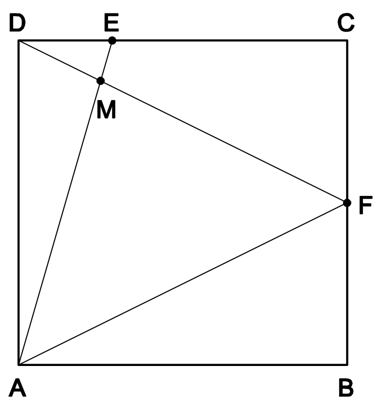
Svar på opgave 2007-72 Februar 2007

Opgaven:



I kvadratet *ABCD* er *F* midtpunktet af siden *BC* og *E* er et punkt på siden *CD*, så $\frac{DE}{EC} = \frac{2}{5}$.

Linjerne *AE* og *FD* skærer hinanden i *M*.

Hvilket areal er størst: Arealet af ΔAFM eller arealet af $\square MECF$?

Løsning:

I kvadratet *ABCD* er *F* midtpunkt af *BC* og *E* ligger på *CD*, så $DE : EC = 2 : 5$. Linjerne *AE* og *FD* skærer hinanden i *M*. Vi skal afgøre, hvilket areal, der er størst: Arealet af ΔAFM eller arealet af $\square MECF$.

Vi betegner for nemheds skyld arealer med [...]. Lad desuden kvadratet have sidelængden *a*. I den ligebenede ΔAFD gælder

$$[AFD] = \tfrac{1}{2}[ABCD] = \tfrac{1}{2}a^2 .$$

Vi har, at

$$DE = \tfrac{2}{5}EC = \tfrac{2}{5}(a - DE) = \tfrac{2}{5}a - \tfrac{2}{5}DE ,$$

så vi får

$$\tfrac{7}{5}DE = \tfrac{2}{5}a \iff DE = \tfrac{2}{7}a .$$

Derfor er

$$[AED] = \tfrac{1}{2}a \cdot \tfrac{2}{7}a = \tfrac{1}{7}a^2 = \tfrac{1}{7}[ABCD] \ .$$

Desuden er

$$[AMD] < [AED] = \tfrac{1}{7}[ABCD] \ .$$

Nu er

$$[AMD] + [AFM] = [AFD] = \tfrac{1}{2}[ABCD]$$

$$\Leftrightarrow \ [AFM] = \tfrac{1}{2}[ABCD] - [AMD] > \tfrac{1}{2}[ABCD] - \tfrac{1}{7}[ABCD] = \tfrac{5}{14}[ABCD] \ . \qquad (1)$$

Videre er

$$[FCD] = \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2}a \cdot a = \tfrac{1}{4}a^2 = \tfrac{1}{4}[ABCD]$$

og dermed

$$[MECF] < \tfrac{1}{4}[ABCD] \ . \qquad (2)$$

Altså får vi af (1) og (2), at

$$[AFM] > \tfrac{5}{14}[ABCD] = \tfrac{10}{28}[ABCD] > \tfrac{7}{28}[ABCD]$$

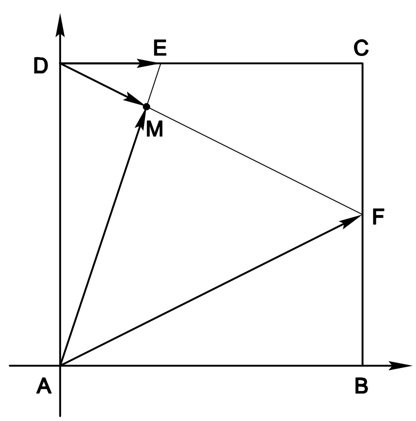
$$= \tfrac{1}{4}[ABCD] > [MECF] \ .$$

Dermed er arealet af ΔAFM større end arealet af $\square MECF$.

