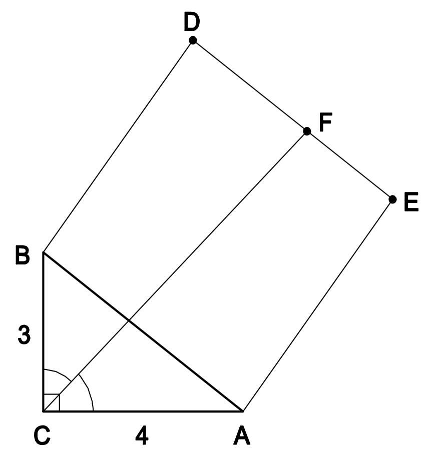
# Svar på opgave 2006-66 August 2006

## *Opgaven:*




$\Delta ABC$ er retvinklet med katetelængderne $AC = 4$ og $BC = 3$.
På hypotenusen tegnes et kvadrat $AEDB$ og vinkelhalveringslinjen for $C$ skærer $DE$ i $F$.
Beregn længden af linjestykkerne $EF$ og $DF$.

## *Løsning:*

I den retvinklede $\Delta ABC$ er kateterne $AC = b = 4$ og $BC = a = 3$. På hypotenusen tegnes udad i forhold til trekanten et kvadrat $AEDB$ og vinkelhalveringslinjen for $C$ skærer $DE$ i $F$. $G$ betegner skæringspunktet mellem linierne $CF$ og $AB$. Vi skal beregne længden af linjestykkerne $EF$ og $DF$.

Trekantens hypotenuse $c$ har længden 5 efter Pythagoras:

$$c^2 = a^2 + b^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 .$$

Den omskrevne cirkel for trekanten har centrum i punktet $O$, som er midtpunkt af hypotenusen. Vinkelhalveringslinjen fra $C$ går gennem midtpunktet $M$ af cirkelbuen $AB$, fordi $\angle ACM$ og $\angle MCB$ er lige store periferivinkler, der hver spænder over en kvartcirkel. Desuden er $M$ kvadratets centrum og da $CF$ er en linje gennem centrum, er firkanterne $AGFE$ og $DFGB$ kongruente, så $EF = BG$ og $FD = GA$. Derfor skal vi bestemme længderne af $BG$ og $GA$. For nemheds skyld sætter vi $p = GA$ og $q = BG$.

Nu giver sinusrelationen i $\Delta BCG$:

$$\frac{\sin 45°}{q} = \frac{\sin B}{CG}$$

og sinusrelationen i $\Delta ACG$ giver

$$\frac{\sin 45°}{p} = \frac{\sin A}{CG}$$

Ved division af den øverste med den nederste af disse ligninger får vi

$$\frac{\sin 45°}{q} : \frac{\sin 45°}{p} = \frac{\sin B}{CG} : \frac{\sin A}{CG} \quad \text{eller} \quad \frac{p}{q} = \frac{\sin B}{\sin A}$$

Nu er

$$\sin A = \tfrac{3}{5} \quad \text{og} \quad \sin B = \tfrac{4}{5}$$

og dermed

$$\frac{p}{q} = \frac{\sin B}{\sin A} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{4}{3} \quad \text{hvoraf} \quad p = \tfrac{4}{3}q$$

Nu er $p + q = 5$, så vi får

$$p + q = 5 \quad \Leftrightarrow \quad \tfrac{4}{3}q + q = 5 \quad \Leftrightarrow \quad \tfrac{7}{3}q = 5 \quad \Leftrightarrow \quad q = \frac{15}{7} \quad \text{dvs.} \quad \underline{\underline{EF = \frac{15}{7}}}$$

Endelig får vi

$$p = 5 - q = 5 - \tfrac{15}{7} = \frac{20}{7} \quad \text{dvs.} \quad \underline{\underline{DF = \frac{20}{7}}}$$

**BEMÆRKNING.** Vi har oven for set, at

$$\frac{p}{q} = \frac{4}{3} = \frac{b}{a} \ ,$$

dvs. at forholdet mellem de stykker $p$ og $q$, som vinkelhalveringslinjen deler den modstående side i, er lig med forholdet mellem de sider, der danner vinklen.

Denne sætning gælder for alle trekanter og ikke udelukkende for retvinklede. Hvis nemlig $CG$ er vinkelhalveringslinje for $C$ i en vilkårlig trekant (se figuren) giver sinusrelationerne på $\Delta CAG$ og $\Delta CBG$, at

$$\frac{\sin v}{p} = \frac{\sin A}{CG} \quad \text{og} \quad \frac{\sin v}{q} = \frac{\sin B}{CG} \ ,$$

og ved division fås ligesom oven for, at

$$\frac{p}{q} = \frac{\sin B}{\sin A}$$

Nu giver sinusrelationen i $\Delta ABC$, at

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \quad \Leftrightarrow \quad a \cdot \sin B = b \cdot \sin A \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\sin B}{\sin A} = \frac{b}{a}$$

Altså får vi

$$\frac{p}{q} = \frac{b}{a}$$