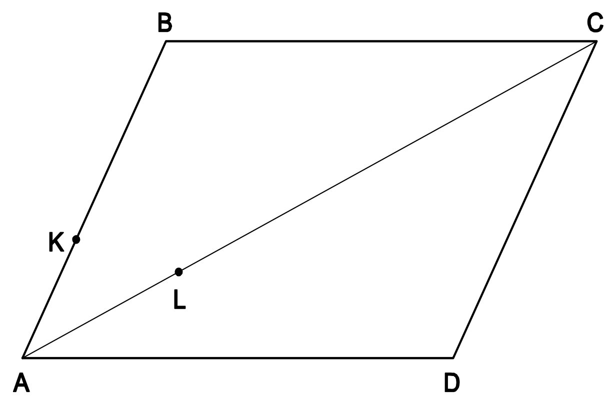
Svar på opgave 2006-63
Marts 2006

Opgaven:



Firkant *ABCD* er et parallelogram. Punktet *K* ligger på siden *AB*, så $AK = \frac{1}{n}AB$ og

punktet *L* ligger på diagonalen *AC*, så $AL = \frac{1}{n+1}AC$. Vis, at *D*, *L* og *K* ligger på linje.

Løsning:

1. metode.
Vi benytter vektorregning. Vi sætter for nemheds skyld $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ og $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$ og får så, at

$$\overrightarrow{AK} = \tfrac{1}{n}\vec{a} \quad \text{og} \quad \overrightarrow{AL} = \tfrac{1}{n+1}\overrightarrow{AC} = \tfrac{1}{n+1}(\vec{a}+\vec{b}) \ .$$

Dernæst er

$$\overrightarrow{KD} = \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{AD} = -\tfrac{1}{n}\vec{a} + \vec{b}$$

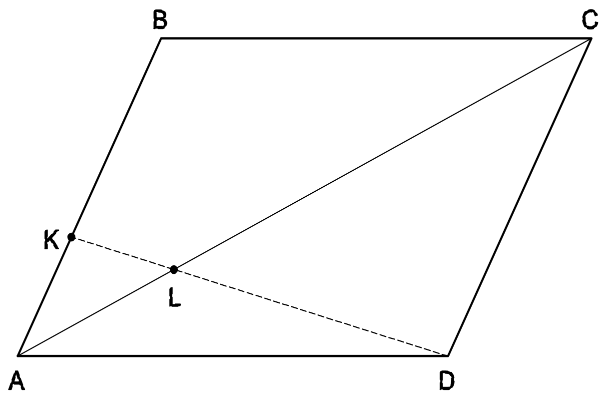
og

$$\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{AL} = -\tfrac{1}{n}\vec{a} + \tfrac{1}{n+1}\vec{a} + \tfrac{1}{n+1}\vec{b} = \left(\tfrac{1}{n+1} - \tfrac{1}{n}\right)\vec{a} + \tfrac{1}{n+1}\vec{b}$$

$$= -\tfrac{1}{n(n+1)}\vec{a} + \tfrac{1}{n+1}\vec{b} = \tfrac{1}{n+1}\left(-\tfrac{1}{n}\vec{a} + \vec{b}\right) = \tfrac{1}{n+1}\overrightarrow{KD} \ .$$

Da $\overrightarrow{KL}$ dermed er parallel med $\overrightarrow{KD}$, ligger K, L og D på linje og desuden deles linjestykket KD af L i samme forhold som diagonalen AC.

2. metode.



Lad $AK = \frac{1}{n}AB$. Vi forbinder K med D og KD skærer AC i L. Da $KA \parallel CD$, er ΔAKL og ΔCDL ensvinklede, så

$$\frac{AK}{CD} = \frac{AL}{LC} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\frac{1}{n}AB}{CD} = \frac{AL}{LC} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{n} = \frac{AL}{LC} \ ,$$

hvor vi har benyttet, at $AB = CD$. Vi har så

$$n = \frac{LC}{AL} = \frac{AC - AL}{AL} \quad \Leftrightarrow \quad n \cdot AL = AC - AL$$
$$\Leftrightarrow \quad (n+1)AL = AC \quad \Leftrightarrow \quad AL = \frac{1}{n+1}AC \ .$$

Altså er skæringspunktet L mellem AC og KD netop det punkt, der deler AC i forholdet $\frac{1}{n+1}$.