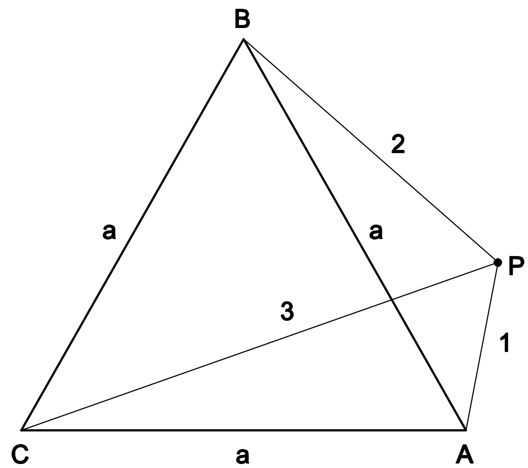
Svar på opgave 2007-80
December 2007

Opgaven:

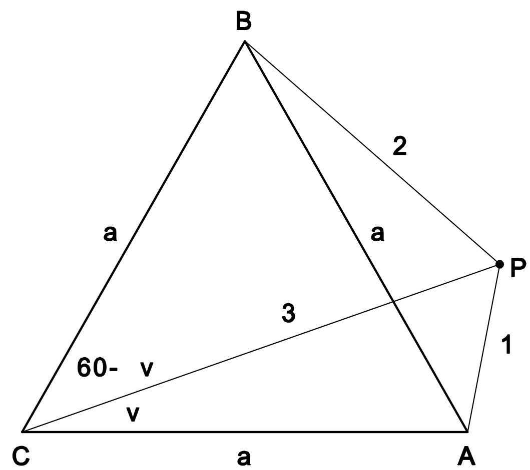
Et punkt P ligger uden for den ligesidede trekant ΔABC med sidelængde a således, at dets afstand til vinkelspidserne er PA = 1, PB = 2 og PC = 3.

Beregn sidelængden a i trekanten, idet samtlige mellemregninger medtages.



Løsning:

1. metode



Vi sætter $v = \angle PCA$, så $\angle PCB = 60° - v$.

Cosinusrelationen i ΔPAC giver

$$\cos v = \frac{3^2 + a^2 - 1^2}{2 \cdot 3 \cdot a} = \frac{8 + a^2}{6a}$$

og i ΔPBC får vi

$$\cos(60° - v) = \frac{3^2 + a^2 - 2^2}{2 \cdot 3 \cdot a} = \frac{5 + a^2}{6a} \ .$$

Nu bruger vi en såkaldt additionsformel:

$$\cos(60° - v) = \cos 60° \cdot \cos v + \sin 60° \cdot \sin v \ . \qquad (1)$$

Efter grundrelationen har vi

$$\sin^2 v + \cos^2 v = 1 \ \Leftrightarrow \ \sin^2 v = 1 - \cos^2 v \ ,$$

og vi har at

$$\cos^2 v = \left(\frac{8 + a^2}{6a}\right)^2 = \frac{64 + a^4 + 16a^2}{36a^2}$$

og dermed

$$\sin^2 v = 1 - \cos^2 v = 1 - \frac{64 + a^4 + 16a^2}{36a^2} = \frac{36a^2 - 64 - a^4 - 16a^2}{36a^2} = \frac{20a^2 - 64 - a^4}{36a^2} \ .$$

Vi har desuden, at $\cos 60° = \frac{1}{2}$ og $\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Nu kan vi indsætte i ligning (1):

$$\frac{5 + a^2}{6a} = \frac{1}{2} \cdot \frac{8 + a^2}{6a} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{20a^2 - 64 - a^4}}{6a}$$

$$\Leftrightarrow \ \frac{10 + 2a^2}{12a} = \frac{8 + a^2}{12a} + \frac{\sqrt{60a^2 - 192 - 3a^4}}{12a}$$

$$\Leftrightarrow \ 10 + 2a^2 = 8 + a^2 + \sqrt{60a^2 - 192 - 3a^4}$$

$$\Leftrightarrow \ 2 + a^2 = \sqrt{60a^2 - 192 - 3a^4} \quad \Leftrightarrow \ (2 + a^2)^2 = 60a^2 - 192 - 3a^4$$

$$\Leftrightarrow \ 4 + a^4 + 4a^2 = 60a^2 - 192 - 3a^4 \quad \Leftrightarrow \ 4a^4 - 56a^2 + 196 = 0$$

