

Svar på opgave 2006-64

April 2006

Opgaven:

Løs indenfor de hele tal ligningen

$$xy + x + y = 3$$

Løsning:

1. metode.

Ligningen omskrives sådan:

$$\begin{aligned}xy + x + y = 3 &\Leftrightarrow xy + x + y + 1 = 4 \\ \Leftrightarrow x(y + 1) + (y + 1) = 4 &\Leftrightarrow (x + 1)(y + 1) = 4.\end{aligned}$$

Vi har følgende muligheder for at skrive 4 som produkt af to faktorer:

$$\begin{aligned}x + 1 = -4, y + 1 = -1, &\text{ hvilket giver } (x, y) = (-5, -2) \\ x + 1 = -2, y + 1 = -2, &\text{ hvilket giver } (x, y) = (-3, -3) \\ x + 1 = -1, y + 1 = -4, &\text{ hvilket giver } (x, y) = (-2, -5) \\ x + 1 = 1, y + 1 = 4, &\text{ hvilket giver } (x, y) = (0, 3) \\ x + 1 = 2, y + 1 = 2, &\text{ hvilket giver } (x, y) = (1, 1) \\ x + 1 = 4, y + 1 = 1, &\text{ hvilket giver } (x, y) = (3, 0).\end{aligned}$$

Dette er de seks løsninger til ligningen.

2. metode.

Vi omskriver ligningen sådan:

$$xy + x + y = 3 \Leftrightarrow x(y + 1) = 3 - y \Leftrightarrow x = \frac{3 - y}{y + 1}, \quad y \neq -1.$$

Da x skal være et helt tal, må $y + 1$ gå op i $3 - y$. Vi har altså

$$\begin{aligned}y + 1 &\text{ går op i } 3 - y \\ y + 1 &\text{ går op i } y + 1.\end{aligned}$$

Men så går $y + 1$ også op i summen:

$$y + 1 \text{ går op i } 3 - y + y + 1 = 4 .$$

Altså har vi mulighederne

$$y + 1 : -4, -2, -1, 1, 2, 4 ,$$

hvoraf

$$y : -5, -3, -2, 0, 1, 3 ,$$

og disse giver igen løsningerne ovenfor.

3. metode.

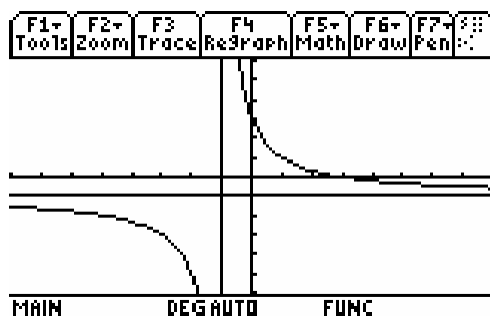
Vi kan opfatte y som funktion af x , idet vi omskriver ligningen til

$$xy + x + y = 3 \Leftrightarrow y(x + 1) = 3 - x \Leftrightarrow y = \frac{3 - x}{x + 1} , \quad x \neq -1 .$$

Vi kan også skrive dette sådan:

$$y = -1 + \frac{4}{x + 1} ,$$

og tegner vi det grafiske billede af denne funktion, ser vi, at hvis $x > 3$, vil $-1 < y < 0$. Derfor kan der ikke findes løsninger (x, y) til ligningen med $x > 3$.



Hvis $x < -5$ vil $x + 1 < -4$ og dermed

$$\frac{x + 1}{4} < -1 \quad \text{eller} \quad \frac{4}{x + 1} > -1 ,$$

og samtidig er $\frac{4}{x + 1} < 0$, så vi for $x < -5$ har at

$$-1 < \frac{4}{x + 1} < 0 \quad \text{hvoraf} \quad -2 < -1 + \frac{4}{x + 1} < -1 .$$

Altså kan ligningen ikke have nogen løsninger (x, y) , hvor $x < -5$. Derefter kan vi gennemgå mulighederne $-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$ for x og finder derved løsningerne nævnt ovenfor.