Svar på opgave 2007-78
Oktober 2007

Opgaven:

Vis uden hjælpemidler, at tallet

$$\sqrt{\frac{3-2\sqrt{2}}{17-12\sqrt{2}}}-\sqrt{\frac{3+2\sqrt{2}}{17+12\sqrt{2}}}$$

er rationalt (dvs. kan skrives som en brøk med hele tal i tæller og nævner).

Løsning:

Vi ser på hver af de to brøker under rodtegnene enkeltvis. Den første brøk forlænger vi med
17 + 12 $\sqrt{2}$:

$$\frac{3-2\sqrt{2}}{17-12\sqrt{2}}=\frac{(3-2\sqrt{2})(17+12\sqrt{2})}{(17-12\sqrt{2})(17+12\sqrt{2})}=\frac{51+36\sqrt{2}-34\sqrt{2}-48}{17^2-(12\sqrt{2})^2}$$

$$=\frac{3+2\sqrt{2}}{289-288}=3+2\sqrt{2}$$

Den anden brøk forlænger vi med 17 - 12 $\sqrt{2}$:

$$\frac{3+2\sqrt{2}}{17+12\sqrt{2}}=\frac{(3+2\sqrt{2})(17-12\sqrt{2})}{(17+12\sqrt{2})(17-12\sqrt{2})}=\frac{51-36\sqrt{2}+34\sqrt{2}-48}{17^2-(12\sqrt{2})^2}$$

$$=\frac{3-2\sqrt{2}}{289-288}=3-2\sqrt{2}$$

Altså kan vi reducere det oprindelige monstrum til:

$$a=\sqrt{3+2\sqrt{2}}-\sqrt{3-2\sqrt{2}}$$

Vi kan nu gå videre på to måder.

1. metode.

Vi har, at

$$3+2\sqrt{2}=(1+\sqrt{2})^2 \quad \text{så} \quad \sqrt{3+2\sqrt{2}} = \pm(1+\sqrt{2}) \ .$$

Da $\sqrt{3+2\sqrt{2}}$ er et positivt tal, er

$$\sqrt{3+2\sqrt{2}} = 1+\sqrt{2} \ .$$

På samme måde er

$$3-2\sqrt{2}=(1-\sqrt{2})^2 \quad \text{så} \quad \sqrt{3-2\sqrt{2}} = \pm(1-\sqrt{2}) \ ,$$

og da $\sqrt{3-2\sqrt{2}}$ er positivt, er

$$\sqrt{3-2\sqrt{2}} = -(1-\sqrt{2}) = \sqrt{2}-1 \ ,$$

Dermed har vi til slut, at det søgte tal er

$$a = 1+\sqrt{2} - (\sqrt{2} - 1) = 2 \ ,$$

og dette tal er rationalt, endda helt.

2. metode.

Vi fandt, at

$$a = \sqrt{3+2\sqrt{2}} - \sqrt{3-2\sqrt{2}} \ .$$

Ved kvadrering får vi

$$a^2 = \left(\sqrt{3+2\sqrt{2}} - \sqrt{3-2\sqrt{2}}\right)^2 = 3+2\sqrt{2}+3-2\sqrt{2}-2\cdot\sqrt{3+2\sqrt{2}}\cdot\sqrt{3-2\sqrt{2}}$$

$$= 6-2\sqrt{(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})} = 6-2\sqrt{9-4\cdot 2} = 6-2=4 \ .$$

I udtrykket for a er den sidste kvadratrod mindre end den første, så a er positiv, og da $a^2 = 4$, er $a = 2$.