Svar på opgave 2007-73
Marts 2007

Opgaven:

Løs uden hjælpemidler inden for de reelle tal ligningssystemet

$$x + y + \frac{1}{z} = 3$$

$$y + z + \frac{1}{x} = 3$$

$$z + x + \frac{1}{y} = 3$$

Løsning:

Vi forudsætter selvfølgelig, at x, y og z alle er forskellige fra 0.

Vi ser, at ligningssystemet er *symmetrisk* i x, y og z, dvs. at hvis et talsæt (a,b,c) er løsning, er også (b,c,a) og (c,a,b) løsninger.
Vi ganger ligningerne med henholdsvis z, x og y, så systemet bliver ensbetydende med

$$xz + yz + 1 = 3z \qquad (1)$$

$$yx + zx + 1 = 3x \qquad (2)$$

$$zy + xy + 1 = 3y \qquad (3)\ .$$

Subtraktion af (2) fra (1) giver

$$yz - yx = 3z - 3x \quad \Leftrightarrow \quad y(z - x) = 3(z - x) \quad \Leftrightarrow \quad (y - 3)(z - x) = 0\ .$$

Vi finder her mulighederne $y = 3$ og $z = x$.

Trækker vi (3) fra (1) fås

$$zx - zy = 3x - 3y \quad \Leftrightarrow \quad z(x - y) = 3(x - y) \quad \Leftrightarrow \quad (z - 3)(x - y) = 0\ ,$$

så $x = 3$ eller $y = z$.

Trækker vi (3) fra (2) får vi ved tilsvarende regninger, at

$$(z - 3)(x - y) = 0\ ,$$

så $z = 3$ eller $x = y$.

I. y = 3.

Ligningssystemet ser nu sådan ud:

$$xz + 3z + 1 = 3z \quad \Leftrightarrow \quad xz = -1$$
$$3x + zx + 1 = 3x \quad \Leftrightarrow \quad xz = -1$$
$$3z + 3x + 1 = 9 \quad \Leftrightarrow \quad 3x + 3z = 8\ .$$

Af den sidste ligning fås $z = \frac{1}{3}(8-3x)$ og dette indsættes i den første:

$$x \cdot \tfrac{1}{3}(8-3x) = -1 \quad \Leftrightarrow \quad x(8-3x) = -3 \quad \Leftrightarrow \quad 3x^2 - 8x - 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \begin{cases} 3 \\ -\frac{1}{3} \end{cases},$$

og så er

$$z = \tfrac{1}{3}(8-3x) = \begin{cases} \frac{1}{3}(8-9) = -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3}(8+1) = 3 \end{cases}.$$

Dermed har vi fundet de mulige løsninger:

$$(x,y,z)\ :\ (3,3,-\tfrac{1}{3})\ ,\ (-\tfrac{1}{3},3,3)\ .$$

På grund af symmetrien er også $(x,y,z) = (3,-\frac{1}{3},3)$ en mulig løsning.

II. Ingen af de variable er 3.

Her må $x = y$, $y = z$ og $x = z$, dvs. alle tre variable er ens. Vi får så af en af ligningerne:

$$x + x + \tfrac{1}{x} = 3 \quad \Leftrightarrow \quad 2x^2 + 1 = 3x \quad \Leftrightarrow \quad x = 1 \ \vee\ x = \tfrac{1}{2}\ .$$

Dermed får vi de mulige løsninger

$$(x,y,z)\ ;\ (1,1,1)\ ,\ (\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2})\ .$$

Ved at gøre prøve i det oprindelige ligningssystem ser vi, at alle 5 muligheder faktisk er løsninger.