \text{Ar}(\Delta AUV) = \frac{3a}{10a}\cdot\frac{1}{2}k = \frac{3}{20}k \quad ,$$

$$\text{Ar}(\Delta AVB) = \frac{5a}{10a}\cdot\frac{1}{2}k = \frac{1}{4}k \ .$$

Da Ar(ΔASB = $\frac{1}{3}k$, er

$$\text{Ar}(\Delta BVS) = \frac{1}{3}k - \frac{1}{4}k = \frac{1}{12}k \ .$$

Da ΔAUV og ΔTUR som nævnt er ensvinklede i forholdet $\frac{3}{2}$, er

$$\text{Ar}(\Delta TUR) = \left(\tfrac{2}{3}\right)^2 \cdot \text{Ar}(\Delta AUV) = \frac{4}{9}\cdot\frac{3}{20}k = \frac{1}{15}k \ .$$

Da Ar(ΔACT) = $\frac{1}{3}k$ er endelig

$$\text{Ar}(\Delta CRT) = \frac{1}{3}k - \text{Ar}(\Delta ART) = \frac{1}{3}k - \frac{1}{10}k - \frac{1}{15}k = \frac{1}{6}k \, .$$

Det søgte areal er derfor

$$\frac{1}{6}k + \frac{3}{20}k + \frac{1}{12}k + \frac{1}{15}k = \frac{7}{15}k \ .$$