Svar på opgave 2006-70
December 2006

Opgaven:

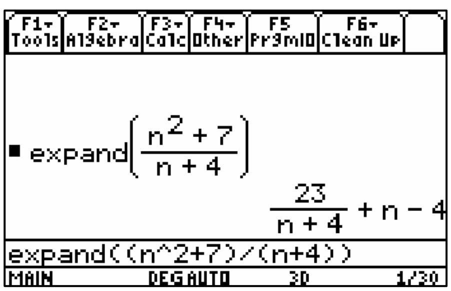
For hvor mange hele tal n mellem 1 og 2006 inkl. er brøken $\frac{n^2+7}{n+4}$ forkortelig?

Hvis løsningen opnås ved hjælp af et program på et CAS-værktøj, skal programteksten (algoritmen) fremgå.

Løsning:

Vi skriver brøken som blandet tal, idet vi kan bruge et CAS-værktøj (fx TI-89). Vi får så (se skærmbilledet), at

$$\frac{n^2+7}{n+4} = n-4+\frac{23}{n+4}$$



Vi kan også finde denne fremstilling ved håndregning, idet vi fx kan skrive

$$\frac{n^2+7}{n+4} = \frac{n^2+4n-4n+7}{n+4} = \frac{n(n+4)-4n+7}{n+4}$$

$$= \frac{n(n+4)}{n+4} - \frac{4n-7}{n+4} = n - \frac{4(n+4)-23}{n+4} = n-4+\frac{23}{n+4}\ .$$

Derfor kan brøken forkortes, hvis der findes en fælles divisor for 23 og $n+4$, dvs. et tal, der går op i dem begge. Da 23 er et primtal, må $n+4$ ligge i 23-tabellen, dvs.

$$n+4 \ :\quad 23\ ,\ 46\ ,\ 69\ ,\ 92\ ,\ \ldots$$

eller

$$n \ :\quad 19\ ,\ 42\ ,\ 65\ ,\ 88\ ,\ \ldots$$

Vi kan sige, at n er af formen $n = 23k-4$, og da n skal ligge mellem 1 og 2006, kræver vi, at

$$1 \le 23k-4 \le 2006 \quad\Leftrightarrow\quad 5 \le 23k \le 2010$$

$$\Leftrightarrow\quad \tfrac{5}{23} \le k \le \tfrac{2006}{23} \quad\Leftrightarrow\quad 0{,}217 \le k \le 87{,}217\ .$$

Altså kan n antage værdierne $23k - 4$ for $k = 1, 2, 3, \ldots, 86, 87$. Derfor findes de 87 tal

$$23\cdot 1-4\ ,\ 23\cdot 2-4\ ,\ 23\cdot 3-4\ ,\ \ldots,\ 23\cdot 87-4$$

eller

$$19 , 42 , 65 , 88 , . . . , 1997 \; ,$$

for hvilke brøken er forkortelig.

For eksempel får vi for n = 65 brøken

$$\frac{n^2+7}{n+4}=\frac{65^2+7}{65+4}=\frac{4232}{69}=\frac{23\cdot 184}{23\cdot 3}=\frac{184}{3} \; ,$$

så brøken er forkortelig, mens n = 44 giver

$$\frac{n^2+7}{n+4}=\frac{44^2+7}{44+4}=\frac{1943}{48}=\frac{29\cdot 67}{2^4\cdot 3} \; ,$$

som er uforkortelig.