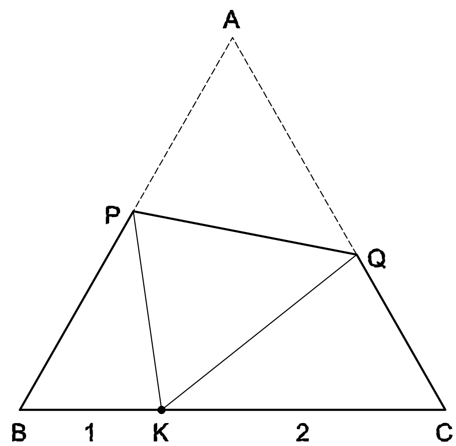
Svar på opgave 2006-61
Januar 2006

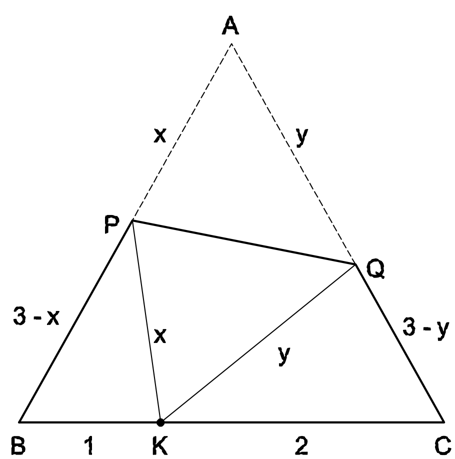
Opgaven:



ΔABC er ligesidet.
Vinkelspidsen A foldes ned i punktet K på den modstående side BC, så $BK = 1$ og $KC = 2$.
Bestem længden af folden PQ.

Løsning:

1. metode.



Vi sætter $x = AP$ og $y = AQ$. Så er $PB = 3 - x$, $QC = 3 - y$, $PK = x$ og $QK = y$.
I ΔPBK bruger vi cosinusrelationen og får

$$x^2 = (3 - x)^2 + 1^2 - 2\cdot(3 - x)\cdot 1\cdot\cos 60° \iff x^2 = (3 - x)^2 + 1 - 2\cdot(3 - x)\cdot\tfrac{1}{2}$$
$$\iff x^2 = 9 + x^2 - 6x + 1 - 3 + x \iff 0 = -5x + 7 \iff x = \tfrac{7}{5}\ .$$

På same made bruger vi cosinusrelationen I ΔQCK og får

$$y^2 = (3 - y)^2 + 2^2 - 2\cdot(3 - y)\cdot 2\cdot\cos 60° \iff y^2 = (3 - y)^2 + 4 - 4\cdot(3 - y)\cdot\tfrac{1}{2}$$
$$\iff y^2 = 9 + y^2 - 6y + 4 - 6 + 2y \iff 0 = -4y + 7 \iff y = \tfrac{7}{4}\ .$$

Endelig giver cosinusrelationen i ΔPQK:

$$PQ^2 = x^2 + y^2 - 2\cdot x\cdot y\cdot\cos 60°\ ,$$

og når man heri indsætter de fundne værdier for x og y, får man:

$$PQ^2 = \frac{49}{25} + \frac{49}{16} - 2\cdot\frac{7}{5}\cdot\frac{7}{4}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1029}{400} = \frac{7^2\cdot 21}{20^2}\ ,$$

og dermed er den søgte længde af folden

$$\underline{\underline{PQ = \frac{7}{20}\sqrt{21}}}$$

2. metode.

Ved punktet K har vi

$$\angle BKP + 60° + \angle QKC = 180°\ ,$$

og i ΔKPB fås

$$\angle BKP + 60° + \angle KPB = 180°\ .$$

Af disse ligninger ser vi, at $\angle QKC = \angle KPB$, og da $\angle PBK = \angle QCK = 60°$, er ΔKPB og ΔQKC ensvinklede. Vi sætter som før

$$x = AP = KP \quad \text{og} \quad y = AQ = QK$$

og får

$$\frac{KP}{QK} = \frac{KB}{QC} = \frac{PB}{KC} \ \text{ eller } \ \frac{x}{y} = \frac{1}{3 - y} = \frac{3 - x}{2}\ .$$

