Svar på opgave 2007-79
November 2007

Opgaven:

Find samtlige par af hele positive tal (m,n), så

$$10(m + n) = m \cdot n \ .$$

Løsning:

<u>*1. metode*</u>

Vi kan skrive ligningen om sådan, idet vi lægger 100 til på begge sider:

$$10(m + n) = mn \ \Leftrightarrow \ mn - 10m - 10n + 100 = 100 \ \Leftrightarrow \ (m - 10)(n - 10) = 100 \ .$$

Her er tallet 100 skrevet som produkt af de to faktorer m-10 og n-10. Vi kan derfor gennemgå samtlige muligheder:

1. Den ene faktor er 1, den anden 100. Vi får løsningerne
$$(m,n) = (11,110) \text{ og } (m,n) = (110,11) \ .$$
2. Den ene faktor er 2, den anden 50. Vi får løsningerne
$$(m,n) = (12,60) \text{ og } (m,n) = (60,12) \ .$$
3. Den ene faktor er 4, den anden 25. Vi får løsningerne
$$(m,n) = (14,35) \text{ og } (m,n) = (35,14) \ .$$
4. Den ene faktor er 5, den anden 20. Vi får løsningerne
$$(m,n) = (15,30) \text{ og } (m,n) = (30,15) \ .$$
5. Begge faktorer er 10. Dette giver løsningen
$$(m,n) = (20,20) \ .$$

Ialt har ligningen altså 9 løsninger.

2. metode

Vi kan udtrykke den ene variabel ved den anden, fx m ved n:

$$10m + 10n = mn \iff m(n - 10) = 10n$$

$$\iff m = \frac{10n}{n-10} = \frac{10n - 100 + 100}{n-10} = \frac{10n-100}{n-10} + \frac{100}{n-10} = 10 + \frac{100}{n-10} .$$

Her er $n \neq 10$, idet $n = 10$ efter ligningen ville give

$$10m + 100 = 10m ,$$

hvilket er umuligt.

Da m er et helt tal må den sidste brøk være et helt tal. Derfor skal $n - 10$ gå op i 100, så vi har følgende muligheder for $n - 10$:

$$n - 10 : 1 , 2 , 4 , 5 , 10 , 20 , 25 , 50 , 100 .$$

Dette giver følgende muligheder for n:

$$n : 11 , 12 , 14 , 15 , 20 , 30 , 35 , 60 , 110 .$$

Når vi indsætter disse værdier i ligningen

$$m = 10 + \frac{100}{n-10}$$

får vi følgende værdier for m:

$$m : 110 , 60 , 35 , 30 , 20 , 15 , 14 , 12 , 11 .$$

Dermed har vi løsningerne

$$(m,n) : (110,11) , (60,12) , (35,14) , (30,15) , (20,20) ,$$
$$(15,30) , (14,35) , (12,60) , (11,110) .$$