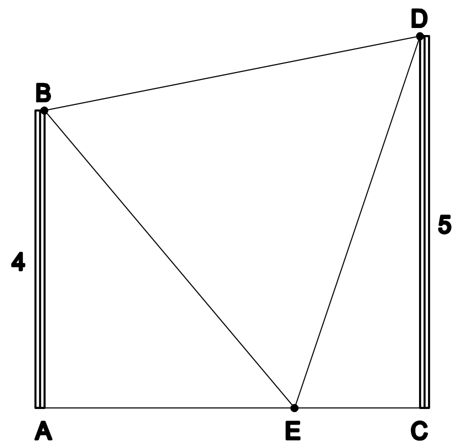
Svar på opgave 2006-67
September 2006

Opgaven:

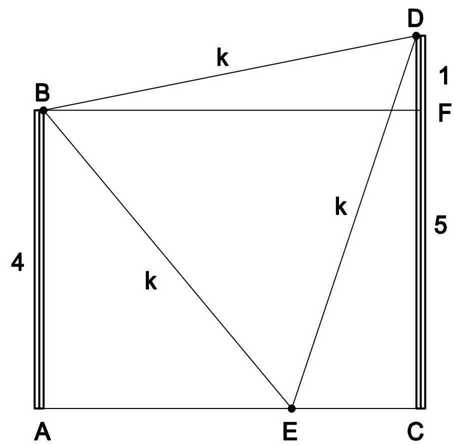


En metalplade af form som en ligesidet trekant BED er ophængt lodret i to af hjørnerne B og D, der er fastgjort til to stolper AB og CD af længde 4 og 5. Find trekantens sidelængde, hvis det tredje hjørne E netop når jorden.

Der ønskes eksakte regninger!

Løsning:

Vi trækker linjen BF parallel med AC. Desuden betegner vi længden af siderne i den ligesidede trekant med k.



Nu får vi ved hjælp af Pythagoras i ΔBAE:

$$AE^2 = k^2 - 4^2 \ ,$$

og i den retvinklede ΔDEC får vi

$$CE^2 = k^2 - 5^2 \ .$$

Dermed er

$$AC = AE + CE = \sqrt{k^2 - 16} + \sqrt{k^2 - 25} \ .$$

Vi ser af figuren, at $k > 5$, så kvadratrødderne findes.

I ΔBFD er $DF = 1$ og Pythagoras giver

$$BF = \sqrt{k^2 - 1} \ .$$

Nu er $AC = BF$, så

$$\sqrt{k^2 - 16} + \sqrt{k^2 - 25} = \sqrt{k^2 - 1} \ .$$

Vi kvadrerer på begge sider:

$$k^2 - 16 + k^2 - 25 + 2\sqrt{(k^2 - 16)(k^2 - 25)} = k^2 - 1$$

$$\Leftrightarrow \ 2\sqrt{(k^2 - 16)(k^2 - 25)} = 40 - k^2 \ .$$

Her må vi forudsætte, at $k < \sqrt{40}$. Igen kvadrerer vi på begge sider:

$$4(k^2 - 16)(k^2 - 25) = (40 - k^2)^2$$

$$\Leftrightarrow \ 4k^4 - 164k^2 + 1600 = k^4 - 80k^2 + 1600$$

$$\Leftrightarrow \ 3k^4 - 84k^2 = 0 \ \Leftrightarrow \ 3k^2 - 84 = 0$$

$$\Leftrightarrow \ k^2 = \frac{84}{3} = 28 \ \Leftrightarrow \ k = \sqrt{28} \ \Leftrightarrow \ \underline{\underline{k = 2\sqrt{7}}}$$

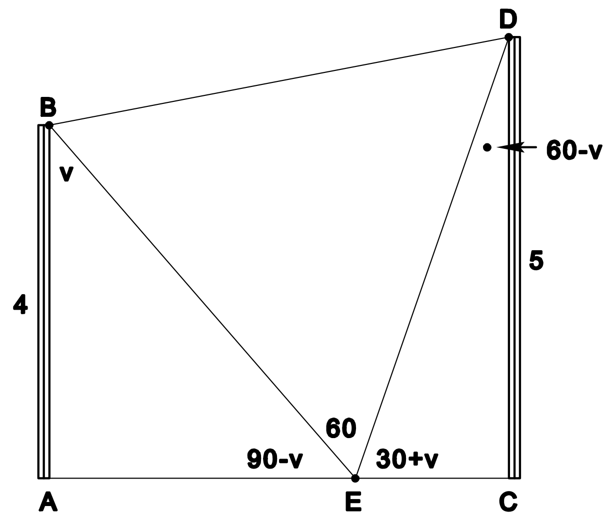
Dette er den søgte eksakte værdi af sidelængden k.

Vi skal gøre et par bemærkninger om begrebet 'eksakt værdi'. Lidt kort kan man sige, at en eksakt værdi er et tal, der kan udtrykkes ved brøker, rødder, logaritmer, π, e mm. Fx er følgende tal eksakte:

$$\frac{29}{16} \ , \ \frac{\sqrt[3]{17}}{9} \ , \ (\ln 2)^3 - \frac{3\pi}{7} \quad , \quad (\pi + e)^4 \ .$$

Dette betyder, at hvis man løser ligninger på grafregner ved hjælp af 'solve'-faciliteten, vil man i mange tilfælde *ikke* få eksakte værdier, men tilnærmede decimalværdier.

Vi viser, hvordan man kan løse opgaven på en måde, så der *ikke* fremkommer en eksakt løsning for *k*.



Vi betegner $\angle ABE$ med *v* og får så i ΔABE, at $\angle BEA = 90° - v$. Da $\angle BED = 60°$, får vi

$$\angle DEC = 180° - \angle BEA - \angle BED = 180° - (90° - v) - 60° = 30° + v\ .$$

I ΔDEC får vi så, at

$$\angle EDC = 90° - (30° + v) = 60° - v\ .$$

I ΔBAE er

$$\cos v = \frac{4}{k} \iff v = \cos^{-1}\left(\tfrac{4}{k}\right)$$

og i ΔDEC er

$$\cos(60° - v) = \frac{5}{k}\ ,$$

hvoraf

$$\frac{5}{x} = \cos\left(60° - \cos^{-1}\left(\tfrac{4}{x}\right)\right) \iff 5 = x \cdot \cos\left(60° - \cos^{-1}\left(\tfrac{4}{x}\right)\right)\ .$$

På lommeregneren benyttes faciliteten 'Intersection' på graferne for funktionerne

$$y = 5 \quad \text{og} \quad y = x \cdot \cos\left(60° - \cos^{-1}\left(\tfrac{4}{x}\right)\right)\ ,$$

hvilket giver decimaltallet k = 5,2915026.

Denne løsningsmetode er *ikke* brugbar i dette tilfælde, fordi opgaven netop gik ud på at bestemme en *eksakt* værdi for *k*.

I den først skitserede metode kunne man også vælge at bruge grafregnerens 'Intersection'-facilitet på funktionerne

$$f(k) = \sqrt{k^2 - 16} + \sqrt{k^2 - 25} \quad \text{og} \quad g(k) = \sqrt{k^2 - 1}\ .$$

Dette giver den tilnærmede værdi angivet oven for. På en del symbolregnere (dvs. grafregnere, der kan 'regne med bogstaver') kan man bruge faciliteten 'solve' på ligningen, og får så de eksakte løsninger $k = 2\sqrt{7}$ og $k = -2\sqrt{7}$.