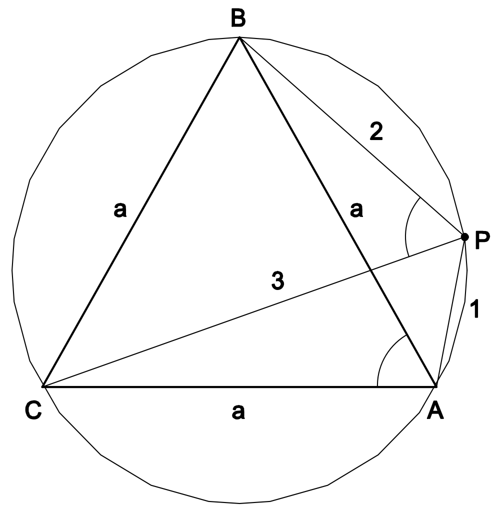
$$\Leftrightarrow \ a^4 - 14a^2 + 49 = 0 \quad \Leftrightarrow \ a^2 = \frac{14 \pm \sqrt{196 - 4 \cdot 49}}{2} = \frac{14}{2} = 7 \ .$$

Dermed er den søgte sidelængde i trekanten $a = \underline{\underline{\sqrt{7}}}$.

2. metode

Vi kan benytte en sætning, som var kendt af grækeren Ptolemaios fra antikken:

Ptolemaios sætning:
En firkant er indskrivelig netop hvis summen af de modstående siders produkter er lig med diagonalernes produkt.



I dette tilfælde ser vi på □*APBC*. Et par modstående sider er *AP* og *BC*, og de har produktet

$$AP \cdot BC = 1 \cdot a = a \ .$$

Det andet par modstående sider er *PB* og *AC*, og de har produktet

$$PB \cdot AC = 2 \cdot a = 2a \ .$$

Så er summen af de modstående siders produkter:

$$AP \cdot BC + \ PB \cdot AC = a + 2a = 3a \ .$$

Diagonalerne er *PC* og *AB* og deres produkt er

$$PC \cdot AB = 3 \cdot a = 3a \ .$$

Dermed er betingelsen i sætningen opfyldt, så firkanten er indskrivelig, dvs. dens vinkelspidser ligger på en cirkel.

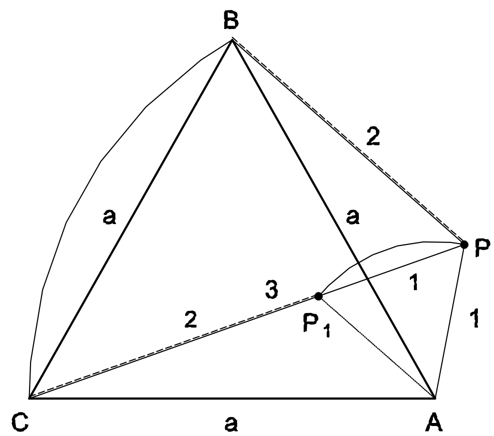
Nu benytter vi, at periferivinkler, der spænder over samme bue i en cirkel, er lige store. På figuren ser vi, at $\angle BPC = \angle BAC = 60°$. Dermed giver cosinusrelationen i ΔBPC:

$$\cos \angle BPC = \cos 60° = \frac{3^2 + 2^2 - a^2}{2 \cdot 3 \cdot 2} = \frac{13 - a^2}{12} \ ,$$

og da $\cos 60° = \frac{1}{2}$ er $\frac{1}{2} = \frac{13 - a^2}{12} \Leftrightarrow 12 = 26 - 2a^2 \Leftrightarrow 2a^2 = 14 \Leftrightarrow \underline{\underline{a = \sqrt{7}}}$

3. metode

Vi angiver en særdeles smuk og udspekuleret løsning fra Michael Bach Ipsen fra Københavns VUC.



Vi foretager en drejning af planen på 60° i negativ omløbsretning omkring punktet A. Så vil P føres over i et punkt P_1 og B føres over i C. Derfor vil linjestykket PB føres over i P_1C. Da $PB = 2$ er også $P_1C = 2$.

I ΔAPP_1 er $AP = AP_1 = 1$ og $\angle PAP_1 = 60°$, så ΔAPP_1 er ligesidet og dermed $PP_1 = 1$.

Så får vi

$$PP_1 + P_1C = 1 + 2 = 3 = PC$$

Da altså $PP_1 + P_1C = PC$, ligger P_1 på linjestykket CP. Da $\angle APC = 60°$ giver cosinusrela- tionen i ΔCPA:

$$\cos 60° = \frac{3^2 + 1^2 - a^2}{2 \cdot 3 \cdot 1} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{10 - a^2}{6} \Leftrightarrow 10 - a^2 = 3 \Leftrightarrow \underline{\underline{a = \sqrt{7}}}$$