Af de to første brøker fås

$$\frac{x}{y} = \frac{1}{3 - y} \iff x\cdot(3 - y) = y \iff 3x - xy = y\ , \qquad (1)$$

og af den første og sidste brøk:

$$\frac{x}{y} = \frac{3 - x}{2} \iff y\cdot(3 - x) = 2x \iff 3y - xy = 2x\ . \qquad (2)$$

Ved subtraktion af (2) fra (1) fås

$$3x - 3y = y - 2x \iff 5x = 4y \iff x = \tfrac{4}{5}y \ .$$

Dette indsættes i (1):

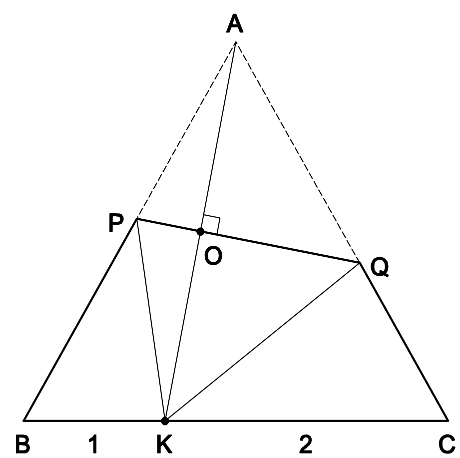
$$\tfrac{12}{5}y - \tfrac{4}{5}y \cdot y = y \iff \tfrac{12}{5} - \tfrac{4}{5}y = 1 \iff 12 - 4y = 5 \iff y = \tfrac{7}{4} \ .$$

Dermed er

$$x = \tfrac{4}{5}y = \tfrac{4}{5} \cdot \tfrac{7}{4} = \tfrac{7}{5}.$$

Ved at anvende cosinusrelationen i ΔPQK som oven for, fås igen $PQ = \underline{\underline{\frac{7}{20}\sqrt{21}}}$

3. metode.



Vi trækker linjen AK, som skærer PQ i O. Så er vinklen ved O ret, og $AO = OK$. Vi kan finde længden af AK ved at bruge cosinusrelationen i ΔABK:

$$AK^2 = 1^2 + 3^2 - 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot \cos 60° = 1 + 9 - 6 \cdot \tfrac{1}{2} = 7 \iff AK = \sqrt{7} \ .$$

Dermed er $AO = \frac{1}{2}\sqrt{7}$. Desuden er

$$\cos \angle PAO = \frac{3^2 + 7 - 1^2}{2 \cdot 3 \cdot \sqrt{7}} = \frac{15}{6\sqrt{7}} = \frac{5}{2\sqrt{7}} \ .$$

Grundrelationen giver

$$\sin^2 \angle PAO = 1 - \cos^2 \angle PAO = 1 - \frac{25}{28} = \frac{3}{28} \quad \text{så} \quad \sin \angle PAO = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}} \ .$$

Af disse to ligninger fås

$$\tan \angle PAO = \frac{\sin \angle PAO}{\cos \angle PAO} = \frac{\sqrt{3}}{5} \ .$$

På samme fås ved brug af cosinusrelationen i ΔCAK:

$$\cos\angle QAO = \cos\angle QAK = \frac{3^2+7-2^2}{2\cdot 3\cdot\sqrt{7}} = \frac{2}{\sqrt{7}}$$

og desuden er

$$\sin^2\angle QAO = 1-\cos^2\angle QAO = 1-\frac{4}{7} = \frac{3}{7} \quad \text{så} \quad \sin\angle QAO = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} .$$

Af de to sidste ligninger fås

$$\tan\angle QAO = \frac{\sin\angle QAO}{\cos\angle QAO} = \frac{\sqrt{3}}{2} .$$

Nu er

$$\tan\angle PAO = \frac{PO}{OA} \iff PO = OA\cdot\tan\angle PAO = \frac{\sqrt{7}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{5} = \frac{\sqrt{21}}{10}$$

og

$$\tan\angle QAO = \frac{OQ}{OA} \iff OQ = OA\cdot\tan\angle QAO = \frac{\sqrt{7}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{21}}{4} .$$

Så er længden af folden PQ:

$$PQ = PO + OQ = \frac{\sqrt{21}}{10}+\frac{\sqrt{21}}{4} = \underline{\underline{\frac{7\sqrt{21}}{20}}}$$