Svar på opgave 2005-60 December 2005

Opgaven:

Find to 2-cifrede hele tal m og n så $\frac{m}{n} = 0,6746988$ med 7 decimaler.

Løsning:

1. metode.
Vi skriver decimalbrøken om til en såkaldt *kædebrøk*, dvs. brøker inden i brøker:

$$0,6746988 = \frac{1}{1,482142847} = \frac{1}{1+0,482142847} = \frac{1}{1+\frac{1}{2,07407412}}$$

$$= \frac{1}{1+\frac{1}{2+0,07407412}} = \frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{13,4999917}}} \approx \frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{13,5}}}$$

$$= \frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{2}{27}}} = \frac{1}{1+\frac{1}{\frac{56}{27}}} = \frac{1}{1+\frac{27}{56}} = \frac{1}{\frac{83}{56}} = \frac{56}{83}\ .$$

Her har vi afrundet 13,4999917 til 13,5. Kontrol på regnemaskine giver $\frac{56}{83}$ = 0,674698795, så dermed har vi fundet den søgte brøk.

2. metode.
Tallet $\frac{m}{n}$ er meget tæt på $\frac{2}{3}$, og derfor søger vi to tal m og n, hvor m kun er 'lidt' større end $\frac{2}{3}n$. Mere præcist: Da $\frac{m}{n}$ er mindre end $\frac{1}{100}$ større end $\frac{2}{3}$, søger vi m som tallet m = $\frac{2}{3}(n + 1)$. Dette indsættes i ligningen:

$$\frac{m}{n} = 0{,}6746988 \;\Leftrightarrow\; \frac{\frac{2}{3}(n+1)}{n} = 0{,}6746988$$

$$\Leftrightarrow\; \frac{2}{3} + \frac{2}{3n} = 0{,}6746988 \;\Leftrightarrow\; \frac{2}{3n} = 0{,}0080321$$

Denne ligning løses:

$$\frac{2}{3n} = 0{,}0080321 \;\Leftrightarrow\; 2 = 0{,}0080321 \cdot 3n \;\Leftrightarrow\; n = \frac{2}{0{,}0240963} = 83{,}00029465\ ,$$

så en tilnærmet løsning er $n = 83$. Dermed er $m = \frac{2}{3}(n+1) = \frac{2}{3} \cdot 84 = 56$. Kontrol giver, at brøken $\frac{56}{83}$ er den ønskede.

3. metode.

Kang Li, Langkær Gymnasium giver denne løsning:

Vi har, at

$$0{,}6746988 < 0{,}675 = \frac{27}{40} \quad \text{og} \quad \frac{2}{3} = 0{,}6666667 < 0{,}6746988\ .$$

Vi bruger, at hvis

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \text{ så vil } \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}\ .$$

Da $\frac{2}{3} < \frac{27}{40}$ er

$$\frac{2}{3} < \frac{2+27}{3+40} < \frac{27}{40} \quad \text{eller} \quad \frac{2}{3} < \frac{29}{43} < \frac{27}{40}\ .$$

Vi får, at $\frac{29}{43} = 0{,}6744186 < 0{,}6746988$, så vi ved endnu en anvendelse af uligheden får

$$\frac{29}{43} < \frac{m}{n} < \frac{27}{40} \quad \text{hvoraf} \quad \frac{29}{43} < \frac{29+27}{43+40} < \frac{27}{40}\ .$$

Den midterste brøk $\frac{56}{83}$ må altså ligge 'tæt' på den ønskede decimalbrøk, og det viser sig ved udregning at passe.

4. metode.

Emil Lind Pedersen, Slagelse Gymnasium har sendt denne løsning:

Man kan på TI-83 eller en lignende maskine skrive et program, der gennemprøver alle tocifrede tal. Programteksten følger her, så de interesserede kan indtaste det:

```
: ClrHome
: 11 → A
: A → B
: Lbl 1
: B-1 → B
: B/A → C
: round(C,7) → C
: If C = 0,6746988
: Goto 2
: If B = 10
: Then
: A+1 → A
: A → B
: End
: Goto 1
: Lbl 2
: Disp B
: Disp A
: Pause
: ClrHome
: Stop
```

Programmet læses spaltevis.

5. metode.

Isak Wulff Mottelson, Vestre Borgerdyd Gymnasium har sendt denne løsning:
Vi gengiver endnu en løsning med et program til TI-83. Programmet læses spaltevis:

```
: 10 → P
: Lbl A
: 0.6746988*P → S
: If S - int(S) < 10^-6
: Then
: Disp P
: Else
: P+1 → P
: Goto A
```

Hvis et helt tal m delt med et andet helt tal n er ca. 0,6746988, er $n \cdot 0{,}6746988$ næsten et heltal. Vi skal altså finde et tal, som ganget med 0,6746988 næsten er et heltal.

Da n (og m) er tocifrede, kan vi begynde med det mindste tocifrde tal 10, som P sættes lig med i første linje. S sættes så lig $0{,}6746099 \cdot P$. Vi trækker så heltalsdelen af S fra og sætter maskinen til at kontrollere, om det er mindre end noget meget småt (vi kan sætte det til mindre end 10^{-6}, fordi kvotienten kun giver 0,6746988 med 7 decimaler - det er vi nødt til at gå efter bagefter). Hvis produktet S - int(S) er så småt som det kræves, viser programmet værdien af P. Ellers lægger programmet 1 til P og begynder forfra.

Når programmet køres, giver det som resultat P = 83. Kontrol giver, at $83 \cdot 0{,}6746988 =$ 56,0000004. Vi gør prøve: $\frac{56}{83} = 0{,}6746988$ med 7 decimaler.