Svar på opgave 2007-71
Januar 2007

Opgaven:

a. Udregn tallet

$$2007^2 - 2006^2 + 2005^2 - 2004^2 + \cdots + 3^2 - 2^2 + 1^2 \ .$$

b. Hvilket af følgende to tal er størst:

$$p = \frac{10^{2005}+1}{10^{2006}+1} \quad \text{eller} \quad q = \frac{10^{2006}+1}{10^{2007}+1} \ ?$$

Løsning:

a. Vi skal udregne tallet

$$S = 2007^2 - 2006^2 + 2005^2 - 2004^2 + \cdots + 3^2 - 2^2 + 1^2 \ .$$

Vi udregner differenserne med formlen $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$:

$$2007^2 - 2006^2 = (2007 + 2006)(2007 - 2006) = 2007 + 2006$$
$$2005^2 - 2004^2 = (2005 + 2004)(2005 - 2004) = 2005 + 2004$$
$$\cdots\cdots$$
$$3^2 - 2^2 = (3 + 2)(3 - 2) = 3 + 2 \ .$$

Derfor bliver tallet S lig med

$$S = 2007 + 2006 + 2005 + \cdots + 3 + 2 + 1 \ .$$

For at beregne dette tal skriver vi S op med leddene i modsat rækkefølge:

$$S = 1 + 2 + 3 + \cdots + 2005 + 2006 + 2007 \ .$$

De to sidste ligninger lægges sammen led for led:

$$2S = (2007 + 1) + (2006 + 2) + (2005 + 3) + \cdots + (2 + 2006) + (1 + 2007) \ .$$

På højre side af lighedstegnet står 2007 parenteser, der alle er lig med 2008. Derfor er

$$2S = 2007 \cdot 2008 \quad \text{så} \quad S = 2007 \cdot 1004 = \underline{\underline{2\,015\,028}}$$

b. Vi skal afgøre, hvilket af følgende to tal, der er størst:

$$p = \frac{10^{2005}+1}{10^{2006}+1} \quad \text{eller} \quad q = \frac{10^{2006}+1}{10^{2007}+1} .$$

For nemheds skyld sætter vi $x = 10^{2005}$. Så er

$$10^{2006} = 10x \quad \text{og} \quad 10^{2007} = 100x .$$

Derefter er

$$p = \frac{x+1}{10x+1} \quad \text{og} \quad q = \frac{10x+1}{100x+1} .$$

Vi udregner nu enten $p - q$ eller $q - p$ (ligegyldig hvilken). Vi vælger det første:

$$p - q = \frac{x+1}{10x+1} - \frac{10x+1}{100x+1} = \frac{(x+1)(100x+1)-(10x+1)^2}{(10x+1)(100x+1)}$$

$$= \frac{100x^2 + x + 100x + 1 - 100x^2 - 1 - 20x}{(10x+1)(100x+1)} = \frac{81x}{(10x+1)(100x+1)} .$$

Da x er positiv, er denne brøk positiv. Altså er $p - q > 0$ og dermed $p > q$.

Dvs. $\frac{10^{2005}+1}{10^{2006}+1}$ er størst.