Generalisation

Vi kan studere problemet med de to arealer lidt nærmere ved hjælp af vektorregning i koordinater.
Kvadratet indlægges i et koordinatsystem, så vi får koordinaterne
$A\,(0,0)$, $B\,(1,0)$, $C\,(1,1)$, $D\,(0,1)$

Desuden er $F\,(1,\tfrac{1}{2})$ og $E\,(a,1)$, hvor a er et tal mellem 0 og 1.



Linjerne AE og DF har ligningerne

$$AE: \ y = \tfrac{1}{a}x \quad \text{og} \quad DF: \ y = -\tfrac{1}{2}x + 1 \ .$$

Skæringspunktets koordinater, dvs. koordinaterne til M, fås ved at løse ligningssystemet bestående af disse to ligninger:

$$-\tfrac{1}{2}x+1=\tfrac{1}{a}x \iff \left(\tfrac{1}{a}+\tfrac{1}{2}\right)x=1 \iff x=\frac{2a}{2+a}$$

og dermed

$$y=\tfrac{1}{a}x=\frac{2}{2+a}\ .$$

Dermed har vi koordinaterne til M:

$$M\ \left(\tfrac{2a}{a+2}\ ,\ \tfrac{2}{a+2}\right)\ .$$

Nu får vi vektorerne

$$\overrightarrow{AF}=(1,\tfrac{1}{2})\quad \text{og}\quad \overrightarrow{AM}=\left(\tfrac{2a}{a+2}\ ,\ \tfrac{2}{a+2}\right)\ .$$

Dermed kan vi bestemme arealet af ΔAMF ved hjælp af determinanter:

$$[AMF]=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}1 & \tfrac{2a}{a+2}\\ -\tfrac{1}{2} & \tfrac{2}{a+2}\end{vmatrix}\right|=\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{2}{a+2}-\tfrac{a}{a+2}\right)=\tfrac{2-a}{2(a+2)}\ .$$

Vi finder arealet af □*MECF* sådan:

$$[MECF]=[DFC]-[DME]\ .$$

Vi har, at $[DFC]=\tfrac{1}{4}$ og for at finde $[DME]$ får vi brug for vektorerne

$$\overrightarrow{DM}=\left(\tfrac{2a}{a+2},\tfrac{2}{a+2}\right)-(0,1)=\left(\tfrac{2a}{a+2},\tfrac{-a}{a+2}\right)\quad \text{og}\quad \overrightarrow{DE}=(a,0)\ .$$

Derfor får vi arealet

$$[MECF]=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}\tfrac{2a}{a+2} & a\\ -\tfrac{a}{a+2} & 0\end{vmatrix}\right|=\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{a^2}{a+2}=\tfrac{a+2-2a^2}{4(a+2)}\ .$$

Forskellen mellem trekantens og firkantens areal er

$$\frac{2-a}{2(a+2)}-\frac{a+2-2a^2}{4(a+2)}=\frac{4-2a-a-2+2a^2}{4(a+2)}=\frac{2a^2-3a+2}{4(a+2)}\ ,$$

Da diskriminanten for andengradspolynomiet i tælleren er negativ, har polynomiet konstant fortegn - i dette tilfælde er det positivt for alle a. Desuden er nævneren positiv, så brøken er positiv for alle a. Trekantens areal er altså i alle tilfælde størst.

I opgaven er $a=\tfrac{2}{7}$ og indsætter vi dette i formlerne for arealerne, får vi

$$[AMF]=\tfrac{3}{8}=\tfrac{21}{56}\quad \text{og}\quad [MECF]=\tfrac{13}{56}\ .$$

Vi kan på grafregneren tegne grafen for funktionen

$$f(x)=\frac{2x^2-3x+2}{4x+8}$$

og undersøge den i intervallet [0;1] (fordi a varierer i dette interval). Ved hjælp af differentialregning finder vi, at den mindste forskel mellem trekantens og firkantens areal indtræffer, hvis $a = 2(\sqrt{2} - 1) \approx 0,828$.