Svar på opgave 2006-68
Oktober 2006

Opgaven:

ΔABC har sidelængder 10, 24 og x.
Find de *hele* værdier, som x kan antage, hvis trekanten skal være spidsvinklet.

Løsning:

En trekant er spidsvinklet netop hvis cosinus til hver af vinklerne er positiv. Vi bruger derfor cosinusrelationen på trekanten med siderne 10, 24 og x, idet vi navngiver vinklerne vilkårligt:

$$\cos A = \frac{10^2 + 24^2 - x^2}{2 \cdot 10 \cdot 24} \;,\; \cos B = \frac{10^2 + x^2 - 24^2}{2 \cdot 10 \cdot x} \;,\; \cos C = \frac{x^2 + 24^2 - 10^2}{2 \cdot x \cdot 24} \;.$$

Disse brøker skal alle være positive, dvs. deres tællere skal være positive. Vi kræver altså, at

$$10^2 + 24^2 - x^2 > 0 \;,\; 10^2 + x^2 - 24^2 > 0 \;,\; x^2 + 24^2 - 10^2 > 0 \;.$$

Den første ulighed giver

$$x^2 < 10^2 + 24^2 = 676 \quad \Leftrightarrow \quad x < 26 \;.$$

Den anden ulighed giver

$$x^2 > 24^2 - 10^2 = 476 \quad \Leftrightarrow \quad x > \sqrt{476} \approx 21{,}82 \;.$$

Den tredje ulighed giver

$$x^2 > 10^2 - 24^2 = -476 \;,$$

og dette er opfyldt for alle x.

Altså er de brugbare værdier $x = 22, 23, 24, 25$. Desuden ser vi, at disse tilfredsstiller *trekantuligheden*: Summen af to sider er større end den tredje:

$$10 + 24 > x \;,\; 10 + x > 24 \;,\; 24 + x > 10$$

eller

$$x < 34 \;,\; x > 14 \;,\; x > -14 \;.$$

I øvrigt er denne sidste kontrol ikke nødvendig, fordi den følger af at cosinusrelationen giver resultater (dvs. vinkler). Hvis man forsøger at bruge cosinusrelationen på 'sider', der ikke kan danne en trekant, vil man få værdier af cosinus, der er over 1 eller under -1.