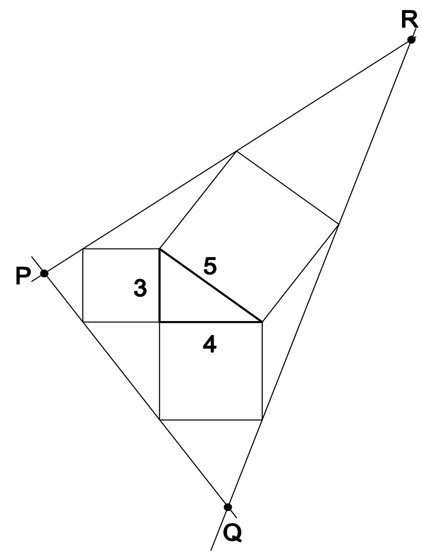
Svar på opgave 2007-74
April 2007

Opgaven:

På siderne i den retvinklede 3-4-5-trekant tegnes kvadrater som vist. De ydre vinkelspidser i kvadraterne forbindes med rette linjer, så der opstår en ΔPQR.

Er denne trekant spids-, ret- eller stumpvinklet?



Løsning:

1. metode.

Vi bruger almindelig trigonometri og sætter på figuren (**se næste side**) $u = \angle DAE$, $v = \angle EDA$ og $w = \angle CFG$. Vi vil bestemme v og w, fordi der i ΔPQR gælder, at $P = v + w$ og P ligger over for den længste side og er derfor den største vinkel. Vi vælger derfor at finde denne vinkel.

Vi ser, at i ΔABC er $\cos A = \frac{3}{5}$. I ΔDAE giver cosinusrelationen

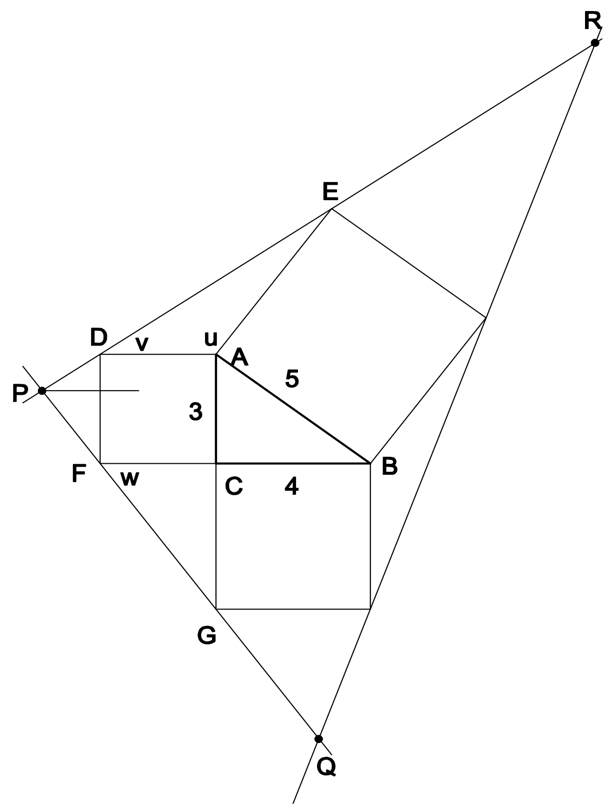
$$DE^2 = 3^2 + 5^2 - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cos u = 34 - 30\cos u\ .$$

Vinklerne omkring punktet A har en sum på $360°$, så vi får

$$A + u + 90° + 90° = 360° \quad \Leftrightarrow \quad u = 180° - A\ ,$$

og dermed $\cos u = -\cos A$, så

$$DE^2 = 34\text{-}30 \cdot \left(-\tfrac{3}{5}\right) = 52 \quad \Leftrightarrow \quad DE = \sqrt{52}$$



Cosinusrelationen giver desuden

$$EA^2 = 5^2 = 52 + 3^2 - 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{52} \cdot \cos v \quad \Leftrightarrow \quad 25 = 52 + 9 - 6\sqrt{52}\cos v$$

$$\Leftrightarrow \quad -36 = -6\sqrt{52} \cdot \cos v \quad \Leftrightarrow \quad \cos v = \frac{6}{\sqrt{52}} \quad \Leftrightarrow \quad v = 33{,}69^\circ \ .$$

I ΔFCG er

$$\tan w = \tfrac{4}{3} \quad \Leftrightarrow \quad w = 53{,}13^\circ \ .$$

Den søgte vinkel er derfor

$$P = v + w = 86{,}82^\circ$$

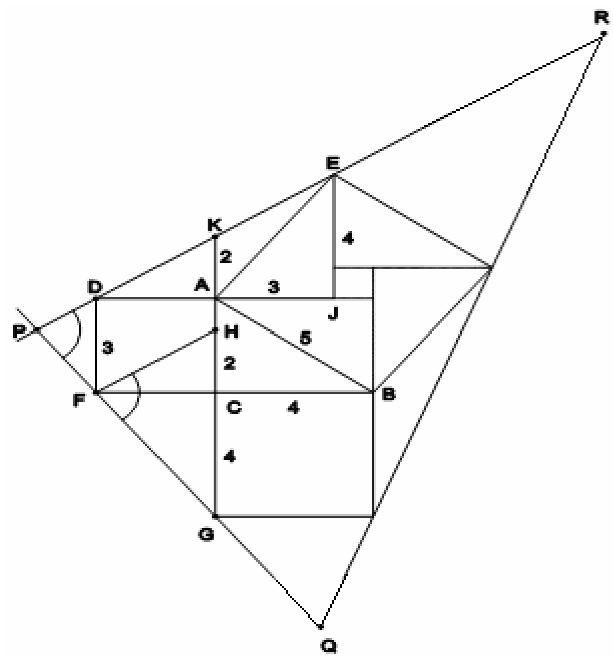
så ΔPQR er spidsvinklet.

2. metode.

Vi gengiver dernæst en særdeles smuk løsning fra Kang Li, Langkær Gymnasium.

På figuren (**se næste side**) forlænges CA til skæring med DE i K. En linje gennem F parallel med DK skærer CK i H og projektionen af E på DA er J.

Vi kan dele kvadratet over siden AB op i 4 stk. 3-4-5-trekanter og et enkelt kvadrat som vist. Så er $AJ = 3$ og $JE = 4$.



Nu er ΔEJD og ΔKAD ensvinklede, og den første trekant er dobbelt så stor som den sidste. Derfor er $KA = \frac{1}{2} JE = 2$.

Desuden er $KH = DF = 3$, så $HC = 2$ og $HG = 6$. Videre er $FH = DK = \sqrt{13}$ og $FG = 5$. Så giver cosinusrelationen i ΔFHG:

$$\cos\angle HFG = \frac{\sqrt{13}^2 + 5^2 - 6^2}{2\cdot\sqrt{13}\cdot 5} = \frac{13+25-36}{10\sqrt{13}} = \frac{1}{5\sqrt{13}}.$$

Derfor er $P = \angle DPF = \angle HFG$ spids, og vi finder dens gradstørrelse til

$$P = \arccos\frac{1}{5\sqrt{13}} = 86{,}82°$$