Svar på opgave 2006-62
Februar 2006

Opgaven:

Løs uden brug af regnemaskine eller andre hjælpemidler ligningen

$$\sqrt[3]{x+\sqrt{1+x^2}}+\sqrt[3]{x-\sqrt{1+x^2}}=3\,.$$

Løsning:

1. metode.
Vi sætter

$$p=\sqrt[3]{x+\sqrt{1+x^2}} \quad \text{og} \quad q=\sqrt[3]{x-\sqrt{1+x^2}}\,.$$

Så er $p + q = 3$ og

$$p^3+q^3=x+\sqrt{1+x^2}+x-\sqrt{1+x^2}=2x\,.$$

Desuden er

$$p^3\cdot q^3=(x+\sqrt{1+x^2})(x-\sqrt{1+x^2})=x^2-(1+x^2)=-1 \quad \text{så} \quad pq=-1\,.$$

Nu gælder formlen

$$(p+q)^3=p^3+3p^2q+3pq^2+q^3 \quad \text{eller} \quad (p+q)^3=p^3+q^3+3pq(p+q)\,,$$

og indsætter vi de fundne værdier i denne formel, får vi

$$3^3=2x+3\cdot(-1)\cdot 3 \;\Leftrightarrow\; 27=2x-9 \;\Leftrightarrow\; \underline{\underline{x=18}}\,.$$

2. metode.

Med samme betegnelser får vi igen $p + q = 3$, så $q = 3 - p$, og da $pq = -1$, får vi

$$pq=-1 \;\Leftrightarrow\; p(3-p)=-1 \;\Leftrightarrow\; p^2-3p-1=0 \;\Leftrightarrow\; p=\frac{3\pm\sqrt{13}}{2}\,.$$

Vi deler op i to tilfælde efter p.

I. Vi bruger først $p = \dfrac{3+\sqrt{13}}{2}$ og får

$$\sqrt[3]{x+\sqrt{1+x^2}} = \frac{3+\sqrt{13}}{2} \iff 2\sqrt[3]{x+\sqrt{1+x^2}} = 3+\sqrt{13} \iff 8(x+\sqrt{1+x^2}) = (3+\sqrt{13})^3$$

$$\iff 8(x+\sqrt{1+x^2}) = 3^3 + 3\cdot 3^2\cdot\sqrt{13} + 3\cdot 3\cdot\sqrt{13}^2 + \sqrt{13}^3 \iff 8(x+\sqrt{1+x^2}) = 144+40\sqrt{13}$$

$$\iff x+\sqrt{1+x^2} = 18+5\sqrt{13} \iff \sqrt{1+x^2} = 18+5\sqrt{13}-x$$

Denne ligning kvadrerer vi, idet vi bruger formlen for kvadratet på en treleddet størrelse:

$$(a+b-c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab-2ac-2bc\ ,$$

så ligningen *medfører* følgende ligning

$$1+x^2 = 18^2+25\cdot 13+x^2+2\cdot 18\cdot 5\sqrt{13}-2\cdot 18\cdot x-2\cdot 5\sqrt{13}\cdot x$$

$$648+180\sqrt{13} = (10\sqrt{13}+36)x \iff 18(10\sqrt{13}+36) = (10\sqrt{13}+36)x \iff x = 18\ .$$

Funktionen $f(x) = \sqrt[3]{x+\sqrt{1+x^2}}$ er for $x \geq 0$ voksende og $f(0) = 1$ og $f(x) \to \infty$ for $x \to \infty$. Derfor har ligningen $f(x) = \frac{1}{2}(3+\sqrt{13})$ præcis en løsning, som da må være den fundne $x = 18$.

II. Så ser vi på $p = \dfrac{3-\sqrt{13}}{2}$.

Funktionen $f(x) = \sqrt[3]{x+\sqrt{1+x^2}}$ er positiv for alle x. For $x \geq 0$ er dette klart. Hvis $x < 0$, har vi

$$x+\sqrt{1+x^2} > 0 \iff \sqrt{1+x^2} > -x \iff 1+x^2 > (-x)^2 \iff 1+x^2 > x^2\ ,$$

hvilket er sandt. Vi har her kvadreret en ulighed på begge sider, hvilket er tilladt, da begge sider er positive.

Da altså $f(x)$ er positiv for alle x og $p < 0$ har ligningen $f(x) = p$ ikke nogen løsninger

Alt i alt kan vi sige, at den oprindelige ligning har den ene løsning $\underline{\underline{x = 18}}$.